УДК 517.944

Линейные пассивные системы дифференциальных уравнений в частных производных

Дрожжинов Ю. Н.

В математической физике пассивные операторы встречаются при модельном описании физических систем, для которых выполняется принцип причинности относительно некоторого конуса (так называемого «светового» конуса). При этом предполагается, что система способна лишь поглощать или рассеивать энергию, но не генерировать ее. Одномерные пассивные трансляционно-инвариантные системы в настоящее время достаточно подробно изучены. Результаты подытожены в двух монографиях А. Земаняна [1] и Е. Бельтрами и М. Волерса [2]. Теория многомерных трансляционно-инвариантных пассивных систем разработана В. С. Владимировым на основе теории положительно-вещественных матриц-функций и изложена в книге [3].

Работа состоит из трех частей. В первой части статьи вводятся не трансляционно-инвариантные гладкие системы, пассивные относительно некоторого конуса. Это достаточно общий класс операторов, изучение которого началось сравнительно недавно. Мы ограничиваемся классом систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, в котором выделяем подкласс систем, пассивных относительно некоторого конуса. Оказывается, это симметрические, гиперболические относительно этого конуса и неотрицательные по Фридрихсу системы (см. [4] и [5]). Для этих систем в третьей части статьи дается постановка обобщенной задачи Коши и доказывается при условии строгой невырожденности системы ее корректность. Доказательство использует локальную теорему К. Фридрихса о разрешимости классической задачи Коши для симметрических гиперболических систем в так называемых «линзеподобных» областях (см. [6]). Для систем, пассивных относительно некоторого конуса (и строго невырожденных), применением этой же теоремы доказывается корректность и классической задачи Коши с начальными данными на «пространственно» подобных относительно этого конуса поверхностях. Отметим, что в формулировке соответствующей теоремы не требуется ограниченности коэффициентов системы (см., например, [7, гл. XIV, § 7]).

Пассивные системы очень широко представлены в математической физике. Системы уравнений Максвелла, уравнения Дирака, системы уравнений акустики, вращающейся жидкости, линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики и другие являются пассивными относительно некоторых конусов. Многочисленные примеры пассивных систем приведены в работе В. С. Владимирова [3]. Там же можно найти и обширную библиографию.

1. Гладкие пассивные системы

Нам понадобятся следующие пространства основных и обобщенных функций:

$\mathcal{D}^N(\mathbf{R}^n)$ состоит из бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))$, $x\in\mathbf{R}^n$; $\varphi_j(x)\in\mathcal{D}$, $j=1, \dots, N$; $\mathcal{D}$ — пространство основных функций;

$\mathcal{E}^N(\mathbf{R}^n)$ состоит из вектор-функций $\varphi(x)$, $\varphi_j(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $j=1, \dots, N$, с топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными на компактах;

$\mathcal{D}'^N(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{E}'^N(\mathbf{R}^n)$ — пространства обобщенных функций (линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{D}^N(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{E}^N(\mathbf{R}^n)$ соответственно).

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$. Через $\mathcal{D}\,'_N$ обозначаем совокупность обобщенных функций из $\mathcal{D}'^N(\mathbf{R}^n)$, носители которых лежат в $\overline{\Omega}$.

Пусть Γ — острый, замкнутый, выпуклый, телесный конус в $\mathbf{R}^n$ с вершиной в нуле; $\Gamma^*=\{x\in\mathbf{R}^n\colon x\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n\geqslant 0,\ \xi\in\Gamma\}$ — конус, сопряженный конусу Γ. Через C обозначаем внутренность конуса Γ^* ($\operatorname{int}\Gamma^*=C$); $\mathcal{E}^N(\Gamma+)$ — совокупность вектор-функции $\varphi(x)\in\mathcal{E}^N(\mathbf{R}^n)$, носители которых ограничены со стороны конуса Γ. Другими словами, для каждого $\varphi(x)$ существует компакт $A_\varphi\subset\mathbf{R}^n$ такой, что $\operatorname{supp}\varphi_j(x)\subset A_\varphi+\Gamma$, $j=1, \dots, N$.

Пусть задан линейный непрерывный оператор $Z\colon \mathcal{E}'^N(\mathbf{R}^n)\to\mathcal{D}'^N(\mathbf{R}^n)$. Будем далее считать его гладким, т. е. он сужается до линейного и непрерывного оператора из $\mathcal{D}^N(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{E}^N(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим билинейную форму $(Z(\varphi), \psi)$, где $\varphi(x)$, $\psi(x)\in\mathcal{D}^N(\mathbf{R}^n)$. Она непрерывна по каждому аргументу в отдельности и по теореме о ядре может быть записана в виде

$$(Z(\varphi), \psi)=\sum_{i,j}(z_{ij}(x, y), \varphi_j(y)\psi_i(x))=\int\langle(Z(x, y), \varphi(y)), \psi(x)\rangle\,dx, \tag{1}$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^N$, $Z_{ij}(x, y)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$, $\sum_j(z_{ij}(x, y), \varphi_j(y))=(Z(x, y), \varphi(y))$. Матрица $Z(x, y)=(z_{ij}(x, y))$, $i, j=1, \dots, N$, называется ядром оператора Z.

