Л. А. Аксентьев, А. М. Елизаров, М. И. Киндер, Обратные краевые задачи для многосвязных областей на римановых поверхностях рода нуль. III, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1987, выпуск 23, 25–36

УДК 517.544

Аксентьев Л. А., Елизаров А. М., Киндер М. И.

ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ РОДА НУЛЬ, III

Данная статья является продолжением двух первых частей работы [1]. В ней дана оценка числа решений системы уравнений Гахова в p-симметричном случае, доказана разрешимость окз в многосвязной области при наличии точки ветвления порядка $(m-1)$ в ∞, причем рассмотрены также p-симметричные решения. Метод исследования состоит в изучении вращения векторного поля, связанного с задачей.

Возможность использования методов теории плоских векторных полей в окз следует из работы [2], в которой вопрос разрешимости внешней окз в односвязной области сведен к исследованию разрешимости уравнения, выражающего необходимое условие экстремума гладкой вещественной поверхности $\Phi=\Phi(b)$, $b=u+iv$, определенной исходными данными задачи. Это означает, что для доказательства разрешимости окз необходимо установить наличие нулевых векторов у векторного поля $\operatorname{grad}\Phi(b)$. В [2] доказано существование глобального максимума поверхности Φ и, следовательно, существование хотя бы одного нулевого вектора поля градиентов. Применение методов теории плоских векторных полей (см., например, [3]) позволяет не только доказать существование корней уравнения Ф. Д. Гахова, но и оценить снизу их число. Этот подход в применении к внешним окз в многосвязной области реализован в [4], а при исследовании новых классов окз в односвязной области — в статье [5]. В настоящей работе указанные методы использованы при изучении окз на римановых поверхностях.

Нумерация формул и теорем продолжает нумерацию из [1].

1°. Дадим оценку снизу числа решений уравнения

$$\partial\Phi/\partial b=0, \tag{31}$$

$$\Phi(b)=\left|e^{p\chi_1(b)}\Big/\left(b^{p(p-1)}\prod_{k,\,j=1}^{p}f(b_k,b_j)\right)\right|,\quad b_k=e^{2\pi ik/p}b.$$

Теорема 5. *Уравнение* (31) *имеет в* $(n+1)$-*связной* p-*симметричной области* D_w, *не содержащей* $w=0$, *не менее* $(n-1)/p+2$ *различных решений.*

Доказательство. В [1] доказано существование точки $b_*\in D_w$, в которой $\Phi(b)$ достигает своей точной верхней грани. В силу p-симметрии функции $\Phi(b)$ точек ее абсолютного максимума будет не менее p.

Зададим векторное поле градиентов $\operatorname{grad}\Phi(b) = (\partial\Phi/\partial u, \partial\Phi/\partial v)$, где $b = u + iv$. Нулевыми векторами этого поля будут решения (31). В силу граничного поведения $\Phi(b)$ вращение поля градиентов вдоль границы $(n+1)$-связной области D_w может быть найдено аналогично [4]:

$$\operatorname{ind}\operatorname{grad}\Phi = 1 - n.$$

По основной теореме теории плоских векторных полей (см., например, [3, с. 28]) алгебраическая сумма индексов особых точек α_k равна вращению векторного поля по границе области, т. е.

$$\sum_k \gamma(\alpha_k) = 1 - n. \tag{32}$$

Так как p точек абсолютного максимума функции $\Phi(b)$ являются в то же время особыми точками поля градиентов с индексами, равными $+1$, из равенства (32) выводим

$$p + \sum_{k=1}^{l} \gamma(\alpha_k) = 1 - n. \tag{33}$$

Оценим снизу число l остальных особых точек, предполагая его конечным (в противном случае будем иметь бесконечно много решений уравнения (31), и теорема 5 будет доказана). Для этого покажем, что индексы всех оставшихся точек α_k равны ± 1 или 0.

Исследуем вторую дифференциальную форму функции $\Phi(b)$: $\Delta = \Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2$. Известно (см., например, [3, с. 69—70]), что если одно из чисел Φ_{uu}, Φ_{vv} отлично от нуля в особой точке α_k, то индекс $\gamma(\alpha_k)$ равен $+1$, -1 или 0. Для этого достаточно потребовать, чтобы в каждой особой точке выполнялось соотношение $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} < 0$. Последнее неравенство следует из супергармоничности функции $\ln\Phi(b)$ [4].

