М. О. Орынбасаров, О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 151–161

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.956.4

М. О. ОРЫНБАСАРОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ПОЛИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ С НЕГЛАДКИМИ БОКОВЫМИ ГРАНИЦАМИ

В настоящее время построена почти законченная теория краевых задач для параболических уравнений в областях с гладкой границей и им посвящена обширная научная литература [1—3]. Однако теория краевых задач для областей с нерегулярной границей (содержащей угловые или конические точки, ребра и т. д.) еще далека от завершения и существует множество нерешенных проблем. Особенно не разработана теория краевых задач для нецилиндрических областей с негладкими боковыми границами.

Вопросы существования обобщенных решений и гладкости решения краевых задач параболических и эллиптических уравнений для областей с негладкой границей в различных весовых функциональных пространствах исследованы в фундаментальных работах В. А. Кондратьева, В. Г. Мазья, О. А. Олейник, В. А. Солонникова и др. Их обзору посвящена работа [4].

В работах [5—10] методами потенциалов и сингулярных интегральных уравнений была доказана классическая разрешимость локальных и нелокальных краевых задач для параболических, полипараболических и ультрапараболических уравнений в негладких цилиндрических областях.

В настоящей работе аналогичными методами решается задача Дирихле для параболического уравнения с переменными коэффициентами и обобщенная задача Дирихле для полипараболического уравнения в клинообразной нецилиндрической области. Следует отметить, что теория параболических потенциалов для нецилиндрической области и ее применение к краевым задачам исследованы в работах Л. И. Камынина [11, 12], Е. А. Бадерко [13], М. Ф. Череповой [14].

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Рассмотрим следующее равномерно параболическое уравнение:

$$Lu \equiv u_t - L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \tag{1.1}$$

где

$$Lu \equiv \sum_{ij=1}^{2} a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x, t) u_{x_i} + a_0(x, t) u$$

в нецилиндрической области Ω_T, ограниченной поверхностями $S^{(1)}: x_2 = \gamma_1(x_1, t)$ и $S^{(2)}: x_2 = \gamma_2(x_1, t)$, которые пересекаются по некоторой линии l, и плоскостями $t=0$ и $t=T$. Точка $x=(x_1, x_2) \in R^2$, $x^{(i)} = (x_1, \gamma_i(x_1, t)) \in S^{(i)}$, $i=1, 2$. В дальнейшем для простоты предположим, что l — прямая, совпадающая с осью t, а $\forall (x_1, t) \in R_{+T} \equiv \{0 \leqslant x_1 < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T\}$

$\gamma_1(x_1, t) > \gamma_2(x_1, t)$. Тогда область $\Omega_T \equiv \{(x, t): 0 < x_1 < \infty,\ \gamma_2(x_1, t) < x_2 < \gamma_1(x_1, t);\ 0 < t < T\}$ и

$$\gamma_1(0, t) = \gamma_2(0, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

Всюду предполагаем, что коэффициенты оператора L_0 определены в Ω_T, матрица $A(x, t) = (a_{ij}(x, t))$ симметрическая и выполнены условия

а) $$\lambda_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{ij=1}^{2} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2|\xi|^2 \quad \forall |\xi| \neq 0, \tag{1.3}$$

где постоянные $\lambda_1, \lambda_2 > 0$;

б) коэффициенты

$$a_{ij}(x, t) \in C_{x, t}^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T),\ a_i(x, t) \in C_{x, t}^{\alpha, 0}(\Omega_T) \quad (i = 0, 1, 2) \tag{1.4}$$

и ограничены.

Поверхности $S^{(i)}$ — типа Ляпунова (см. [11]), т. е.

$$\gamma_i(x_1, t) \in C_{x_1, t}^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\bar{R}_{+T}),$$

где $C_{x, t}^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}$ — класс Гёльдера [1], $0 < \alpha \leqslant 1$.

Для поверхности $S^{(i)}$ сечение $S_\tau^{(i)} = S^{(i)} \cap \{t = \tau\}$ есть кривая типа Ляпунова [11], поэтому существует определенная внутренняя нормаль $N_i(x, \tau)$ к сечению $S_\tau^{(i)}$, лежащая в плоскости $t = \tau$, и если $(N_i(x^{(i)}, \tau) \hat{,} N_i(\xi^{(i)}, \tau))$ — угол между нормалями в точках $(x^{(i)}, \tau)$, $(\xi^{(i)}, \tau) \in S^{(i)}$, то

$$|(N_i(x^{(i)}, \tau) \hat{,} N_i(\xi^{(i)}, \tau))| \leqslant M|x^{(i)} - \xi^{(i)}|^\alpha, \tag{1.6}$$

где $|x - \xi|^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$, M постоянная. Кроме того, для любых $(x^{(i)}, t_1)$ и $(\xi^{(i)}, t_2) \in S_\alpha^{(i)}(x, t)$ имеет место неравенство

$$|(N_i(x^{(i)}, t_1), N_i(\xi^{(i)}, t_2))| \leqslant M[|x^{(i)} - \xi^{(i)}|^\alpha + |t_2 - t_1|^{\alpha/2}], \tag{1.7}$$

где $\overset{(i)}{S_\alpha}(x, t)$ — часть поверхности $S^{(i)}$, лежащая внутри сферы с центром $(x, t) \in S^{(i)}$ и радиусом d. Через M, δ везде обозначим положительные постоянные без уточнения конкретного вида.