О п р е д е л е н и е. Оператор Z будем называть **п а с с и в н ы м о т н о с и т е л ь н о к о н у с а** Γ, если для любого $x^0\in\mathbf{R}^n$ и любой $\varphi(x)\in\mathcal{D}^N(\mathbf{R}^n)$

$$\int\limits_{x^0-\Gamma}\langle(Z(x, y), \varphi(y)), \varphi(x)\rangle\,dx\geqslant 0. \tag{2}$$

М а т р и ц а $Z(x, y)$ называется в этом случае п а с с и в н о й, а сам оператор Z — п а с с и в н о й с и с т е м о й о т н о с и т е л ь н о к о н у с а Γ. Неравенство (2) энергетического типа; оно отражает способность физической системы, описываемой оператором Z, поглощать или перераспределять энергию, но не генерировать ее. При этом учитывается причинность относительно конуса Γ.

Пассивные системы обладают рядом интересных свойств. В случае трансляционно-инвариантных систем, $Z(x, y) \equiv Z(x-y)$, полное описание пассивных операторов и их свойств дано В. С. Владимировым в [3]. В этой статье мы ограничиваемся случаем ядер вида

$$Z(x, y) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x) \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x_\nu} + A_0(x)\,\delta(x-y), \tag{3}$$

где $A_k(x) = (a_{ij}^k(x))$ — $N \times N$-матрицы-функции, причем $a_{ij}^k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $i, j = 1, \ldots, N$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ядра вида (3) определяют системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Какие же из них пассивны относительно конуса Г?

2. Пассивные системы дифференциальных уравнений

Через A_k^T обозначаем матрицу, транспонированную к A_k,

$$\operatorname{div} A(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\nu(x), \qquad lA(x) = \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu A_\nu(x).$$

Теорема 1. *Для того чтобы оператор с ядром вида* (3) *был пассивным относительно конуса* Г, *необходимо и достаточно выполнения условий*:

1) $A_\nu(x)$, $\nu = 1, \ldots, n$,— *вещественные симметрические матрицы*;

2) *для любого вектора* $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \partial\Gamma^*$

$$lA(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^n; \tag{4}$$

3) $A_0(x) + A_0^T(x) - \operatorname{div} A(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Замечание. Так как Γ^* — выпуклый конус, то из 2) следует, что для любого $l \in \Gamma^*$ $lA(x) \geqslant 0$, причем, если существует хотя бы один вектор $l^0 \in \Gamma^*$ такой, что $l^0 A(x) > 0$, то для любого $l \in C$ $lA(x) > 0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A_\nu^s = \frac{1}{2}(A_\nu + A_\nu^T)$, $A_\nu^{as} = \frac{1}{2}(A_\nu - A_\nu^T)$ — симметрические и антисимметрические части матрицы A_ν. Тогда

$$\int\limits_{x^0-\Gamma} \langle (Z(x, y), \varphi(y)), \varphi(x) \rangle\, dx = \int\limits_{x^0-\Gamma} \left\langle \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_\nu} + A_0(x)\varphi(x), \varphi(x) \right\rangle dx =$$

$$= \int\limits_{x^0-\Gamma} \left\langle \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^s \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + A_0\varphi, \varphi \right\rangle dx + \int\limits_{x^0-\Gamma} \left\langle \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^{as} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}, \varphi \right\rangle dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\partial(x^0-\Gamma)} \langle (lA^s)\varphi, \varphi \rangle\, ds + \frac{1}{2} \int\limits_{x^0-\Gamma} \langle (A_0 + A_0^T - \operatorname{div} A^s)\varphi, \varphi \rangle\, dx +$$

$$+ \int\limits_{x^0-\Gamma} \left\langle \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^{as} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}, \varphi \right\rangle dx. \tag{5}$$

Мы воспользовались тождеством $\left\langle A_\nu^s \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\langle A_\nu^s\varphi, \varphi\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial A_\nu^s}{\partial x_\nu}\varphi, \varphi\right\rangle$ и формулой Гаусса — Остроградского. В соотношении (5) l — вектор единичной нормали к конусу $\partial(x^0-\Gamma)$, поэтому $l\in\partial\Gamma^*$. Если выполнены условия теоремы 1)—3), то из (5) вытекает (2). Достаточность доказана.

Необходимость вытекает из следующего утверждения.

