



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. S. Fedii, An example of a second-order nonhypoelliptic operator with the property of global hypoellipticity,
Mat. Zametki, 1972, Volume 12, Issue 3, 269–274

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm9878>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 20, 2025, 09:40:00



ПРИМЕР НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВОМ ГЛОБАЛЬНОЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

В. С. Федий

Доказывается, что оператор

$$P \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^2(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ (Ω — область в \mathbf{R}^n), $\{x: \varphi(x) = 0\}$ — компакт в Ω , являющийся замыканием своих внутренних точек, обладает свойством глобальной гипоеллиптичности в Ω , т. е.

$$v \in D'(\Omega), \quad Pv \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow v \in C^\infty(\Omega)$$

Этот оператор не является гипоеллиптическим. Библ. 2 назв.

В статье используются обозначения, смысл которых разъяснен на первых страницах книги [1].

Пусть Ω — некоторая область \mathbf{R}^n . Линейный дифференциальный оператор $P(x, D)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в Ω называется гипоеллиптическим, если $\text{sing supp } Pu = \text{sing supp } u$ для любой функции u из $D'(\Omega)$. Это означает, что

$$u \in D'(\Omega'), \quad Pu \in C^\infty(\Omega') \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega').$$

Здесь Ω' — произвольная подобласть в Ω .

Мы будем говорить, что оператор $P(x, D)$ глобально гипоеллиптивен в Ω , если

$$u \in D'(\Omega), \quad Pu \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

Для операторов с постоянными коэффициентами понятия гипоеллиптичности и глобальной гипоеллиптичности

совпадают. В настоящей работе приводится пример глобально гипоеллиптического вырождающегося эллиптического оператора второго порядка, который не является гипоеллиптическим. По-видимому, это первый пример такого рода.

Пусть K_0 — компакт в Ω , являющийся замыканием своих внутренних точек. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вещественная функция из $C^\infty(\Omega)$ такая, что $\{x: \varphi(x) = 0\} = K_0$. Рассмотрим в Ω дифференциальный оператор

$$P(x, D)u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \sum_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^2 \frac{\partial u}{\partial x_k}. \quad (1)$$

Утверждается, что он обладает сформулированным выше свойством. Докажем это.

Оператор (1) негипоеллиптивен. Это очевидным образом следует из того, что на внутренности K_0 оператор (1) просто совпадает с оператором $-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$.

Оператор (1) глобально гипоеллиптивен в Ω . Для доказательства этого факта нам потребуется теорема, сформулированная ниже. Ее доказательство можно найти в статье [2].

ТЕОРЕМА. Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющий условиям:

1° для любого компакта K из Ω , любого вещественного N и некоторых s_0 и a выполняется оценка

$$\|u\|_{(s_0+a)}^2 \leq C_{K,N} \{ \|Pu\|_{(s_0)}^2 + \|u\|_{(-N)}^2 \}, \quad u \in C_0^\infty(K); \quad (2)$$

2° для любого компакта K из Ω , любого мультииндекса $\beta \neq 0$ и некоторых вещественных s_β , каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и N с некоторой постоянной $C_{K,\varepsilon,N,\beta} > 0$, выполняется оценка

$$\|P_{(\beta)}u\|_{(s_\beta)}^2 \leq \varepsilon \|Pu\|_{(s_\beta+|\beta|)}^2 + C_{K,\varepsilon,N,\beta} \|u\|_{(-N)}^2, \quad u \in C_0^\infty(K). \quad (3)$$

Тогда $v \in D'(\Omega)$, $\text{sing supp } v$ — компакт в Ω ,

$$Pv \in H_{(\sigma)}^{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow v \in H_{(\sigma+a)}^{\text{loc}}(\Omega).$$

В частности, если $Pv \in C^\infty(\Omega)$, то $v \in C^\infty(\Omega)$.