Задача Дирихле. Требуется найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1.1) в области Ω_T, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \tag{1.8}$$

и краевым условиям

$$u(x, t)|_{S^{(i)}} = \varphi_i(x^{(i)}, t). \tag{1.9}$$

Заданные функции

$$f(x) \in C(\bar{\Omega}_0),\ \varphi_i(x^{(i)}, t) \in C(S^{(i)}) \tag{1.10}$$

и ограничены.

Кроме того, для непрерывности решения краевой задачи в замкнутой области $\bar{\Omega}_T$ необходимо выполнение условия согласования

$$f(x_1, \gamma_i(x_1, 0)) = \varphi_i(x_1, \gamma_i(x_1, 0), 0),\ \varphi_1(0, t) = \varphi_2(0, t). \tag{1.11}$$

Обобщенная задача Дирихле. Требуется найти регулярное решение $u(t, x)$ полипараболического уравнения

$$L^p u(x, t) = F(x, t) \tag{1.12}$$

в области Ω_T, удовлетворяющее начальным условиям

$$L^k u|_{t=0} = f_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{1.13}$$

и краевым условиям

$$L^k u|_{S^{(i)}} = \psi_{ik}(x^{(i)}, t),\ i = 1, 2, \tag{1.14}$$

где $L^k \equiv L(L^{k-1})$, L^0 — единичный оператор, p целое. Заданные функции

$$F(x, t) \in C_{x, t}^{\alpha, 0}(\bar{\Omega}_T),\ f_k(x) \in C(\bar{\Omega}_0),\ \psi_{ik}(x^{(i)}, t) \in C(S^{(i)}) \tag{1.15}$$

и ограничены. Кроме того, выполнены следующие условия согласования:

$$f_k(x_1, \gamma_i(x_1, 0)) = \psi_{ik}(x_1, \gamma_i(x_1, 0), 0),\ \psi_{1k}(0, t) = \psi_{2k}(0, t). \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что при выполнении условий (1.3), (1.4) параболическое уравнение (1.1) имеет фундаментальное решение в нецилиндрической области, представимое в виде

$$G(x, t; \xi, \tau) = G_0^{(\xi, \tau)}(x-\xi, t-\tau) + \int_\tau^t d\lambda \int_{\Omega_T(\lambda)} G_0^{(\eta, \lambda)}(x-\eta, t-\lambda) \times$$
$$\times \Phi(\eta, \lambda; \xi, \tau) d\eta = G_0^{(\xi, \tau)}(x-\xi, t-\tau) + G_1(x, t; \xi, \tau),$$

где $\Omega_T(\lambda)$ — сечение области Ω_T плоскостью $t=\lambda$. Неизвестная функция $\Phi(x, t; \xi, \tau)$ находится из условия, чтобы $G(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяла по (x, t) уравнению (1.1):

$$G_0^{(\xi, \tau)}(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)\sqrt{\det A(\xi, \tau)}} \exp\left\{-\frac{R^{(\xi, \tau)}(x-\xi)}{4(t-\tau)}\right\},$$

$R^{(\xi, \tau)}(x-\xi) = \sum\limits_{ij=1}^{2} \bar{a}_{ij}(\xi, \tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)$, $\bar{a}_{ij}(\xi, \tau)$ — элементы матрицы $A^{-1}(\xi, \tau)$, обратной матрице $A(\xi, \tau)$, а $G_1(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяет неравенству (см. [1, с. 462, неравенство (16.4)])

$$|D_t^r D_x^s D_\xi G_1| \leqslant M(t-\tau)^{-(2+2r+s)/2} \exp\{-\delta|x-\xi|^2/(t-\tau)\} \quad (2r+s \leqslant 2). \tag{1.17}$$

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

1. Сведение краевой задачи (1.1), (1.8), (1.9) к системе интегральных уравнений. Решение краевой задачи (1.1), (1.8), (1.9) будем искать в виде суммы параболических потенциалов

$$u(x, t) = \int_{\Omega_0} f(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi +$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{2} \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^{(j)}} \sigma_j(\xi^{(i)}, \tau) \frac{\partial G(x, t; \xi^{(j)}, \tau)}{\partial \nu_j(\xi^{(j)}, \tau)} ds, \tag{2.1}$$

где $\sigma_j(x, t)$ — неизвестные непрерывные функции, $\nu_j(\xi, \tau)$ — конормаль к сечению $S_\tau^{(j)}$ в точке $(\xi, \tau) \in S_\tau^{(j)}$. Функция $u(x, t)$, определяемая равенством (2.1), как сумма объемных и поверхностных потенциалов удовлетворяет уравнению (1.1) и начальному условию (1.8). Неизвестные функции $\sigma_j(x^{(j)}, t)$ выберем так, чтобы выполнялись краевые условия (1.9). На основании свойства поверхностного потенциала двойного слоя для нецилиндрической поверхности [13] относительно неизвестных функций $\sigma_j(x^{(j)}, t)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\sigma_i(x^{(i)}, t) + \sum_{j=1}^{2} \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^{(j)}} \sigma_j(\xi^{(j)}, \tau) h_{ij}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau) ds = \Phi_i(x^{(i)}, t), \tag{2.2}$$

где

$$h_{ij}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau) = 2\frac{\partial G(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau)}{\partial \nu_j(\xi^{(j)}, \tau)},$$
$$\Phi_i(x^{(i)}, t) = \varphi_i(x^{(i)}, t) - \int_{\Omega_0} f(\xi) G(x^{(i)}, t; \xi, 0) d\xi \quad (i=1, 2).$$