Пусть $A^{as}=(A_1^{as}(x), \ldots, A_n^{as}(x))\neq 0$. *Тогда существуют* $\varphi\in\mathcal{D}^N(\mathbf{R}^n)$ *и точка* $\xi\in\mathbf{R}^n$ *такие, что*

$$\int_{\xi-\Gamma}\langle(\mathbf{Z}(x, y), \varphi(y)), \varphi(x)\rangle dx < 0. \tag{6}$$

Докажем утверждение. По условию должны существовать точка ξ и i_0, j_0, ν_0 такие, что $a_{i_0j_0}^{\nu_0as}(\xi)\neq 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $i_0=1$, $j_0=2$. Пусть $\alpha_{12}(\xi)=(\alpha_{12}^{1as}(\xi), \ldots, \alpha_{12}^{nas}(\xi))$. Вектор-функцию $\varphi(x)$ ищем в виде $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), 0, \ldots, 0)$. Рассмотрим матрицы $lA^s(x)$, $|l|=1$, $l\in\partial\Gamma^*$. Пусть $\mu_1(l, x)$ — ее максимальное собственное значение. Так как оно непрерывно зависит от l и x, то в некоторой окрестности Ω точки ξ имеем $\sup\mu_1(x, l)=\mu_1<\infty$ ($x\in\Omega$, $l\in\partial\Gamma^*$, $|l|=1$). Пусть $\mu_2(x)$ — максимальное собственное значение матрицы $A_0(x)+A_0^T(x)-\operatorname{div}A^s(x)$ и $\sup\mu_2(x)=\mu_2<\infty$ ($x\in\Omega$). Считая в оценке (5) $\operatorname{supp}\varphi\in\Omega$ и полагая $x^0=\xi$, имеем

$$\int_{\xi-\Gamma}\langle(Z(x, y), \varphi(y)), \varphi(x)\rangle dx \leqslant \mu_1\int_{\partial(\xi-\Gamma)}[\varphi_1^2+\varphi_2^2]ds + \mu_2\int_{\xi-\Gamma}[\varphi_1^2+\varphi_2^2]dx +$$

$$+\int_{\xi-\Gamma}\sum_{\nu=1}^n \alpha_{12}^\nu(x)\left(\varphi_1(x)\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_\nu} - \varphi_2(x)\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_\nu}\right)dx =$$

$$= \mu_1\int_{\partial(\xi-\Gamma)}\varphi_1^2(x)[1+\psi^2(x)]ds + \mu_2\int_{\xi-\Gamma}\varphi_1^2(x)\left[1+\psi^2(x)+\frac{1}{\mu_2}\alpha_{12}(x)\operatorname{grad}\psi(x)\right]dx, \tag{7}$$

где $\psi(x)=\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$. Не нарушая общности, в оценке (7) можно считать $\mu_1=\mu_2=\mu>0$. Так как конус Γ острый, то в точке ξ к конусу $\xi-\Gamma$ существует опорная плоскость $(\gamma, \xi-x)=0$, причем $\gamma\in-\Gamma$. Мы всегда можем «пошевелить» опорную плоскость, т. е. вектор γ так, чтобы $\alpha_{12}(\xi)\gamma\neq 0$. Считаем при этом, что $\alpha_{12}(\xi)\gamma>0$. В противном случае в оценке (7) меняем местами φ_1 и φ_2 (переобозначим индексы, и знак $\alpha_{12}(x)$ сменится на противоположный). В силу непрерывности $\alpha_{12}(x)$ мы можем считать, что $0<\alpha_0\leqslant\alpha_{12}(x)\gamma<\alpha_1$ при $x\in\Omega_1$, где Ω_1 — некоторая окрестность точки ξ.

Пусть ω_ε — кусок гиперплоскости $(\gamma, \xi-x)=\varepsilon$, лежащий в Ω_1. В качестве $\psi(x)$ мы возьмем решение следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\mu}\alpha_{12}(x)\operatorname{grad}\psi(x)+\psi^2(x) = -(B+1), \quad B>0,\\ \psi|_{x\in\omega_\varepsilon}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Ее решение существует, $\psi(x)\in C^{\infty}(\Omega_2)$, где Ω_2 — некоторая окрестность точки ξ. При фиксированном $B>0$ это возможно для достаточно малого ε. Пусть Γ_1 — компактный подконус конуса Γ (так что $\xi-\Gamma_1\Subset\xi-\Gamma$). Пусть $\rho(\xi, \partial\Omega_2)$ — расстояние от ξ до границы области Ω_2 и пусть $W=\{x\in\Omega_2\colon |\xi-x|<\frac{1}{2}\rho(\xi, \partial\Omega_2)\}\bigcap(\xi-\Gamma_1)$, а W^{δ} есть δ-окрестность множества W. Выбираем теперь $\varphi_1(x)=1$ при $x\in W$ и $\varphi_1(x)=0$ при $x\notin W^{\delta}$. Считаем δ настолько малой, что $W^{\delta}\subset\Omega_2$.