Учитывая, что в силу p-симметричности области D_w и p-симметрии функции $\Phi(b)$ число l седловых точек будет кратно p, из (33) получим неравенство

$$p + p\sum_{k=1}^{s} \gamma(\alpha_k) \leqslant 1 - n$$

(здесь s — число особых точек с индексами -1), т. е. $s \geqslant (n-1)/p + 1$. Общее число решений уравнения (31) будет не меньше, чем $p + ps \geqslant n - 1 + 2p$. Так как наборы решений, получающиеся из какого-то одного поворотами на углы, кратные $2\pi/p$, мы отождествляем, то различных решений будет не менее, чем $(n-1)/p + 2$. Теорема доказана.

Отметим, что при $p = 1$ из теоремы 5 следует результат для уравнения Ф. Д. Гахова, полученный в [6].

2°. Исследуем разрешимость системы уравнений Гахова (14) в случае, когда $z(w) \in [N; m]$, $m > 1$, т. е. когда $z'(w)$ имеет единственный полюс порядка $m+1$ в неизвестной точке $b \in D_w$ и нули порядков n_l в фиксированных точках a_l, $l = \overline{1, N_0}$, причем $N = \sum_{l=1}^{N_0} n_l$. Класс областей D_z считается фиксированным, а необходимое условие разрешимости (2) — выполненным. При этом постоянные ξ_i в представлении функции $\chi_1(w)$ однозначно определены в (12).

Функция $z'(w)$ имеет представление

$$z'(w) = \varphi(w)\,[F(w, b)]^{-m-1}, \quad \varphi(w) = \exp \chi_1(w) \prod_{l=1}^{N_0} [F(w, a_l)]^{n_l},$$

где $F(w, b) = (w - b) f(w, b)$. Пусть $p(w, b) = 1/f(w, b)$. Система (14) содержит единственное уравнение $\operatorname{выч}_{w=b} z'(w) = 0$, эквивалентное уравнению

$$Q(b) = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} \varphi^{(\nu)}(b) \frac{\partial^{m-\nu}}{\partial w^{m-\nu}} p^{m+1}(w, b) \Bigg|_{w=b} = 0. \tag{34}$$

Теорема 6. *Пусть* $n_l \geqslant m$ *для всех* $l = \overline{1, N_0}$, *причем* $N_0 \neq 0$ *в случае* $n = 1$ *и* $N_0 \neq 1$ *в случае* $n = 0$. *Тогда уравнение* (34) *разрешимо.*

Доказательство. В случае односвязной области ($n = 0$) теорема 6 схематично доказана Ф. Г. Авхадиевым [5] (следует, правда, учесть, что случай $N_0 = 1$ при наших обозначениях в формулировке теоремы Ф. Г. Авхадиева нужно отбросить). Методика его доказательства обобщается нами на случай многосвязной области с преодолением нескольких сложных моментов в обосновании теоремы.

В качестве D_w возьмем круговую $(n+1)$-связную область, так как к этому всегда можно прийти, совершая предварительно конформное отображение D_w на круговую область с внешней граничной окружностью $|w| = 1$.

Исследуем поведение векторного поля $Q(b)$ на границе ∂D_w. Для выделения главной части $Q(b)$ используем следующие утверждения. Обозначим $p_1^{(\nu)}(b, b) = \partial^{\nu} p(w, b)/\partial w^{\nu} \Big|_{w=b}$, т. е. индекс 1 показывает, что производная берется по первому аргументу.

Лемма 1. *В случае круговой области* D_w *производные* $p_1^{(\nu)}(b, b)$ *являются ограниченными для* $b \in \overline{D}_w$ *при любом* ν.

Доказательство. В круговых многосвязных областях функцию $F(w, b)$, дающую конформное и однолистное отображение области D_w на единичный круг с концентрическими круговыми разрезами и принимающую на границе области постоянные по модулю значения, по принципу симметрии можно аналитически продолжить в более широкую область D^*_w. Эта область получается присоединением к D_w симметричных относительно граничных контуров кольцевых областей D^*_{wk}, $k=\overline{0, n}$. Тем самым будет аналитически продолженной в D^*_w и функция $p(w, b)$. Поскольку $p(w, b)$ при любом $w \in \overline{D^*_w}$ является непрерывной по $b \in \overline{D}_w$ (в силу аналогичного поведения функции $F(w, b)$, связанной с функцией Грина), то

$$|p(t, b)| \leqslant c \quad \text{при} \quad t \in \partial D^*_w \quad \text{и} \quad b \in \overline{D}_w, \tag{35}$$

причем оценка является равномерной по t и b.