Очевидно, что функции $\Phi_i(x^{(i)}, t) \in C(S^{(i)})$ и в силу условия согласования (1.11) $\Phi_i(x^{(i)}, 0) = 0$. После вычисления конормальной производной

$\dfrac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial \nu_j(\xi, \tau)}$ ядра h_{ij} можно представить в виде

$$h_{ij}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau) = h_{ij}^{(1)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau) + h_{ij}^{(2)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau), \tag{2.3}$$

где

$$h_{ij}^{(1)} = \frac{|x^{(i)} - \xi^{(j)}| \cos(\vec{r}_{ij}, N_j(\xi^{(j)}, \tau))}{4\pi(t-\tau)^2 \sqrt{\det A(\xi^j, \tau)}} \exp\left\{ -\frac{R^{(\xi^{(j)}, \tau)}(x-\xi)}{4(t-\tau)} \right\},$$

$\vec{r}_{ij}$ — вектор, соединяющий точки $x^{(i)}$ с точкой $\xi^{(j)}$, а ядра $h_{ij}^{(2)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau)$ удовлетворяют оценке

$$|h_{ij}^{(2)}| \leqslant M(t-\tau)^{-(3-\alpha)/2} \exp\{-\delta |x^{(i)} - \xi^{(j)}|^2 / (t-\tau)\}. \tag{2.4}$$

Ядра, удовлетворяющие неравенству (2.4), имеют интегрируемую особенность, поэтому их назовем слабосингулярными. Легко заметить, что в силу неравенств (1.6), (1.7) ядра $h_{ii}^{(1)}(x^{(i)}, t; \xi^{(i)}, \tau)$ (точки $(x^{(i)}, t)$, $(\xi^{(i)}, t) \in S^{(i)}$) также являются слабосингулярными, т. е. удовлетворяют оценке (2.4), а когда точки $(x, t) \in S^{(i)}$, $(\xi, \tau) \in S^{(j)}$ $(i \neq j)$, в силу наличия угла неравенства (1.6) и (1.7) не имеют места. Поэтому ядра $h_{ij}^{(1)}$ $(i \neq j)$ имеют существенную особенность.

Выделим главную часть сильносингулярного ядра $h_{ij}^{(1)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau)$. Исследование показывает, что главными частями $h_{ij}^{(1)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau)$ являются ядра

$$h_{ij}^{0}(x_1, t; \xi_1, \tau) = \frac{[k_i(t) - k_j(t)]x_1}{4\pi(t-\tau)^2 d(x^j, t)} \left(1 + \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_1}\right)^2\right)^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\{-R^{(x^j, t)}(x_1 - \xi_1, k_i(t)x_1 - k_j(t)\xi_1)/4(t-\tau)\},$$

где $k_i(t) = \dfrac{\partial \gamma_i(0, t)}{\partial x_1}$ — угловой коэффициент касательных, проведенных к сечению $S_t^{(i)}$ в точке $(0, t)$, $d(x^j, t) = \sqrt{\det A(x^j, t)}$. На самом деле имеет место

Теорема 1. *Разность* $h_{ij}^{(1)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau) - h_{ij}^{0}(x_1, t; \xi_1, \tau)$ *является слабосингулярным ядром.*

Доказательство теоремы 1 следует из следующих лемм.

Лемма 1. *Для любых точек* $(x^{(i)}, t) \in S^{(i)}$ *и* $(\xi^{(j)}, \tau) \in S^{(j)}$ $(i \neq j)$ *имеет место равенство*

$$|x^{(i)} - \xi^{(j)}| \cos(\vec{r}_{ij}, N_j(\xi^{(j)}, \tau)) = [k_j(t) - k_i(t)]x_1 \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_1}\right)^2} +$$
$$+ \varkappa_{ij}(x_1, t; \xi_1, \tau), \tag{2.5}$$

где

$$|\varkappa_{ij}(x_1, t; \xi_1, \tau)| \leqslant M[x_1^{1+\alpha} + |x_1 - \xi_1| x_1^{\alpha} + |x_1 - \xi_1|^{1+\alpha} + (t-\tau)^{(1+\alpha)/2}]. \tag{2.6}$$

Доказательство. Так как $\gamma_i(x_1, t) \in C_{x_1, t}^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}$ и $\gamma_i(0, t) = 0$, то по формуле Тейлора имеем

$$\gamma_i(x_1, t) = k_i(t)x_1 + [\gamma_i'(\theta x_1, t) - \gamma_i'(0, t)]x_1 = k_i(t)x_1 + \varkappa_i(x_1, t), \tag{2.7}$$

$$\gamma_i'(x_1, t) = k_i(t) + [\gamma_i'(x_1, t) - \gamma_i'(0, t)] = k_i(t) + \bar{\varkappa}_i(x_1, t), \tag{2.8}$$

где

$$|\varkappa_i(x_1, t)| \leqslant M x_1^{1+\alpha}, \quad |\bar{\varkappa}_i(x_1, t)| \leqslant M x_1^{\alpha}. \tag{2.9}$$