Продолжим оценку (7) при таких выбранных $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)==\psi(x)\varphi_1(x)$:

$$\int\limits_{\xi-\Gamma}\langle(Z(x, y), \varphi(y)), \varphi(x)\rangle\, dx\leqslant\mu\int\limits_{\partial(\xi-\Gamma)\bigcap W^{\delta}}[1+\psi^2(x)]\,ds+\mu\int\limits_{W}(-B)\,dx, \tag{9}$$

и так как при $\delta\to 0$ площадь $\partial(\xi-\Gamma)\bigcap W^{\delta}$ стремится к нулю, то при достаточно малом δ мы получим оценку (6). Утверждение доказано.

Из (2) и утверждения следует, что $A^{as}(x)\equiv 0$, а тогда из (5) вытекают утверждения 2) и 3) теоремы 1. Необходимость доказана.

Теорема 1 утверждает, что для того чтобы система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка была пассивной относительно конуса Γ, необходимо и достаточно, чтобы она была симметрической, гиперболической относительно конуса Γ и неотрицательной по К. Фридрихсу (см. [4] и [5]). Здесь требует пояснения понятие гиперболичности относительно конуса Γ, т. е. условие 2) теоремы. Прежде всего отметим, что если система пассивна относительно конуса Γ, то она пассивна относительно любого острого конуса $\Gamma_1\supset\Gamma$. Это легко вытекает из условия 2) теоремы. Фиксируем точку $x^0\in\mathbf{R}^n$. Рассмотрим систему

$$Z_{x^0}(u)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}A_{\nu}(x^0)\frac{\partial u}{\partial x_{\nu}}+A_0(x^0)u$$

с замороженными коэффициентами. Пусть ее характеристический конус будет Γ_{x^0}. Тогда для любого $l\in\Gamma^*_{x^0}$ имеем $lA(x^0)\geqslant 0$, следовательно, $\Gamma^*\subset\Gamma^*_{x^0}$ (выпуклая оболочка конуса Γ_{x^0} содержится в конусе Γ), и $\Gamma=\bigcup\limits_{x^0}\operatorname{ch}\Gamma_{x^0}$. Конус Γ, относительно которого пассивна система, есть объединение выпуклых оболочек характеристических конусов системы с замороженными в точке x^0 коэффициентами по всем точкам $x^0\in\mathbf{R}^n$. Выпуклая оболочка характеристического коноида, выходящего из x^0, лежит в конусе $x^0+\Gamma$. В соответствии с этим двойственным образом $\Gamma^*=\bigcap\limits_{x^0}\Gamma^*_{x^0}$.

Пусть дана симметрическая неотрицательная система $Z(u)$ с ядром (3). Как находить конус Γ, если он существует, относительно которого эта система пассивна? Полагая, что $A(x)\not\equiv 0$, фиксируем точку $x^0\in\mathbf{R}^n$ (заморозим коэффициенты системы). Решение неравенства $lA(x^0)\geqslant 0$, если оно существует, дает выпуклый замкнутый конус $\Gamma^*_{x^0}$ (или все пространство, если $A(x^0)\equiv 0$). Пусть $\bigcap\limits_{x^0}\Gamma^*_{x^0}=\Gamma^*\neq\varnothing$. Тогда Γ^* — выпуклый замкнутый конус. Предположим, что это телесный конус. Сопряженный к нему конус Γ и будет искомым конусом, относительно которого система пассивна (может случиться, что конус Γ не будет телесным). Практически иногда удобнее находить сам конус Γ_{x^0} по рецепту, данному В. С. Владимировым в [3, § 19.6], а затем уже и $\Gamma = \bigcup_{x^0} \Gamma_{x^0}$.

3. Обобщенная задача Коши

Гладкая $(n-1)$-мерная поверхность S без края называется *С-подобной*, если каждая прямая $x=x^0+tl$, $-\infty<t<+\infty$, для любого $l \in \operatorname{pr}\Gamma$ (т. е. $|l|=1$, $l\in\Gamma$) пересекает ее в единственной точке; C-подобную поверхность иногда называют пространственно подобной в случае, когда Γ есть световой конус. C-подобная поверхность разрезает $\mathbf{R}^n$ на две бесконечных области: S_+, лежащую от S в сторону конуса Γ, и S_-. Можно показать (см. [3, § 4]), что $\bar{S}_+=S+\Gamma$ и для любого $x^0 \in \bar{S}_+$ множество $\{(x^0-\Gamma)\cap S_+\}$ ограничено.