Рассмотрим оператор (1). Так как он эллиптический (а следовательно, и гипоэллиптический) в $\Omega \setminus K_0$, из $Pu \in C^\infty(\Omega)$ следует, что $u \in C^\infty(\Omega \setminus K_0)$. А это означает, что $\text{sing supp } u \in K_0$, т. е. является компактом в Ω . Поэтому для доказательства глобальной гипоэллиптической оператора (1) достаточно проверить справедливость для него оценок (2) и (3). Начнем с доказательства оценки (2).

Пусть K — любой компакт в Ω , $v \in C_0^\infty(K)$. Имеем

$$(Pv, v) = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{(0)}^2 + \sum_{k=2}^n \left\| \varphi \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(0)}^2 \geq \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{(0)}^2. \quad (4)$$

Хорошо известно, что $\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{(0)}^2 \geq C_K \|v\|_{(0)}^2$, где постоянная C_K зависит от размеров K . Отсюда получаем

$$C_K \|v\|_{(0)}^2 \leq (Pv, v) \leq \frac{1}{2\mu} \|Pv\|_{(0)}^2 + \frac{\mu}{2} \|v\|_{(0)}^2.$$

Здесь μ — произвольное положительное число. Выбирая $\mu < 2C_K$ и перенося $(\mu/2) \|v\|_{(0)}^2$ в левую часть неравенства, получаем оценку

$$\|v\|_{(0)}^2 \leq \bar{C}_K \|Pv\|_{(0)}^2, \quad (5)$$

а это и есть нужная нам оценка (2) с $s_0 = 0$ и $a = 0$.

Теперь перейдем к доказательству оценок (3). Пусть $v \in C_0^\infty(K)$. При $|\beta| \geq 3$ имеем

$$\|P_\beta v\|_{(-|\beta|)}^2 \leq C \|v\|_{(-1)}^2 \leq \mu \|v\|_{(0)}^2 + C_{\mu, K} \|v\|_{(-N)}^2,$$

где μ и N — произвольные положительные числа. Здесь мы воспользовались тем, что порядок оператора P равен двум. Отсюда, в силу произвольности μ и неравенства (5), следует оценка (3).

Пусть $|\beta| = 1$. Рассмотрим оператор $P_{(j)}(x, D)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|P_{(j)}(x, D)v\|_{(-1)}^2 &= \left\| -\sum_{k=2}^n 2\varphi\varphi_{(j)} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(-1)}^2 \leq \\ &\leq (n-1) \sum_{k=2}^n \left\| 2\varphi_{(j)}\varphi \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(0)}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как функция $\varphi_{(j)}(x)$ равна нулю на K_0 и, следовательно, по непрерывности мала вблизи K_0 , можно по любому $\mu > 0$ найти такую функцию $\Psi_\mu(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, что

$\Psi_\mu(x) = 1$ в окрестности K_0 , $0 \leq \Psi_\mu \leq 1$ и

$$(n-1) \sum_{k=2}^n \left\| 2\varphi_{(j)} \varphi \frac{\partial \Psi_\mu v}{\partial x_k} \right\|_{(0)}^2 \leq \mu \sum_{k=2}^n \left\| \varphi \frac{\partial \Psi_\mu v}{\partial x_k} \right\|_{(0)}^2.$$

Отсюда и из (4) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \|P_{(j)}(x, D)v\|_{(-1)}^2 &\leq 2\|P_{(j)}\Psi_\mu v\|_{(-1)}^2 + 2\|P_{(j)}(1 - \Psi_\mu)v\|_{(-1)}^2 \leq \\ &\leq 2\mu\|P\Psi_\mu v, \Psi_\mu v\| + 2\|P_{(j)}(1 - \Psi_\mu)v\|_{(-1)}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Правую часть в (7) оценим через

$$\mu\|P\Psi_\mu v\|_{(0)}^2 + \mu\|\Psi_\mu v\|_{(0)}^2 + C\|P(1 - \Psi_\mu)v\|_{(-1)}^2 + C\|v\|_{(-N)}^2. \quad (8)$$

Для оценки второго слагаемого в (7) мы использовали обычную эллиптическую оценку. Чтобы оценить второе слагаемое в (8), воспользуемся неравенством (5) и тем, что $0 \leq \Psi_\mu \leq 1$.