В силу равенства $ds^{(i)}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial\xi_1}\right)^2}\,d\xi_1$ и

$$|x^{(i)}-\xi^{(j)}|\cos(\vec{r}_{ij}, N_j)=(x_1-\xi_1)\cos(N_j,\xi_1)+(x_2-\xi_2)\cos(N_j,\xi_2)=$$
$$=(x_1-\xi_1)\frac{d\xi_2}{ds}-(x_2-\xi_2)\frac{d\xi_1}{ds}=[(x_1-\xi_1)\gamma_j'(\xi_1,\tau)-$$
$$-(\gamma_i(x_1,t)-\gamma_j(\xi_1,\tau))]\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial\xi_1}\right)^2},$$

используя равенства (2.7), (2.8), найдем

$$|x^{(i)}-\xi^{(j)}|\cos(\vec{r}_{ij}, N_j)=[k_j(\tau)(x_1-\xi_1)+$$
$$+\varkappa_j(\xi_1,\tau)(x_1-\xi_1)]\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial\xi_1}\right)^2}-\{[k_i(t)x_1-k_j(\tau)\xi_1]+$$
$$+\varkappa_i(x_1,t)+\varkappa_j(\xi_1,\tau)\}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial\xi_1}\right)^2}=[k_j(t)-$$
$$-k_i(t)]x_1\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial\xi_1}\right)^2}+\varkappa_{ij}(x_1,t;\xi_1,\tau).$$

Отсюда в силу неравенства (2.9) и легко проверяемого неравенства

$$|x_1^\alpha-\xi_1^\alpha|\leqslant|x_1-\xi_1|^\alpha \tag{2.10}$$

нетрудно получить оценки (2.6).

Лемма 2. *Для любых* $(x^{(i)},t)\in S^{(i)}$, $(\xi^{(j)},\tau)\in S^{(j)}$ *справедливо равенство*

$$R^{(\xi,\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})=\bar{a}_{11}(x^j,t)(x_1-\xi_1)^2+2\bar{a}_{12}(x^j,t)(x_1-\xi_1)(k_j(t)x_1-$$
$$-k_i(t)\xi_1)+\bar{a}_{22}(x^{(j)},t)[k_j(t)x_1-k_i(t)\xi_1]^2+R_{ij}(x_1,t;\xi_1,\tau), \tag{2.11}$$

где

$$|R_{ij}|\leqslant M[(x_1-\xi_1)^2(t-\tau)^{(1+\alpha)/2}+(x_1-\xi_1)^{2+\alpha}+x_1^\alpha(x_1-\xi_1)^2+$$
$$+x_1(x_1-\xi_1)^{1+\alpha}+x_1^{1+\alpha}(x_1-\xi_1)]. \tag{2.12}$$

Доказательство. Представим $R^{(\xi^{(j)},\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})$ в виде

$$R^{(\xi^{(j)},\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})=R^{(x^{(j)},t)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})+[R^{(\xi^{(j)},\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})-$$
$$-R^{(x^{(j)},t)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})].$$

Так как коэффициенты $\bar{a}_{ij}(x,t)\in C_{x,t}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Omega_T)$, то

$$|R^{(\xi^{(j)},\tau)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})-R^{(x^{(j)},t)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})|\leqslant M[|x^{(i)}-\xi^{(j)}|^3+$$
$$+|x^{(i)}-\xi^{(j)}|^2(t-\tau)^{(1+\alpha)/2}]. \tag{2.13}$$

Далее, используя равенство (2.7), $R^{(x^{(j)},t)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})$ преобразуем следующим образом:

$$R^{(x^{(j)},t)}(x^{(i)}-\xi^{(j)})=\bar{a}_{11}(x^{(j)},t)(x_1-\xi_1)^2+2\bar{a}_{12}(x^{(j)},t)(x_1-\xi_1)(k_j(t)x_1-$$
$$-k_i(t)\xi_1)+\bar{a}_{22}(x^{(j)},t)(k_j(t)x_1-k_i(t)\xi_1)^2+2\bar{a}_{12}(x^j,t)(x_1-\xi_1)\times$$
$$\times(\varkappa_i(x_1,t)-\varkappa_j(\xi_1,\tau))+\bar{a}_{22}(x^{(j)},t)[2(k_j(t)x_1-k_i(t)\xi_1)(\varkappa_i(x_1,t)-$$
$$-\varkappa_j(\xi_1,\tau))](\varkappa_i(x_1,t)-\varkappa_j(\xi_1,\tau))=\bar{a}_{11}(x^{(j)},t)(x_1-\xi_1)^2+$$
$$+2\bar{a}_{12}(x^{(j)},t)(x_1-\xi_1)(k_j(t)x_1-k_i(t)\xi_1)+\bar{a}_{22}(x^{(j)},t)\times$$
$$\times(k_j(t)x_1-k_i(t)\xi_1)^2+R_0(x_1,t;\xi_1,\tau).$$

В силу неравенств (2.9), (2.10) и $\xi_1^{1+\alpha}=|(\xi_1-x_1)\xi_1^\alpha+x_1\xi_1^\alpha|\leqslant|\xi_1-x_1|(x_1^\alpha+|x_1-\xi_1|^\alpha)+x_1(x_1^\alpha+|x_1-\xi_1|^\alpha)\leqslant|x_1-\xi_1|^{1+\alpha}+x_1^\alpha|x_1-\xi_1|+$

$+x_1|x_1-\xi_1|^\alpha+x_1^{1+\alpha}$ имеем

$$|R_0|\leqslant M[|x_1-\xi_1|^{2+\alpha}+x_1^\alpha|x_1-\xi_1|^2+x_1|x_1-\xi_1|^{1+\alpha}+x_1^{1+\alpha}|x_1-\xi_1|]. \tag{2.14}$$

Из оценки (2.13) и (2.14) следует (2.12). С помощью равенства (2.5) и (2.11) разбивая разность $h_{ij}^{(1)}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau)-h_{ij}^0(x_1, t; \xi_1, \tau)$ на несколько слагаемых, оценивая каждое слагаемое и используя неравенства (2.6) и (2.12), нетрудно доказать теорему 1.