Определение. Обобщенной задачей Коши для пассивного относительно конуса Γ оператора Z с источником $f(x) \in \mathcal{D}'^N_{\bar{S}_+}$ назовем задачу о нахождении решения $u \in \mathcal{D}'^N_{\bar{S}_+}$ системы

$$Z(u) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x)\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + A_0(x)u = f(x). \tag{10}$$

Определение. Пассивная относительно конуса Γ система Z с ядром вида (3) называется *вполне невырожденной в точке* $x\in\mathbf{R}^n$, если существует вектор $l^0 \in C$ такой, что

$$l^0A(x) + A_0(x) + A_0^T(x) - \operatorname{div} A(x) \geq 0. \tag{11}$$

Если (11) выполнено для каждого x из области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, то Z называют вполне невырожденным в этой области Ω.

Определение. Пассивная относительно конуса Γ система Z с ядром вида (3) называется *строго невырожденной в точке* $x\in\mathbf{R}^n$, если существует вектор $l^0\in C$ такой, что

$$l^0A(x) > 0. \tag{12}$$

Ясно, что в этом случае (12) выполнено для всех $l\in C$, а потому строго невырожденная система является и вполне невырожденной.

Основная цель этого параграфа доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть дана строго невырожденная во всех точках* $x\in \mathbf{R}^n$ *система вида* (3), *пассивная относительно конуса* Γ; *тогда обобщенная задача Коши для системы* (10) *поставлена корректно, т. е. существует единственное решение системы* (10), *причем если* $f_k\to 0$ *при* $k\to\infty$ *в* $\mathcal{D}'^N_{\bar{S}_+}$, *то и решение* $u_k\to 0$ (*в том же смысле*).

Рассмотрим сначала оператор Z^*, сопряженный к (3). Его ядро имеет вид

$$Z^*(x, y) = -\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^T(x)\frac{\partial\delta(x-y)}{\partial x_\nu} + [A_0^T(x) - \operatorname{div} A^T(x)]\,\delta(x-y). \tag{13}$$

Если Z пассивен относительно конуса Γ, то согласно теореме 1 выполнены условия 1)—3), а потому для Z^* будут выполнены эти условия для конуса $-\Gamma$. Следовательно, оператор Z^* пассивен относительно конуса $-\Gamma$. Так как $\operatorname{supp} Z^*(\varphi)\subset\operatorname{supp}\varphi$, то $Z^*:\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)\to\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$.

Лемма 1. *Пусть Z — вполне невырожденный пассивный относительно конуса Γ оператор; тогда* $\operatorname{Ker} Z^*=\{0\}$.

Пусть $\varphi(x)\in\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$ и $\varphi(x)\not\equiv 0$; тогда существует x^0, в котором $\varphi(x^0)\neq 0$. Согласно (11) существует l^0, для которого $l^0A(x^0)+A_0(x^0)+A_0^T(x^0)-\operatorname{div}A(x^0)>0$. Пусть Γ_1 — конус, строго содержащий конус Γ и такой, что $l^0\in\partial\Gamma_1^*$, причем любой вектор $l\in\partial\Gamma_1^*$ принадлежит конусу C. Применяя (5) с данной точкой x^0 и конусом — Γ_1, имеем

$$\int\limits_{x^0+\Gamma_1}\langle(Z^*(x,y),\varphi(y)),\varphi(x)\rangle dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial(x^0+\Gamma_1)}\langle(mA)\varphi,\varphi\rangle ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x^0+\Gamma_1}\langle(A_0+A_0^T-\operatorname{div}A)\varphi,\varphi\rangle dx, \tag{14}$$

где m — единичная нормаль к конусу $\partial(x^0+\Gamma_1)$. Но тогда $-m\in-\partial\Gamma_1^*$, в частности, m пробегает и направление l^0, в котором либо $l^0A(x^0)>0$, либо существует собственный вектор $\tilde{\varphi}(x^0)$, для которого $\langle l^0A(x^0)\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\rangle=0$. В этом случае $\langle(A_0(x^0)+A_0^T(x^0)-\operatorname{div}A(x^0))\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}\rangle>0$. В любом случае, разлагая выше $\varphi(x^0)$ на сумму двух векторов $\lambda\tilde{\varphi}(x^0)$ с некоторым λ и $\tilde{\tilde{\varphi}}(x^0)$ — проекцию $\varphi(x^0)$ на ортогональное дополнение $\{\tilde{\varphi}\}$ и учитывая пассивность оператора Z, имеем либо $\langle l^0A(x^0)\varphi,\varphi\rangle>0$, либо $\langle(A_0(x^0)+A_0^T(x^0)-\operatorname{div}A(x^0))\varphi,\varphi\rangle>0$. В силу непрерывности это будет выполнено в первом из неравенств для некоторых окрестностей l^0 и x^0, во втором для некоторой окрестности точки x^0. Поэтому

$$\int\limits_{x^0+\Gamma_1}\langle(Z^*(x,y),\varphi(y)),\varphi(x)\rangle dx>0,$$