Рассмотрим теперь представление функции $p(w, b)$ интегралом типа Коши

$$p(w, b) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D^*_w} \frac{p(t, b)\, dt}{t - w}.$$

После дифференцирования и подстановки $w = b$ получим

$$p_1^{(\nu)}(b, b) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D^*_w} \frac{p(t, b)\, dt}{(t-b)^{\nu+1}}.$$

На основании (35) из этого представления легко вытекает ограниченность производной

$$|p_1^{(\nu)}(b, b)| \leqslant cM = cM(\nu, \operatorname{dist}(\partial D_w, \partial D^*_w))$$

равномерно для всех $b \in \overline{D}_w \subset D^*_w$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(w)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_w$, то при $\nu \neq 0$*

$$|\varphi^{(\nu)}(b)| = d^{-\nu-1}\, o(d), \tag{36}$$

где $d = \operatorname{dist}(b, \partial D_w)$ — расстояние от точки b до границы ∂D_w.

Доказательство. Докажем это утверждение методом математической индукции. Сначала обоснуем асимптотическое поведение (36) при $\nu = 1$, т. е. докажем, что $\lim\limits_{b \to t \in \partial D_w} d \cdot \varphi'(b) = 0$. Рассмотрим функцию $\Omega(\zeta) = \varphi(b + \zeta d) - \varphi(b)$, $|\zeta| < 1$, которая допускает оценку $|\Omega(\zeta)| \leqslant \omega(\varphi, d)$, где $\omega(\varphi, d) = \sup|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)|$ при $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{D}_w$ и $|\zeta_1 - \zeta_2| < d$. Поэтому по лемме Шварца для $\Omega(\zeta)/\omega$ будем иметь $|\Omega'(0)|/\omega(\varphi, d) \leqslant 1$, следовательно, $|\varphi'(b)|\, d \leqslant \omega(\varphi, d) \to 0$ при $d \to 0$.

Предположим теперь, что утверждение (36) доказано для всех $\nu \leqslant k$ и докажем его для $\nu = k+1$. Вычтем из $\varphi(b + \zeta d)$ первые $k+1$ слагаемых разложения этой функции в ряд по степеням ζ и (не учитывая зависимости от k) обозначим

$$\Omega(\zeta) = \varphi(b + \zeta d) -$$
$$-\left\{ \varphi(b) + \varphi'(b)\zeta d + \frac{1}{2!}\varphi''(b)\zeta^2 d^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(b)\zeta^k d^k \right\},$$

причем для всех ζ, $|\zeta| < 1$,

$$|\Omega(\zeta)| \leqslant \omega(\varphi, d) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu!} |\varphi^{(\nu)}(b)| d^\nu \equiv \omega_k(\varphi, d).$$

Так как первые k производных регулярной функции $\Omega(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ равны нулю, то по лемме Шварца справедлива оценка

$$|\Omega^{(k+1)}(0)| \leqslant (k+1)!\, \omega_k(\varphi, d).$$

Учитывая соотношения $\Omega^{(k+1)}(0) = \varphi^{(k+1)}(b) d^{k+1}$ и (в силу предположения индукции для $\nu \leqslant k$) $|\varphi^{(\nu)}(b)| d^\nu \to 0$, получаем при $d \to 0$

$$|\varphi^{(k+1)}(b)| d^{k+1} \to 0.$$

Лемма 2 доказана.

Поведение остальных слагаемых, входящих в уравнение (34), также оценим в зависимости от близости точки b к границе области ∂D_w. Определим характер функции $p(b, b)$ при приближении b к одной из граничных окружностей $\mathcal{L}_{wk} \subset \partial D_w$, например, к $|w| = 1$. Так как в точке $b^* = 1/\bar{b} \in D_w^*$, симметричной с точкой b относительно $|w| = 1$, продолженная функция $F(w, b)$ имеет полюс, то получаем представление

$$F(w, b) = \frac{w - b}{1 - w\bar{b}} \Psi(w, b), \quad \Psi(b, b) \neq 0,$$

где $\Psi(w, b)$ — аналитическая по w функция, непрерывная и равномерно ограниченная по w и b в области $\bar{D}_w \subset D_w^*$. Поэтому для функции

$$p(b, b) = 1/f(b, b) = (1 - b\bar{b})/\Psi(b, b) \tag{37}$$

справедлива оценка

$$|p(b, b)| \leqslant Ad \; (d = \operatorname{dist}(b, \partial D_w)). \tag{38}$$