Вводя операторную запись, систему интегральных уравнений (2.2) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\sigma_1(x^{(1)}, t)+H_{12}^0\sigma_2+H_{11}\sigma_1+(H_{12}-H_{12}^0)\sigma_2=\Phi_1(x^{(1)}, t),\\ \sigma_2(x^{(2)}, t)+H_{21}^0\sigma_1+(H_{21}-H_{21}^0)\sigma_1+H_{22}\sigma_2=\Phi_2(x^{(2)}, t),\end{gathered} \tag{2.15}$$

где H_{ij} — интегральные операторы с ядрами $h_{ij}(x^{(i)}, t; \xi^{(j)}, \tau)$, а H_{ij}^0 — интегральные операторы с ядрами $h_{ij}^0(x_1, t; \xi_1, \tau)$. Отметим, что интегральные операторы H_{ii} и $H_{ij}-H_{ij}^0$ слабосингулярные, т. е. их ядра удовлетворяют неравенству (2.4).

3. Решение характеристической системы интегральных уравнений. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:

$$\sigma_i(x^{(i)}, t)+H_{ij}^0\sigma_j=g_i(x^{(i)}, t) \quad (i, j=1, 2,\ i\neq j), \tag{2.16}$$

где $g_i(x^{(i)}, t)$ — непрерывные функции и $g_i(x^{(i)}, 0)=0$. Для решения системы (2.16) нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Для любых $(x^{(i)}, t)\in S^{(i)}$ справедливо неравенство*

$$|H_{ij}\sigma_j|\leqslant \sup_{S^{(j)}}|\sigma(x^{(j)}, t)|\ |\pi-\theta_{ij}(x^{(j)}, t)|/\pi, \tag{2.17}$$

где $\operatorname{tg}\theta_{ij}=(Q_{ij})^{-1}|k_j(t)-k_i(t)|d(x^{(j)}, t)$, $Q_{ij}=a_{22}(x^{(j)}, t)-a_{12}(x^{(j)}, t)\times$ $\times(k_j(t)+k_i(t))+a_{11}(x^{(j)}, t)k_i(t)k_j(t)$.

Доказательство. Преобразуем $H_{ij}^0\sigma_j$ к виду

$$H_{ij}^0\sigma_j=\int_0^t d\tau\int_0^\infty \frac{\sigma_j(\xi^{(j)}, \tau)[k_j(t)-k_i(t)]x_1}{4\pi(t-\tau)^2 d(x^{(j)}, t)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{R^{(x^{(j)}, t)}(x_1-\xi_1, k_j(t)x_1-k_i(t)\xi_1)}{4(t-\tau)}\right\}d\xi_1=$$

$$=\int_0^t \frac{[k_j(t)-k_i(t)]x_1}{4\pi(t-\tau)^2 d(x^{(j)}, t)}\exp\left\{-\frac{[k_j(t)-k_i(t)]^2x_1^2}{4(t-\tau)Q_j}\right\}d\tau\times$$

$$\times\int_0^\infty \sigma_j(\xi^{(j)}, \tau)\exp\left\{-\frac{\left(\xi_1\sqrt{Q_j(k_i(t))}-\dfrac{x_1Q_{ij}}{\sqrt{Q_j(k_i(t))}}\right)^2}{4(t-\tau)d^2(x^{(j)}, t)}\right\}d\xi_1,$$

где $Q_j(k_i(t))=a_{22}(x^{(j)}, t)-2a_{12}(x^{(j)}, t)k_i(t)+a_{11}(x^{(j)}, t)k_i^2(t)$. В силу условия (1.3) $Q_j(k_i(t))\geqslant\lambda_1(1+k_i^2(t))>0$. Теперь оценивая по модулю интегральный оператор $H_{ij}^0\sigma_j$ и производя следующие замены переменных:

$$\xi_1\sqrt{Q_j(k_i(t))}-x_1Q_{ij}/\sqrt{Q_j(k_i(t))}=2\sqrt{t-\tau}\,d(x^{(j)}, t)z, \tag{2.18}$$

$$|k_j(t)-k_i(t)|x_1/2\sqrt{t-\tau}\sqrt{Q_j(k_i(t))}=\nu, \tag{2.19}$$

получим

$$H_{ij}^0\sigma_j|\leqslant\frac{2}{\pi}\sup_{S^{(j)}}|\sigma(x^{(j)}, t)|\int_0^\infty\exp\{-\nu^2\}d\nu\int_{-\nu\operatorname{ctg}\theta_{ij}}^\infty\exp\{-z^2\}dz.$$

Отсюда, переходя к полярной системе координат, получим неравенства (2.17).