и если $Z^*(\varphi)\equiv 0$, то $\varphi\equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Z — строго невырожденный пассивный относительно конуса Γ оператор; тогда Z^* отображает $\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$ на все $\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$.*

Мы будем доказывать, что уравнение

$$Z^*(\varphi)\equiv-\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}+[A_0^T(x)-\operatorname{div}A(x)]\varphi=\psi(x) \tag{15}$$

для любого $\psi(x)\in\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$ имеет решение $\varphi(x)\in\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$. По условию существует компакт A_ψ такой, что $\operatorname{supp}\psi\subset A_\psi-\Gamma$. Найдется точка x^0 такая, что $A_\psi-\Gamma\subset x^0-\Gamma$, причем расстояние между $A_\psi-\Gamma$ и $\partial(x^0-\Gamma)$ можно сделать каким угодно большим. Поэтому существует область G с гладкой границей ∂G такая, что $A_\psi-\Gamma\subset G\subset x^0-\Gamma$, и если m — внешняя нормаль к ∂G, то $m\in C$ для любой точки поверхности ∂G.

Пусть теперь π_R — гиперплоскость $(\gamma, x-x^0)=R$, где $\gamma\in-C$. При достаточно большом R она отсечет от области G подобласть $G_R=G\cap$

$\cap\{x\colon (\gamma, x-x^0)<R\}$. Граница этой «линзеобразной» области состоит из двух гладких частей: куска ∂G, на котором $mA>0$, и куска гиперплоскости π_R, на котором $\gamma A<0$. Зададим теперь граничные условия $\varphi(x)=0$ при $x\in\partial G$. По основной теореме работы [6] (см. также [5]) существует и единственно решение уравнения (15), причем, так как $\psi\in C^\infty$, то и решение — бесконечно дифференцируемая функция в G_R и обращается в нуль на ∂G. Устремляя R к бесконечности и решая каждый раз соответствующую краевую задачу для (15), в силу единственности решения получим единую функцию $\varphi(x)$ в области G. Она будет решением уравнения (15), причем $\varphi\in C^\infty(G)$ и $\varphi(x)=0$ при $x\in\partial G$. Продолжая $\varphi\equiv 0$ вне G, мы получаем требуемое утверждение леммы 2.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Так как Z строго невырожден, то (пользуясь леммами 1 и 2) видим, что существует $(Z^*)^{-1}$, отображающий $\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$ на $\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$. По теореме Банаха об открытом отображении это линейный и непрерывный оператор. Решение обобщенной задачи Коши (10) зададим теперь формулой

$$(u, \psi)=(f, (Z^*)^{-1}\psi), \quad \psi\in\mathscr{D}^N(\mathbf{R}^n). \tag{16}$$

Проверим, что так заданная обобщенная функция удовлетворяет уравнению (10). Имеем

$$(Z(u), \psi)=(u, Z^*(\psi))=(f, (Z^*)^{-1}Z^*(\psi))=(f, \psi), \quad \psi\in\mathscr{D}^N(\mathbf{R}^n).$$

Если теперь $\operatorname{supp}\psi\subset S_-$, то $\operatorname{supp}(Z^*)^{-1}\psi\subset S_-$, ибо $(Z^*)^{-1}$ переводит $\mathscr{E}^N((-\Gamma)+)$ на себя. Для таких ψ имеем $(f, (Z^*)^{-1}\psi)=0$, ибо $\operatorname{supp} f\subset\bar S_+$, а потому $\operatorname{supp} u\subset\bar S_+$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $x^0\in S_+$. Рассмотрим окрестность этой точки $U_{x^0}\subset S_+$. Если $\operatorname{Supp}\psi\subset U_{x^0}$, то формула (16) показывает, что значение u в окрестности x^0 зависит от значений правой части f в области $\{U_{x^0}-\Gamma\}\cap\bar S_+$, ибо $\operatorname{supp}(Z^*)^{-1}\psi\subset\{U_{x^0}-\Gamma\}$, а это множество пересекается с $\bar S_+$ ограниченным образом. Другими словами, область зависимости точки x^0 (точнее, окрестности точки x^0) есть коническое ограниченное множество с основанием на ограниченной области поверхности S и вершиной — точкой x^0 (точнее, окрестностью точки x^0).

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 останется справедливой и в следующей формулировке.

Обобщенная задача Коши (10) *для системы с ядром вида* (3) *поставлена корректно, если выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1 *и условие строгой невырожденности* (12) *во всем* $\mathbf{R}^n$.

Т. е. в случае строгой невырожденности с одним и тем же конусом C для всех $x\in\mathbf{R}^n$ можно не налагать добавочных условий 3) на младшие члены, коэффициенты матрицы $A_0(x)$. Это замечание нетрудно усмотреть из приведенного доказательства теоремы 2, в частности, леммы 2, и соответствующих результатов работы [6].