Используем также, что $P\Psi_\mu v = \Psi_\mu Pv + [P, \Psi_\mu]v$, а $P(1 - \Psi_\mu)v = (1 - \Psi_\mu)Pv + [P, 1 - \Psi_\mu]v$, где, как обычно, через $[P, \varphi]$ обозначается оператор $P\varphi - \varphi P$.

Тогда (8) оценится через

$$\begin{aligned} 2\mu\|Pv\|_{(0)}^2 + \mu C_K\|Pv\|_{(0)}^2 + 2\mu\|[P, \Psi_\mu]v\|_{(0)}^2 + C\|Pv\|_{(-1)}^2 + \\ + C\|[P, 1 - \Psi_\mu]v\|_{(-1)}^2 + C_{\mu, N}\|v\|_{(-N)}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Фиксируем $\mu > 0$ таким, чтобы было $2\mu + \mu C_K < \varepsilon/4$. Так как

$$C\|Pv\|_{(-1)}^2 \leq (\varepsilon/4)\|Pv\|_{(0)}^2 + C_{\varepsilon, N}\|v\|_{(-N)}^2,$$

то (9) можно оценить через

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2}\|Pv\|_{(0)}^2 + 2\mu\|[P, \Psi_\mu]v\|_{(0)}^2 + C\|[P, 1 - \Psi_\mu]v\|_{(0)}^2 + \\ + C_{\mu, \varepsilon, N}\|v\|_{(-N)}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Второе и третье слагаемые в (10), как это следует из доказанной ниже леммы, можно в свою очередь оценить через $(\varepsilon/2)\|Pv\|_{(0)}^2 + C_{\varepsilon, N}\|v\|_{(-N)}^2$. Это завершает доказательство оценки (3) для $|\beta| = 1$.

ЛЕММА. Пусть функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ такова, что $\varphi_{(\alpha)}(x) = 0$ в некоторой окрестности K_0 для всех $\alpha \neq 0$. Тогда для $v \in C_0^\infty(K)$ справедливо неравенство

$$\|[P, \varphi]v\|_{(0)}^2 \leq C_{N, K} \{ \|Pv\|_{(-1)}^2 + \|v\|_{(-N)}^2 \}.$$

Доказательство. Так как с некоторыми постоянными $C_\alpha [P, \varphi] = C_\alpha P^{(\alpha)} \varphi_\alpha$, то

$$\| [P, \varphi] v \|_{(0)}^2 \leq C \sum_{0 < |\alpha| \leq 2} \| P^{(\alpha)} \varphi_{(\alpha)} v \|_{(0)}^2.$$

Из условий леммы следует, что $\varphi_\alpha v \in C_0^\infty(\Omega \setminus K_0)$, а в $\Omega \setminus K_0$ оператор (1) эллиптивен. Поэтому, используя обычные эллиптические оценки, получим, что

$$\begin{aligned} \| [P, \varphi] v \|_{(0)}^2 &\leq C \sum_{0 < |\alpha| \leq 2} \| P \varphi_{(\alpha)} v \|_{(-|\alpha|)}^2 \leq \\ &\leq C \sum_{0 < |\alpha| \leq 2} \| P \varphi_{(\alpha)} v \|_{(-1)}^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\| P \varphi_{(\alpha)} v \|_{(-1)}^2 \leq C \| P v \|_{(-1)}^2 + C \| [P, \varphi_{(\alpha)}] v \|_{(-1)}^2.$$

Оценивая второе слагаемое в правой части этого неравенства точно так же, как выше мы оценивали $[P, \varphi] v \|_{(0)}^2$, получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{0 < |\alpha| \leq 2} \| P \varphi_{(\alpha)} v \|_{(-1)}^2 &\leq \\ &\leq C \| P v \|_{(-1)}^2 + C \sum_{\substack{0 < |\alpha| \leq 2 \\ 0 < |\beta| \leq 2}} \| [P, \varphi_{(\alpha+\beta)}] v \|_{(-2)}^2. \end{aligned}$$