Лемма 4. *Если функция* $\sigma_j(x^{(j)}, t)\in C^{\alpha,\alpha/2}_{x,t}(S^{(j)})$ *и* $\sigma_j(x^{(j)}, 0)=0$, *то*

$$H^0_{ij}\sigma_j\in C^{\alpha,\alpha_0}_{x,t}(S^{(j)}) \text{ и } H^0_{ij}\sigma_j|_{t=0}=0,\ \alpha_0=(1+\alpha)\alpha/4. \tag{2.20}$$

В частности, если $\sigma_j(x^{(j)}, t)\in C(S^{(j)})$, *то*

$$H^0_{ij}\sigma_j\in C(S^{(j)}). \tag{2.21}$$

Доказательство. Продолжим функцию $\sigma_j(x^{(j)}, t)$ для $t<0$, полагая равной нулю, и сделаем замены переменных по формулам (2.18), (2.19). Тогда $H^0_{ij}\sigma_j$ преобразуется к виду

$$H^0_{ij}\sigma_j=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\{-\nu^2\}d\nu\int_{-\nu\operatorname{ctg}\theta_{ij}}^{\infty}\sigma_j\left[x_1\left(\frac{Q_{ij}}{Q_j(k_i(t))}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d(x^{(j)},t)}{Q_j(k_i(t))}(k_j(t)-k_i(t))\frac{z}{\nu}\right),\ t-\frac{[k_j(t)-k_i(t)]^2}{4Q_j(k_i(t))\nu^2}\right]\exp\{-z^2\}dz.$$

Отсюда, в силу условий (1.3)—(1.5) непосредственно оценивая разность, нетрудно получить (2.20) и (2.21). Теперь перейдем к решению системы (2.16). Норму оператора H^0_{ij} в классе ограниченных непрерывных функций $C(S^{(i)})$ определим по формуле $\|H^0_{ij}\|=\sup\limits_{\|\sigma\|=1}\|H^0_{ij}\sigma\|$. Из неравенства (2.17) следует, что оператор H^0_{ij} будет оператором сжатия, т. е. $\|H^0_{ij}\|<1$, если $\sup(|\pi-\theta_{ij}|/\pi)<1$. Это условие будет выполнено, если только

$$0<\varepsilon\leqslant|\theta_1(t)-\theta_2(t)|\leqslant 2\pi-\varepsilon<2\pi, \tag{2.22}$$

ε — малое положительное число. Геометрический смысл условия (2.22) означает, что в точке $(0, t)$ угол между поверхностями $x_2=\gamma_i(x_1, t)$ $(i=1, 2)$ не равен нулю. Условие (2.22) является условием разрешимости характеристической системы (2.16) методом последовательных приближений. Из принципа сжатых отображений следует, что при выполнении (2.22) система интегральных уравнений (2.16) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\sigma_1(x^{(1)}, t)&=B_1g_1-H^0_{12}B_2g_2,\\ \sigma_2(x^{(2)}, t)&=B_2g_2-H^0_{21}B_1g_1,\end{aligned} \tag{2.23}$$

где

$$B_1=E+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(H^0_{12}H^0_{21})^m,\quad B_2=E+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(H^0_{21}H^0_{12})^m, \tag{2.24}$$

E — единичный оператор. Причем в силу леммы 4 решения $\sigma_i(x^{(i)}, t)$, определяемые равенствами (2.23), являются непрерывными функциями. Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Если выполнены условия (1.3)—(1.5) и условие (2.22), а заданные функции* $g_i(x^{(i)}, t)\in C(S^{(i)})$ *и* $g_i(x^{(i)}, 0)=0$, *то характеристическая система сингулярных интегральных уравнений (2.16) имеет единственное непрерывное решение, определяемое формулой (2.23).*

4. Решение основной системы интегральных уравнений (2.15). Систему интегральных уравнений решим методом регуляризации [5, 6]. Используя равенство (2.23), систему (2.15) можно заменить следующей эквивалентной системой интегральных уравнений:

$$\sigma_i(x^{(i)}, t)+\sum_{j=1}^{2}B_{ij}\sigma_j=\tilde{\Phi}_i(x^{(i)}, t), \tag{2.25}$$

где

$$B_{11}=B_1H_{11}-H^0_{12}B_2(H_{21}-H^0_{21}),\ B_{12}=B_1(H_{12}-H^0_{12})-H^0_{12}B_2H_{22},$$
$$B_{21}=B_2(H_{21}-H^0_{21})-H_{21}B_1H_{11},\ B_{22}=B_2H_{22}-H^0_{21}B_1(H_{12}-H^0_{12}),$$
$$\tilde{\Phi}_1(x^{(1)},t)=B_1\Phi_1-H^0_{12}B_2\Phi_2,\quad \tilde{\Phi}_2(x^{(2)},t)=B_2\Phi_2-H_{21}B_1\Phi_1. \qquad (2.26)$$

Так как $q=\|H^0_{ij}\|<1$, то легко видеть, что операторы B_i, определяемые равенствами (2.24), удовлетворяют неравенству $|B_ig|\leqslant\sup\limits_{S^{(i)}}|g(x^{(i)},t)|/(1-q^2)$, т. е. при выполнении условия (2.22) являются ограниченными операторами.

Поэтому в силу леммы 4 функции $\tilde{\Phi}_i(x^{(i)},t)$, определяемые формулой (2.26), ограничены, непрерывны и $\tilde{\Phi}_i(x^{(i)},0)=0$. Операторы B_{ij} являются композициями ограниченных интегральных операторов и слабосингулярных интегральных операторов, ядра которых удовлетворяют неравенству (2.4), тогда операторы B_{ij} также являются слабосингулярными. Таким образом, полученная система сингулярных интегральных уравнений (2.25) со слабой особенностью и ее решение можно найти методом последовательных приближений. Причем очевидно, что при выполнении условий, налагаемых на данные краевой задачи (1.1), (1.8)—(1.10), найденные решения системы (2.25) являются непрерывными функциями.