З а м е ч а н и е 3. Пусть C-подобная поверхность S фиксирована. Оператор с ядром (3) пусть задан в $\bar S_+$. Условия (4) теоремы 1 выполнены для $x\in\bar S_+$, и пусть для каждого $x\in\bar S_+$ удовлетворяются условия

(12). Тогда обобщенная задача (10) поставлена корректно. Действительно, можно $A_\nu(x)$ и $A_0(x)$ продолжить бесконечно дифференцируемым образом в некоторую окрестность множества $\bar{S}_+$, скажем в $(\bar{S}_+)_1$, так, что (12) будет выполнено и там, а система с ядром (3) останется пассивной и в этой окрестности (т. е. условия 1)—3) теоремы 1 будут выполнены для $x \in (\bar{S}_+)_1$). Определим функцию $\eta(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, равную 1 при $x \in \bar{S}_+$ и нулю при $x \notin (\bar{S}_+)_1$. Решение обобщенной задачи Коши можно задать формулой

$$(u, \psi) = (f, \eta(x)(Z^*)^{-1}\psi), \qquad \psi \in \mathscr{D}^N(\mathbf{R}^n) \tag{17}$$

(коэффициенты оператора Z^* продолжены на все пространство таким образом, чтобы оператор Z^* оставался пассивным строго невырожденным во всем $\mathbf{R}^n$). Нетрудно видеть, что решение (17) не зависит от выбора $\eta(x)$ и от способа продолжения коэффициентов оператора Z^*.

Следующий пример показывает, что вполне невырожденности оператора Z, определенного только в $\bar{S}_+$, может не хватить, для того чтобы обобщенная задача Коши была поставлена корректно.

Рассмотрим уравнение ($n=1$, $N=1$)

$$t\frac{du(t)}{dt} + u = f(t), \tag{18}$$

конус $\Gamma = [0, +\infty)$, поверхность S здесь точка $t=0$, $\bar{S}_+ = [0, +\infty)$, $S_- = (-\infty, 0)$. Это уравнение при $f=0$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$ имеет, кроме нулевого, еще одно решение $u(t) = \delta(t) \in \mathscr{D}'_{\bar{S}_+}$, хотя оператор $t\frac{du}{dt} + u$ является вполне невырожденным, в $\bar{S}_+$ пассивным относительно конуса Γ; в S_- он, конечно же, не пассивен.

Рассмотрим систему ($n=2$, $N=2$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u = f, \tag{19}$$

где $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$. Это пассивная относительно конуса $\bar{R}_+^2 = \{(t, x) : t \geqslant 0, x \geqslant 0\}$ трансляционно-инвариантная система. Она невырождена (см. [3, § 19]), ибо детерминант матрицы преобразования Лапласа (19) равен 1, но не является вполне невырожденной. Тем не менее согласно [3, § 19] в $\mathscr{D}'^2(\mathbf{R}^2)$ существует единственное решение обобщенной задачи Коши (мы считаем заданной некоторую $\mathbf{R}_+^2$-подобную поверхность S и $\operatorname{supp} f \subset \bar{S}_+$), которое дается формулой

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f. \tag{20}$$

Отметим здесь тот факт, что гладкость решения пассивной системы, если, конечно, она не равна ∞, может быть меньше, чем гладкость правой части, как это показывает формула (20).

Остановимся теперь на классической задаче Коши для пассивных систем. Рассмотрим систему, пассивную относительно некоторого конуса

Γ, и пусть задана C-подобная поверхность S. Ее будем предполагать достаточно гладкой. Задача об отыскании бесконечно дифференцируемого в $\bar{S}_+$ решения $u(x)$ системы

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x)\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + A_0(x)u = f(x), \quad f \in C^\infty(\bar{S}_+), \tag{21}$$

с начальными данными

$$u|_{x \in S} = u_0(x), \quad u_0 \in C^\infty(S) \tag{22}$$

называется классической задачей Коши.

Теорема 3 (К. Фридрихс). *Если пассивная относительно конуса* Γ *система* (21) *строго невырождена в* $\mathbf{R}^n$, *то решение задачи Коши* (21)—(22) *существует, единственно и* $u(x) \in C^\infty(\bar{S}_+)$.

Доказательство. Пусть t_k — строго возрастающая последовательность чисел, $t_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, $x^0 \in S_+$, $l \in \operatorname{int}\Gamma$, $x^k = x^0 + lt_k$. Последовательность замкнутых множеств $W_k = (x^k - \Gamma) \cap \bar{S}_+$, вложенных друг в друга, обладает свойством $\bigcup_k W_k = \bar{S}_+$.