Если проделать все это n раз, то придем к оценке

$$\sum_{0 < |\alpha| \leq 2} \| P \varphi_{(\alpha)} v \|_{(-1)}^2 \leq C \| P v \|_{(-1)}^2 + C \sum_{|\gamma| \leq 2n} \| [P, \varphi_{(\gamma)}] v \|_{(-n)}^2.$$

Операторы $[P, \varphi_{(\gamma)}]$ имеют первый порядок. Поэтому

$$\| [P, \varphi_{(\gamma)}] v \|_{(-n)}^2 \leq C_{K,n} \| v \|_{(1-n)}^2.$$

Фиксируем произвольное $N > 0$ и возьмем $n \geq N + 1$. Тогда получим окончательно

$$\| [P, \varphi] v \|_{(0)}^2 \leq C \sum_{0 < |\alpha| \leq 2} \| P \varphi_{(\alpha)} v \|_{(-1)}^2 \leq C \{ \| P v \|_{(-1)}^2 + \| v \|_{(-N)}^2 \}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Остается доказать неравенства (3) для $|\beta| = 2$. В этом случае

$$\begin{aligned} \| P_{(\beta)}(x, D) v \|_{(-2)}^2 &= \left\| - \sum_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (\varphi^2)_{(\beta)} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{(-2)}^2 = \\ &= \left\| - \sum_{k=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\varphi^2)_{(\beta)} v + \sum_{k=2}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (2\varphi \varphi_{(k)})_{(\beta)} v \right\|_{(-2)}^2 \leq \\ &\leq C \{ \| (\varphi^2)_{(\beta)} v \|_{(0)}^2 + \| v \|_{(-1)}^2 \}. \quad (11) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (11) сразу можно оценить нужным образом, используя (5). Для оценки первого слагаемого выберем, как и выше, функцию $\Psi_\mu(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\Psi_\mu(x) = 1$ в окрестности K_0 такую, чтобы было

$$C \|(\varphi^2)_{(\beta)} v\|_{(0)}^2 \leq \mu \|v\|_{(0)}^2 + C_\mu \|(1 - \Psi_\mu) v\|_{(0)}^2.$$

Это всегда можно сделать, так как $(\varphi^2)_{(\beta)} = 0$ на K_0 . Фиксируем $\mu = \frac{\varepsilon}{3C_K}$. Тогда из (5) получим

$$\mu \|v\|_{(0)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{3} \|Pv\|_{(0)}^2. \quad (12)$$

Для того чтобы оценить $\|(1 - \Psi_\mu) v\|_{(0)}^2$, используем эллиптические оценки. Получим тогда

$$\begin{aligned} (1 - \Psi_\mu) v\|_{(0)}^2 &\leq C \{ \|P(1 - \Psi_\mu) v\|_{(-2)}^2 + \|v\|_{(-N)}^2 \} \leq \\ &\leq C \|Pv\|_{(-2)}^2 + C \| [P, 1 - \Psi_\mu] v\|_{(-2)}^2 + C \|v\|_{(-N)}^2 \leq \\ &\leq C \|Pv\|_{(-2)}^2 + C \|v\|_{(-1)}^2 + C \|v\|_{(-N)}^2 \end{aligned}$$

Отсюда, применяя (5), легко получить, что

$$C_\mu \|(1 - \Psi_\mu) v\|_{(0)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{3} \|Pv\|_{(0)}^2 + C_\varepsilon \|v\|_{(-N)}^2. \quad (13)$$

Объединяя (11), (12) и (13), получаем

$$\|P_{(\beta)} v\|_{(-2)}^2 \leq \varepsilon \|Pv\|_{(0)}^2 + C_\varepsilon \|v\|_{(-N)}^2.$$

А это и есть нужная нам оценка. Таким образом глобальная гипоэллиптичность в Ω оператора (1) доказана.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю В. В. Грушину за постановку задачи, помощь и внимание.

Новочеркасский политехнический институт

Поступило
28.IX.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Х е р м а н д е р Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.
[2] Ф е д и й В. С., Об одном условии гипоэллиптичности, Матем. сб., 85 (127), № 1 (1971), 18—48.