В результате получена следующая

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям (1.3), (1.4), заданные функции — условиям (1.10), (1.11), а нецилиндрические поверхности — условию (1.5) и выполнено условие (2.22), тогда краевая задача (1.1), (1.8), (1.9) имеет решение, которое представимо в виде (2.1), где неизвестные функции* $\sigma_i(x^{(i)},t)$ *определяются из системы интегральных уравнений (2.25).*

§ 3. РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

1. Построение потенциалов и их основные свойства. Нетрудно убедиться, что линейно независимыми решениями однородного полипараболического уравнения $L^pu=0$ являются следующие функции:

$$G_m(x,t;\xi,\tau)=\frac{(t-\tau)^m}{m!}G(x,t;\xi,\tau),\quad m=\overline{0,p-1}, \qquad (3.1)$$

где $G(x,t;\xi,\tau)$ — фундаментальное решение уравнения (1.1). При помощи системы функций $G_m(x,t;\xi,\tau)$ построим следующие потенциалы для нецилиндрической области Ω_T с боковой границей $S\in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}_{x,t}$:

$$V_m(x,t)=\int\limits_{\Omega_0}f(\xi)G_m(x,t;\xi,0)d\xi,$$
$$U_m(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega_T(\tau)}F(\xi,\tau)G_m(x,t;\xi,\tau)d\xi, \qquad (3.2)$$
$$\omega_m(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau}\mu(\xi,\tau)G_m(x,t;\xi,\tau)ds_\xi,$$
$$W_m(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau}\sigma(\xi,\tau)\frac{\partial G_m(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(\xi,\tau)}ds_\xi,$$

где $\nu(\xi,\tau)$ — конормаль к сечению S_τ в точке $(\xi,\tau)\in S_\tau$. Методом математической индукции легко доказать следующую лемму.

Л е м м а 5. *Для любого целого положительного числа k справедливо равенство*

$$L^k G_m(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} 0, \text{ если } k > M, \\ G_{m-k}, \text{ если } k \leqslant m. \end{cases}$$

Используя лемму 5 и основные свойства потенциалов для параболического уравнения, нетрудно доказать относительно потенциалов (3.2) следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. *Если функция $f(x) \in C(\Omega_0)$ и ограничена, то функции $V_m(x, t)$ удовлетворяют уравнению $L^p u = 0$ в Ω_T и для любого $(x, t) \in \Omega_T$ имеет место равенство*

$$\lim_{t \to 0} L^k V_m(x, t) = \begin{cases} 0, & k \pm m, \\ f(x), & k = m. \end{cases}$$

Т е о р е м а 6. *Если $F(x, t) \in C^{\alpha, 0}_{x, t}(\bar{\Omega}_T)$ и ограничена, то $\forall (x, t) \in \in \Omega_T$ справедливо равенство*

$$L^k U_m(x, t) = \begin{cases} U_{m-k}(x, t), \text{ если } k \leqslant m, \\ F(x, t), \text{ если } k = m + 1, \end{cases}$$

и $\lim\limits_{t \to 0} L^k U_m(x, t) = 0$ *при* $k \leqslant m$.

Т е о р е м а 7. *Если функция $\sigma(x, t)$ ограничена и интегрируема на S, то $\forall (x, t) \bar{\in} S$ функции $W_m(x, t)$ удовлетворяют уравнению $L^p u = 0$ и $L^k W_m$ при $k < m$ являются непрерывными функциями в $\bar{\Omega}_T$, если $\sigma(x, t) \in \in C(S)$, то $L^m W_m$ являются разрывными функциями на S, причем*

$$\lim_{x \to x^0 \in S_t} L^k W_m(x, t) = \left| \begin{matrix} 0, \quad k > m, \\ \pm 2^{-1} \sigma(x^0, t) + W_0(x^0, t), \; k = m, \\ W_{m-k}(x^0, t), \; k < m. \end{matrix} \right. \qquad (3.3)$$

Т е о р е м а 8. *Если функция $\mu(x, t)$ ограничена и интегрируема на S, то $\forall (x, t) \bar{\in} S$ функции $\omega_m(x, x)$ удовлетворяют уравнению $L^p u = 0$ и $L^k \omega_m$ при $k \leqslant m$ являются непрерывными функциями в $\bar{\Omega}_T$. А если $\mu(x, t) \in C(S)$ и ограничена, то $\dfrac{\partial}{\partial \nu(x, t)} L^m \omega_m(x, t)$ являются разрывными функциями на S, причем*

$$\lim_{x \to x^0 \in S_t} \frac{\partial}{\partial \nu(x, t)} L^k \omega_m(x, t) = \begin{cases} 0, \quad k > m, \\ \mp \dfrac{1}{2} \mu(x^0, t) + \dfrac{\partial \omega_0(x^0, t)}{\partial \nu(x^0, t)}, \; k = m, \\ \dfrac{\partial \omega_{m-k}(x^0, t)}{\partial \nu(x^0, t)}, \; k < m. \end{cases}$$

Используя выше приведенные свойства объемных и поверхностных потенциалов для полипараболического уравнения, можно показать классическую разрешимость различных локальных и нелокальных краевых задач для областей с гладкой и негладкой границей.