Так как в случае круговой области D_w все производные $p_1^{(\nu)}(b, b)$ ограничены (лемма 1), то в силу (38) имеем

$$\left| \frac{\partial^{m-\nu}}{\partial w^{m-\nu}} [p(w, b)]^{m+1} \Bigg|_{w=b} \right| \leqslant B |p(b, b)|^{\nu+1} \leqslant \tilde{B} d^{\nu+1}.$$

Здесь величиной B оценена сумма слагаемых, содержащих функцию $p(b, b)$ и ее производные $p_1^{(k)}(b, b)$ до порядка $k = m - \nu$ включительно. Из этих слагаемых предварительно вынесена за скобки наименьшая степень функции $p(b, b)$.

Учитывая поведение $|\varphi^{(\nu)}(b)|$, обоснованное при $\nu \neq 0$ в лемме 2, получим

$$\left| \frac{\partial^{m-\nu}}{\partial w^{m-\nu}} [p(w, b)]^{m+1} \right|_{w=b} \varphi^{(\nu)}(b) \Big| = o(d),$$

а при $\nu = 0$ будем иметь

$$\varphi(b) \frac{\partial^m}{\partial w^m} [p(w, b)]^{m+1} \Big|_{w=b} = \varphi(b)\, p(b, b)\, (p_1'(b, b))^m + o(p(b, b)). \quad (39)$$

Для доказательства того, что первое слагаемое в правой части (39) представляет собой главный член асимптотического поведения левой части (39), понадобится

Лемма 3. *Функция $p_1'(b, b)$ отлична от нуля в малых круговых кольцах, содержащих граничные окружности ∂D_w.*

Доказательство. Как и выше, докажем сформулированное утверждение лишь для внешней граничной окружности $|w| = 1$, так как для остальных граничных контуров доказательство аналогично.

Используя представление (37) для $p(b, b)$ в области D_w, получим

$$p_1'(b, b) = -\bar{b}\psi(b, b) + (1 - b\bar{b})\psi'(b, b),$$

где $\psi(w, b) = 1/\Psi(w, b)$ — регулярная в D_w функция. Так как множитель перед $\psi'(b, b)$ в пределе при $|b| \to 1$ будет равен нулю, то остается показать, что

$$\lim_{|b| \to 1} \psi(b, b) = \lim_{|b| \to 1} \frac{p(b, b)}{1 - b\bar{b}} \neq 0.$$

Для этой цели заметим, что величина $|p(b, b)| = 1/|f(b, b)|$ является конформным радиусом области D_w относительно точки $b \in D_w$. Конформный радиус убывает при сжатии области D_w [7], поэтому справедливо неравенство $|p(b, b)| \geqslant |p_0(b, b)| = 1/|f_0(b, b)|$, где $|p_0(b, b)|$ — конформный радиус кругового кольца $q < |w| < 1$, вложенного в D_w и содержащего точку b. Используя явный вид функции $F_0(w, b) = (w - b) f_0(w, b)$, отображающей кольцо $q < |w| < 1$ на единичный круг с круговым разрезом [8, с. 233], имеем

$$|p_0(b, b)| = (1 - b\bar{b}) \prod_{k=1}^{\infty} [(1 - q^{2k} b\bar{b})(1 - q^{2k}/b\bar{b})/(1 - q^{2k})^2].$$

Отсюда видно, что при $|b| \to 1$ величина

$$|\psi(b, b)| = |p(b, b)| / (1 - b\bar{b}) \geqslant |p_0(b, b)| / (1 - b\bar{b})$$

стремится к выражению, отличному от нуля. Лемма 3 доказана.