Для любого k можно найти область G_k со свойствами: а) $(x^k - \Gamma) \subset \subset G_k \subset (x^{k+1} - \Gamma)$; б) G_k имеет гладкую границу ∂G_k, причем внешняя нормаль $\nu(x)$ к ней лежит в конусе C, так что $\nu(x)A(x)' > 0$ на ∂G_k. Мы теперь имеем последовательность «линзеобразных» областей $E_k = G_k \cap S_+$, вложенных друг в друга и заполняющих все S_+. Граница E_k состоит из двух гладких кусков — компакта $\pi_k = \partial E_k \cap S$, на котором внешняя нормаль $\nu(x) \in -C$, (а следовательно, $\nu(x)A(x) < 0$), и куска ∂G_k, на котором внешняя нормаль $\nu \in C$ (а следовательно, в силу строгой невырожденности $\nu(x)A(x)' > 0$).

Рассмотрим теперь задачу Коши (21)—(22) на E_k, считая u_0 заданными на π_k. По теореме К. Фридрихса для «линзеобразных» областей (см. [6]) существует единственное бесконечно дифференцируемое решение в E_k (бесконечная дифференцируемость вплоть до π_k). В силу единственности все эти решения в разных E_k должны совпадать на совпадающих множествах, в которых они определены. Следовательно, мы имеем единое во всем S_+ решение $u(x)$, бесконечно дифференцируемое вплоть до S, т. е. $u(x) \in C^\infty(\bar{S}_+)$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Так же, как и в теореме 2, в случае строгой невырожденности от условия 3) теоремы 1, накладываемого на систему (21), можно отказаться.

Для сравнения приведем теорему о разрешимости классической задачи Коши, рассмотренную в работе Н. Данфорда и Д. Шварца [7].

Рассматриваются система с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и с выделенным временем x_1, $x = (x_1, \tilde{x})$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}$,

$$I\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{\nu=2}^{n} A_\nu(x)\frac{\partial u}{\partial x_\nu} + A_0(x)u = f, \quad f \in C^\infty, \tag{23}$$

и начальные условия

$$u(0, \tilde{x}) = u_0(\tilde{x}), \quad u_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1}). \tag{24}$$

Предполагается также, что матрицы $A_\nu(x)$, $\nu=2, \ldots, n$, симметричны и их коэффициенты равномерно ограничены. Тогда существует единственное бесконечно дифференцируемое решение задачи (23)—(24).

Нетрудно проверить, что при приведенных условиях система (23) пассивна относительно некоторого конуса, содержащего вектор $(1, 0, \ldots \ldots, 0)$, и строго невырождена. Поверхность $x_1=0$ для такого конуса будет C-подобной, а потому справедлива теорема 3. Требование равномерной ограниченности коэффициентов матриц A_ν по-существу здесь только для того, чтобы поверхность $x_1=0$ была C-подобной.

Рассмотрим пример системы с неограниченными коэффициентами, приведенной в [7],

$$I\frac{\partial u}{\partial x_1}+\begin{pmatrix} e^{-x_2} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}u=0. \tag{25}$$

Можно показать (см. [7, гл. XIV, § 7, замечание 2]), что задача Коши $u(0, x_2)=u_0(x_2)$ поставлена некорректно. Здесь конус характеристик касается начальной поверхности (в бесконечно удаленной точке). Другими словами, начальная поверхность не будет C-подобной. Пользуясь правилами, приведенными в конце пункта 2, можно проверить, что для системы (25) выполнены условия 1) и 2) теоремы 1 для конуса $\Gamma= =\{(x_1, x_2)\colon x_1\geqslant 0, x_1\geqslant -x_2\}$. Если еще сделать замену $u=\tilde{u}\exp(x_1)$, то относительно вектор-функций $\tilde{u}$ мы получим систему (отличающуюся от (25) матрицей A_0), пассивную относительно конуса Γ. Взяв за начальную поверхность любую C-подобную поверхность (например, $2x_1+x_2= =0$), получим, что как классическая, так и обобщенная задачи Коши поставлены корректно, хотя коэффициенты системы неограничены.

В заключение автор благодарит В. В. Жаринова и А. А. Дезина за ценные замечания и полезные обсуждения.

Литература

1. *Zemanian A.* Distribution theory and transform analysis. McGraw-Hill, 1965.
2. *Beltrami E., Wohlers M.* Distributions and the boundary values of analytic functions. N. Y.— London, 1966.
3. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
4. *Friedrichs K.* Symmetric Positiv Linear Differential Equations.— Comm. pure and Appl. Math., 1958, v. 11, p. 333—418.
5. *Lax P. and Phillips R.* Local Boundary Conditions for Dissipative Symmetric linear differential Operators.— Comm. pure and Appl. Math., 1960, v. 13, p. 427—455.
6. *Friedrichs K.* Symmetric Hyperbolic Linear differential Equations.— Comm. pure and Appl. Math., 1954, v. 7, p. 345—392.
7. *Данфорд Н. и Шварц Д.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.

Москва

Поступила в редакцию
22/I 1981