2. Решение обобщенной задачи Дирихле. Решение краевой задачи (1.11)—(1.13) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{p-1} \int_{\Omega_0} f_m(\xi) G_m(x, t; \xi, 0) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\Omega_T(\tau)} F(\xi, \tau) G_{p-1}(x, t; \xi, \tau) d\xi +$$

$$+ \sum_{m=0}^{p-1} \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^{(1)}} \sigma_m^{(1)}(\xi^{(1)}, \tau) \frac{\partial}{\partial \nu(\xi^{(1)}, \tau)} G_m(x, t; \xi^{(1)}, \tau) ds +$$

$$+\sum_{m=0}^{p-1}\int_0^t d\tau\int_{S_\tau^{(2)}}\sigma_m^{(2)}(\xi^{(2)},\tau)\frac{\partial}{\partial\nu(\xi^{(2)},\tau)}G_m(x,t;\xi^{(2)},\tau)\,ds, \tag{3.4}$$

где $\sigma_m^{(i)}(x^{(i)},t)$ — неизвестные непрерывные функции. Нетрудно убедиться, что в силу выше приведенных свойств потенциалов функция $u(x,t)$, определяемая равенством (3.4), удовлетворяет уравнению (1.11) и начальным условиям (1.12). Неизвестные функции $\sigma_m^{(i)}(x^{(i)},t)$ выберем так, чтобы $u(x,t)$ удовлетворяла краевым условиям (1.13). В силу равенства (3.3) относительно неизвестных функций $\sigma_m^{(i)}(x^{(i)},t)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2}\sigma_k^{(i)}(x^{(i)},t)+\sum_{m=k}^{p-1}\int_0^t d\tau\int_{S_\tau^{(j)}}\sum_{j=1}^{2}\sigma_m^{(j)}(\xi^{(j)},\tau)\frac{\partial G_{m-k}(x^{(i)},t;\xi^{(j)},\tau)}{\partial\nu(\xi^{(j)},\tau)}ds=$$

$$=\Psi_k^{(i)}(x^{(i)},t),\ i=0,1,\ k=\overline{0,p-1}, \tag{3.5}$$

где

$$\Psi_k^{(i)}(x^{(i)},t)=\psi_{ik}(x^{(i)},t)-\sum_{m=k}^{p-1}\int_{\Omega_0}f_m(\xi)\,G_{m-k}(x^{(i)},t;\xi,0)\,d\xi-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{\Omega_T(\tau)}F(\xi,\tau)\,G_{p-k-1}(x^{(i)},t;\xi,\tau)\,d\xi.$$

Очевидно, что функции $\Psi_k^{(i)}(x^{(i)},t)\in C(S^{(i)})$ и в силу условия согласования $\Psi_k^{(i)}(x^{(i)},0)=0$.

Система интегральных уравнений (3.5) имеет треугольный вид, т. е. при $k=p-1$ последняя система из двух уравнений содержит только две неизвестные функции $\sigma_{p-1}^{(i)}(x^{(i)},t)$ $(i=1,2)$, а при $k=p-2$ система из двух уравнений содержит четыре неизвестные функции $\sigma_{p-1}^{(i)}(x^{(i)},t)$, $\sigma_{p-2}^{(i)}(x^{(i)},t)$ и т. д. Причем легко заметить, что последняя система из двух уравнений (3.5) совпадает с системой интегральных уравнений (2.2), рассмотренной в § 2. Существование непрерывных решений доказано. Подставляя найденные решения $\sigma_{p-1}^{(i)}(x^{(i)},t)$ последней системы в предыдущую систему из двух уравнений, получаем точно такую же систему уравнений относительно неизвестных $\sigma_{p-2}^{(i)}(x^{(i)},t)$ с непрерывными правыми частями. Далее, продолжая этот процесс, мы убеждаемся, что система сингулярных интегральных уравнений (3.5) при выполнении условия разрешимости (2.22) имеет единственное непрерывное решение. Тем самым доказана следующая

Теорема 9. *Если коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям (1.3), (1.4), заданные функции — условиям (1.15), (1.16), а нецилиндрические поверхности — условию (1.5) и если выполнено условие (2.22), то обобщенная краевая задача Дирихле (1.11)—(1.14) имеет решение, которое представимо в виде (3.4), где неизвестные функции* $\sigma_k^{(i)}$ *определяются из системы интегральных уравнений (3.5).*

Литература

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
3. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., 1964.

4. Кондратьев В. А., Олейник О. А. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 2 (230). С. 3—76.
5. Орынбасаров М. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1970. № 3. С. 52—58.
6. Орынбасаров М. // Тр. ИММ АН КазССР. 1971. Т. 2. С. 43—54.
7. Орынбасаров М. // Дифференц. уравнения и их приложения. 1980. С. 67—74.
8. Орынбасаров М., Грабарь А. И. // Исследования по теорет. функции и дифференц. уравнениям. Алма-Ата, 1985. С. 26—34.
9. Орынбасаров М. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1989. № 5. С. 19—24.
10. Орынбасаров М. // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1991. № 5. С. 40—47.
11. Камынин Л. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 2, № 2. С. 312—328; № 4. С. 711—726; № 8. С. 1473—1489.
12. Камынин Л. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 3. С. 477—490.
13. Бадерко Е. А. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 3—10; 1991. Т. 27, № 1. С. 17—22.
14. Черпанова М. Ф. Решение методом потенциала первой краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области. М., 1985. Деп. в ВИНИТИ 11.01.85, № 361—85 Деп.

Казахский государственный университет им. Аль-Фараби

Поступила в редакцию 29 апреля 1992 г.