Таким образом, установлено, что главную часть векторного поля $Q(b)$ вблизи ∂D_w определяет слагаемое

$$Q_0(b) = \varphi(b)\, p(b, b) \left[\frac{\partial p(w, b)}{\partial w} \Big|_{w=b} \right]^m.$$

Асимптотическое поведение поля $Q_0(b)$ характеризуется величиной $O(d)$, и его вращение на ∂D_w в силу [3, с. 37] равно вращению $Q(b)$. В дальнейшем при подсчете вращения векторного поля по окружности $\mathcal{L}_{wk} \subset \partial D_w$ учтем, что $\operatorname{ind}\limits_{\mathcal{L}_{wk}} Q_0(b) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \operatorname{ind}\limits_{\mathcal{L}^{\varepsilon}_{wk}} Q_0(b)$, где $\mathcal{L}^{\varepsilon}_{wk}$ — некоторая кривая, близкая к $\mathcal{L}_{wk}$ и содержащаяся в D_w. Преобразуем слагаемое $Q_0(b)$ к удобному виду. Из равенства $2[\ln|f(w, w)|]'_1 = \frac{\partial}{\partial w} \ln|f(w, w)|$ [1, ч. II, с. 17] с учетом того, что $|f(w, w)| = 1/|p(w, w)|$, следует $2(|p(w, w)|^2)'_1 = \frac{\partial}{\partial w}|p(w, w)|^2$. Поэтому

$$\frac{\partial p(w, b)}{\partial w}\Big|_{w=b} = p'_1(b, b) = [|p(b, b)|^2]'_1/\overline{p(b, b)} = \frac{\partial |p(b, b)|^2}{\partial b} \Big/ (2\overline{p(b, b)}).$$

Дополнительно использовано то, что $[\overline{p(b, b)}]'_1 = 0$. Следовательно, $\operatorname{ind}\limits_{\partial D_w} Q_0(b) = m \cdot \operatorname{ind}\limits_{\partial D_w} \tilde{Q}(b) + \operatorname{ind}\limits_{\partial D_w} \varphi(b)$, где $\tilde{Q}(b) = \partial P(b)/\partial b$, $P(b) = |p(b, b)|^2$ — вещественная функция, причем $\operatorname{ind}[p(b, b)/\overline{p(b, b)}] = 0$. Поле $\tilde{Q}(b)$ сопряжено к полю $\operatorname{grad} P = (\partial P/\partial u, \partial P/\partial v)$, $b = u + iv$. Значит, вращение $\tilde{Q}(b)$ отличается только знаком от вращения поля градиентов.

Будем считать, что все нулевые вектора поля изолированы (в противном случае их бесконечно много и теорема доказана). Тогда можно подобрать сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ так, что линии уровня $\mathcal{L}^{\varepsilon}_{wk}: P(u, v) = \varepsilon$ будут гомотопны граничным контурам $\mathcal{L}_{wk}$ и, следовательно, при переходе от ∂D_w к совокупности кривых $\mathcal{L}^{\varepsilon}_{wk}$ вращение поля градиентов не изменится. Известно, что $\mathcal{L}^{\varepsilon}_{wk}$ — гладкие замкнутые жордановы кривые, охватывающие $\mathcal{L}_{wk}$. На них вращение поля градиентов равно вращению поля касательных, т. е. равно 1. Окончательно

$$\operatorname{ind}\limits_{\partial D_w} Q_0(b) = -m \cdot \operatorname{ind}\limits_{\partial D_w} \operatorname{grad} P(b) + \sum_{l=1}^{N_0} n_l = m(n-1) + N.$$

Критическими точками поля $Q(b)$ в области D_w являются точки a_l, $l = \overline{1, N_0}$. Действительно, в окрестности точек a $\varphi(b) = g_l(b)(b - a_l)^{n_l}$, где функция $g_l(b)$ регулярна и $g_l(a_l) \neq 0$. Следовательно, при условии, что $n_l \geqslant \nu$,

$$\varphi^{(\nu)}(b)=\sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j g_l^{(j)}(b)(b-a_l)^{n_l-\nu+j} n_l!/(n_l+j-\nu)!\,. \qquad (40)$$

Из (40) следует, что поведение $\varphi^{(\nu)}(b)$ в окрестности точки a_l определяется слагаемым с $j=0$. Возвращаясь к (34) и учитывая ограниченность производных функции $p(w, b)$ в окрестности a_l, а также указанное выше поведение $\varphi^{(\nu)}(b)$ и неравенства $n_l \geqslant m$, $l=\overline{1, N_0}$, приходим к заключению, что главная часть $Q_0(b)$ в окрестности точки a_l определяется слагаемым с $\nu=m$ и имеет вид $[p(b, b)]^{m+1}(b-a_l)^{n_l-m} g_l(b)$, причем $p(b, b)\neq 0$. Вырезая из D_w круговую окрестность $U_{l\eta}=\{|w-a_l|\leqslant\eta\}$ точки a_l при достаточно малом $\eta>0$, получаем, что $\operatorname*{ind}_{\Gamma_{ln}^-} Q(b)=-\operatorname*{ind}_{b=a_l} Q(b)=m-n_l$, где $\Gamma_{l\eta}^-=\{|w-a_l|=\eta\}$, а знак „—“ у $\Gamma_{l\eta}^-$ указывает, что индекс вычисляется при обходе $\Gamma_{l\eta}$ по часовой стрелке.

По условию задачи нас интересуют решения уравнения (34), не совпадающие с a_l, $l=\overline{1, N_0}$. Рассмотрим область $D_{w\eta}=D_w\diagdown\diagdown(\bigcup_{l=1}^{N_0} U_{l\eta})$. Вращение векторного поля $Q(b)$ на границе $\partial D_{w\eta}$ складывается из вращения $Q(b)$ по ∂D_w и вращений $Q(b)$ по совокупности $\Gamma_{l\eta}$, т. е.

$$\operatorname*{ind}_{\partial D_{w\eta}} Q(b)=\operatorname*{ind}_{\partial D_w} Q(b)+\sum_{l=1}^{N_0}\operatorname*{ind}_{\Gamma_{l\eta}} Q(b)=$$

$$=m(n-1)+N+\sum_{l=1}^{N_0}(m-n_l)=m(n-1+N_0)\neq 0$$

в силу предположений теоремы. Следовательно, уравнение (34) разрешимо. Доказательство закончено.

3°. Пусть граничные функции $w_0(\tau)$, $w_1(\tau)$, ..., $w_n(\tau)$ в обратной краевой задаче удовлетворяют условиям p-симметрии и определяют границу плоской $(n+1)$-связной p-симметричной области D_w. Рассмотрим случай, когда $z(w)\in[N; \underbrace{m, \ldots, m}_{p}]$, $m\geqslant 1$, причем дополнительно будем предполагать, что полюсы функции $z(w)$ порядков $m\geqslant 1$ расположены симметрично в точках $b\exp(2\pi ki/p)$, $k=\overline{0, p-1}$, значение b неизвестно, а $z'(w)$ имеет нули порядков n_l в фиксированных точках a_l, $l=\overline{1, N_0}$ $(a_l\neq 0)$, в точках, получающихся из них поворотами на углы $2\pi k/p$, $k=\overline{1, p-1}$ (тех же порядков), и нуль порядка $r\geqslant 0$ в начале координат. Если $0\notin D_w$, считаем, что $r=0$. При этом $N=p\sum_{l=1}^{N_0} n_l+r$. Необходимым условием разрешимости задачи для класса $\{n_{z0}, n_{z1}, \ldots, n_{zn}\}$ искомых областей D_z является в данном случае равенство

$$\sum_{k=0}^{n} n_{zk} = 1 - n + p \sum_{l=1}^{N_0} n_l + r - (mp + p) =$$

$$= 1 - n + r + p\left(\sum_{l=1}^{N_0} n_l - m - 1\right). \tag{41}$$

Так как

$$z'(w) = e^{\chi_1(w)} G_k(w) / (w - b_k)^{m+1}, \tag{42}$$

где

$$G_k(w) = \frac{[F(w, 0)]^r \prod_{j=1}^{p} \prod_{l=1}^{N_0} [F(w,\ a_l \varepsilon^{j-1})]^{n_l}}{\prod_{j=1,\ j \neq k}^{p} [F(w, b\varepsilon^{j-1})]^{m+1} [f(w, b_k)]^{m+1}},$$

то система уравнений Гахова примет вид

$$m.\text{выч}_{w=b_k} z'(w) \equiv [\exp \chi_1(w)\, G_k(w)]^{(m)} \Big|_{w=b_k} = 0,$$

$$b_k = \varepsilon^{k-1} b,\ k = \overline{1, p}. \tag{43}$$

Перепишем (43) в следующей форме:

$$\sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} [\exp \chi_1(b_k)]^{(\nu)} G_k^{(m-\nu)}(b_k) = 0,\ k = \overline{1, p}, \tag{44}$$

и покажем, что все уравнения в (44) совпадают. Действительно, по доказанной в [1, часть II] лемме $F(\varepsilon w,\ \varepsilon w_0) = \varepsilon F(w, w_0)$, $f(\varepsilon w,\ \varepsilon w_0) = f(w,\ w_0)$. Учитывая эти свойства и равенство $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{p-1}$, получаем $G_{k+1}(\varepsilon w) = \varepsilon^{m+1+r} G_k(w)$, откуда следует, что $G_k^{(\nu)}(b_k) = \varepsilon^{\nu-(m+1+r)} G_{k+1}^{(\nu)}(b_{k+1})$, $\nu = \overline{0, m}$. Из последнего равенства и свойства $[\exp \chi_1(b)]^{(\nu)} = \varepsilon^{(k-1)\nu} [\exp \chi_1(b_k)]^{(\nu)}$ (справедливого в силу p-симметричности граничных функций окз) выводим совпадение первого и второго уравнений в (44):

$$0 = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} \varepsilon^{-\nu} [\exp \chi_1(b)]^{(\nu)} G_2^{(m-\nu)}(b_2) = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} \varepsilon^{-\nu} [\exp \chi_1(b)]^{(\nu)} \times$$

$$\times G_1^{(m-\nu)}(b)\, \varepsilon^{r+\nu+1} = \varepsilon^{r+1} \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} [\exp \chi_1(b)]^{(\nu)} G_1^{(m-\nu)}(b).$$

Аналогично доказывается совпадение всех остальных уравнений. Следовательно, в системе (44) остается единственное уравнение для определения b

$$Q(b) \equiv \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} \frac{\partial^{m-\nu}}{\partial w^{m-\nu}} g(w, b) \Bigg|_{w=b} [\varphi(w) p^{m+1}(w, b)]_{w=b}^{(\nu)} = 0, \quad (45)$$

где

$$\varphi(w) = \exp \chi_1(w) \prod_{j=1}^{p} \prod_{l=1}^{N_0} [F(w, a_l \varepsilon^{j-1})]^{n_l},$$

$$g(w, b) = [F(w, 0)]^r \prod_{j=2}^{p} [F(w, b\varepsilon^{j-1})]^{-(m+1)} \quad \text{при } p \geqslant 2,$$

$$g(w, b) = [F(w, 0)]^r \text{ при } p = 1.$$

Отметим, что при $p = 1$ уравнение (45) совпадает с рассмотренным выше уравнением (34).

Теорема 7. *Пусть граничные функции в окз удовлетворяют условиям p-симметрии и определяют границу плоской $(n+1)$-связной p-симметричной области D_w, $p \geqslant 1$, функция $z(w)$ из класса* $[N; \underbrace{m, \ldots, m}_{p}]$ *имеет представление* (42), *причем $n_l \geqslant m$, $l = \overline{1, N_0}$, а класс искомых областей D_z выбран так, что выполняется необходимое условие разрешимости* (41). *Тогда уравнение Гахова* (45) *будет разрешимо, если*

1°. $n - 1 + N_0 p \neq 0$, $p \geqslant 1$, *с двумя вариантами: а)* $0 \notin D_w$ (т. е. $r = 0$); *б)* $0 \in D_w$ *и* $r = (m+1)(p-1)$;

2°. $n + N_0 p \neq 0$, $p \geqslant 1$, *область D_w содержит $w = 0$, а r удовлетворяет одному из неравенств: а)* $r \geqslant (m+1)(p-1) + m$, б) $0 \leqslant r < (m+1)(p-1)$.

Соответствующее решение окз при выполнении условий замкнутости будет p-симметричной функцией в p-симметричной области D_z.

Доказательство. Выделим главную часть векторного поля $Q(b)$ на границе ∂D_w. Как показано в теореме 6, поведение выражения $[\varphi(w) p^{m+1}(w, b)]_{w=b}^{(\nu)}$ на ∂D_w определяется производной $\dfrac{\partial^{\nu}}{\partial w^{\nu}} p^{m+1}(w, b)\Big|_{w=b}$. Так как $p(b, b) \to 0$ при $b \to t \in \partial D_w$, то главная часть $Q(b)$ на ∂D_w определяется слагаемым суммы (45) с $\nu = m$, т. е. членом $\widetilde{Q}(b) = \left[\dfrac{\partial}{\partial w} p(w, b)\Big|_{w=b}\right]^m \varphi(b) g(b, b) = Q_0(b) g(b, b)$. По вышедоказанному, $\operatorname{ind} Q_0(b) = m(n-1) + pN$. Далее, $\operatorname{ind}_{\partial D_w} g(b, b) = r - (m+1)(p-1)$. Окончательно $\operatorname{ind}_{\partial D_w} \widetilde{Q}(b) = m(n-1) + pN + r - (m+1)(p-1)$.

Теперь необходимо выделить критические точки $Q(b)$. К их числу относятся точки a_l, $l = \overline{1, N_0}$, и получающиеся из них поворотом. Как и в теореме 6, при $n_l \geqslant m$ поведение $Q(b)$ в окрестности a_l можно легко определить: $\operatorname{ind}\limits_{b=a_l} Q(b) = n_l - m$. Вырезая из D_w круговые окрестности с достаточно малым радиусом η точек a_l, получаем, что $\operatorname{ind}\limits_{\Gamma_{l\eta}^-} Q(b) = m - n_l$, где $\Gamma_{l\eta} = \{|w - a_l| = \eta\}$, причем обход осуществляется по часовой стрелке. При ограничениях а) и б) на величину r в 1° векторное поле $Q(b)$ не имеет в D_w других критических точек. Записывая вращение $Q(b)$ на границе области $\partial D_{w\eta}$, полученной из D_w удалением указанных окрестностей точек a_l, будем иметь $\gamma = \operatorname{ind}\limits_{\partial D_{w\eta}} Q(b) = m(n - 1 + N_0 p) \neq 0$ при любых N_0 и p в случае $n > 1$, при $N_0 \neq 0$ в случае $n = 1$, и при $N_0 \neq 1$ в случае $n = 0$, $p = 1$, что эквивалентно разрешимости уравнения (45) при предположении 1°.

Пусть имеют место ограничения а) и б) в 2°. В этом случае критическими точками векторного поля $Q(b)$ будут точки $a_l \varepsilon^{j-1}$, $l = \overline{1, N_0}$, $j = \overline{1, p}$ (поведение в окрестности которых определено выше), и точка $b = 0$. Из представления функции $g(w, b)$ следует, что в окрестности $w = 0$ $g(w, b) = w^{\delta} h(w, b)$, где $\delta = r - (m + 1)(p - 1)$ и $h(b, b) \neq 0$ в окрестности $b = 0$. При ограничениях а) или б) п. 2° на величину r главная часть $Q(b)$ в окрестности $b = 0$ определяется членом

$$\left.\frac{\partial^m w^{\delta}}{\partial w^m}\right|_{w=b} p^{m+1}(b, b)\, h(b, b)\, \varphi(b), \quad p(b, b) \neq 0.$$

Вырезая круговую окрестность точки $b = 0$, получим, что $\operatorname{ind}\limits_{\Gamma_{0\eta}^-} Q(b) = m - \delta$, где $\Gamma_{0\eta}^- = \{|w| = \eta\}$ обходится по часовой стрелке. Окончательно

$$\Gamma = \operatorname{ind}_{\partial D_{w\eta}} Q(b) = m(n - 1 + N_0 p) + m = m(n + N_0 p) \neq 0$$

при всех N_0 и p для $n > 0$ и при всех p и $N_0 \neq 0$ для случая односвязной области ($n = 0$). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев Л. А., Елизаров А. М., Киндер М. И. Обратные краевые задачи для многосвязных областей на римановых поверхностях рода нуль, I, II.— В кн.: Тр. семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984, вып. 21, с. 19—32; 1985, вып. 22, с. 16—29.

2. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах.— Уч. записки Казанского ун-та, 1953, т. 113, кн. 10, с. 9—20.

3. Красносельский М. А. и др. Векторные поля на плоскости.— М.: Физматгиз, 1963.—245 с.

4. Киндер М. И. Внешние обратные краевые задачи в многосвязных областях и на римановых поверхностях. Автореферат дисс. ... канд. физ-мат. наук.— Казань, 1984.— 14 с.

5. Авхадиев Ф. Г. Обратная краевая задача для функции с особенностями.— В. кн.: Тр. семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984, вып. 21, с. 5—17.

6. Киндер М. И. О числе решений уравнения Ф. Д. Гахова в случае многосвязной области.— Изв. вузов. Математика, 1984, № 8, с. 69—72.

7. Ahlfors L., Beurling A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets.— Acta Math., 1950, Bd. 83, N 1/2, p. 101—129.

8. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1970.—304 с.

Доложено на семинаре 26 января 1984 г.