О. Л. Виноградов, О верхних гранях констант Лебега методов суммирования рядов Фурье–Якоби, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2001, том 282, 34–50

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 282, 2001 г.

О. Л. Виноградов

О ВЕРХНИХ ГРАНЯХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЯКОБИ

Далее, если не оговорено противное, все функции вещественнозначны; C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой, $C\langle a,b\rangle$ – множество непрерывных на промежутке $\langle a,b\rangle$ функций f,

$$\|f\| = \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x)|,$$

$L_2\langle a,b\rangle$ с весом q (q – неотрицательная на $\langle a,b\rangle$ измеримая функция) – пространство измеримых на $\langle a,b\rangle$ функций f с конечной нормой $\left(\int_a^b |f|^2 q\right)^{1/2}$; единичный вес не указывается; $L\langle a,b\rangle$ – множество суммируемых на $\langle a,b\rangle$ функций. Многочлены Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}$$

($n \in \mathbb{Z}_+$) образуют полную ортогональную систему в $L_2[-1,1]$ с весом $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ при $\alpha,\beta > -1$ [1, глава IV]. При $\alpha=\beta$ многочлены Якоби называются еще ультрасферическими или многочленами Гегенбауэра, а при $\alpha=\beta=0$ – многочленами Лежандра P_n. Когда речь идет о многочленах Якоби, мы будем систематически обозначать $x=\cos t$. Многочлены Чебышева первого рода $\cos nt$, многочлены Чебышева второго рода $\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$ и многочлены $\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$ и $\frac{\cos(n+1/2)t}{\cos(t/2)}$ лишь постоянными множителями отличаются, соответственно, от многочленов Якоби с параметрами $(-1/2,-1/2)$, $(1/2,1/2)$, $(1/2,-1/2)$ и $(-1/2,1/2)$. С крышкой наверху обозначим нормированные в $L_2[-1,1]$ с соответствующим весом многочлены. Косинус- и синус-преобразования Фурье

Работа поддержана ФЦП “Интеграция”, рег.номер 326.53 и грантом “Научные школы” N. 00-15-96-022.

функции $\varphi \in L_2[0,+\infty)$ определим формулами

$$F_c\varphi(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\cos zu\,du, \qquad F_s\varphi(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(u)\sin zu\,du,$$

а преобразование Фурье–Бесселя измеримой функции φ, для которой интеграл $\int_0^\infty u\varphi^2(u)\,du$ конечен, – формулой

$$B\varphi(z) = z\int_0^\infty u\varphi(u)J_0(zu)\,du, \qquad \text{где} \quad J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}}\,du \; –$$

функция Бесселя. Сходимость интегралов понимается в соответствующих L_2.

Пусть функции $f \in C[a,b]$, которая далее предполагается вещественно- или комплекснозначной, соответствует ее ряд Фурье по полной ортонормированной в $L_2[a,b]$ с суммируемым весом q системе $\{p_k\}$:

$$f \sim \sum_{k=0}^\infty a_k p_k.$$

В работе рассматриваются тригонометрическая система на $[-\pi,\pi]$, системы косинусов и синусов на $[0,\pi]$ и многочлены Якоби. Будем исследовать последовательности линейных операторов (методы суммирования) $\mathcal{U}_n^\Lambda : C[a,b] \to C[a,b]$, задаваемые матрицей вещественных множителей $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$:

$$\mathcal{U}_n^\Lambda f \sim \sum_{k=0}^\infty \lambda_k^{(n)} a_k p_k.$$

Операторы $\mathcal{U}_n^\Lambda$ могут быть записаны в интегральном виде

$$\mathcal{U}_n^\Lambda f(y) = \int_a^b f(x)Q_n(\Lambda,y,x)q(x)\,dx, \quad Q_n(\Lambda,y,x) = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k^{(n)} p_k(y)p_k(x).$$

Для полиномиальных операторов $\mathcal{U}_n^\Lambda$ последняя сумма конечна. В общем случае необходимо уточнить, как понимать сумму ряда. Не стремясь к максимальной общности, будем предполагать, что коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$ таковы, что равномерно по y ряд сходится в L_2 по x, т.е. равномерно на $[a,b]$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^\infty \bigl(\lambda_k^{(n)}\bigr)^2 p_k^2$.

Величины

$$L_n(\Lambda, y) = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\mathcal{U}_n^\Lambda f(y)| \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}_n(\Lambda) = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|\mathcal{U}_n^\Lambda f\| = \|L_n(\Lambda)\|$$

называются соответственно функциями и константами Лебега данного метода суммирования. О роли функций и констант Лебега см., например, [1, с. 28, 415]. Для изучаемых систем введем обозначения

$$Q_n(\Lambda, t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \cos kt\right), \qquad \widetilde{Q}_n(\Lambda, t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \sin kt,$$

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda, y, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(y) \widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$\mathfrak{L}_n(\Lambda) = \int_0^{\pi} |Q_n(\Lambda)|, \qquad \widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) = \int_0^{\pi} |\widetilde{Q}_n(\Lambda)|,$$

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda, y) = \int_{-1}^{1} |Q_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda, y, x)|(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx,$$

$$\mathfrak{L}_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda) = \|L_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda)\|.$$

Многие классические методы суммирования задаются функцией множителей φ: $\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. Для тригонометрической системы известны, в частности, следующие результаты [2, с. 129; 3, с. 183].

Лемма 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция φ удовлетворяет условиям:*
а) $\varphi \in C[0, +\infty)$,
б) $\varphi \in L_2[0, +\infty)$,
в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n) < \infty$,
г) $F_c\varphi \in L[0, +\infty)$;
$\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. *Тогда для всех $f \in C$ и $x \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) Q_n(\Lambda, t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + z/n) F_c\varphi(z) \, dz.$$

Теорема 1. *Пусть функция φ при всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\varphi \in C[0, +\infty)$,

б) $\varphi \in L_2[0, +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n) < \infty$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. *Тогда*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{L}_n(\Lambda) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{L}_n(\Lambda) = \int\limits_0^{\infty} |F_c \varphi|.$$

Лемма 1 – это перефразированная теорема 2 из [2, с. 129]. Разница лишь в том, что в [2] преобразование Фурье определялось для суммируемых функций. Оценка сверху в теореме 1 – следствие леммы [2, с. 130]. Оценка снизу получается по образцу [4, с. 168]; см. ниже доказательство теоремы 2. Аналогичные утверждения справедливы для синус-рядов.

Лемма 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция φ удовлетворяет условиям:*

а) $\varphi \in C[0, +\infty)$,

б) $\varphi \in L_2[0, +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi^2(k/n) < \infty$,

г) $F_s \varphi \in L[0, +\infty)$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. *Тогда для всех $f \in C$ и $x \in \mathbb{R}$*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \widetilde{Q}_n(\Lambda, t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x + z/n) F_s \varphi(z)\, dz. \tag{1}$$

Хотя лемма 2 может быть выведена из общих теорем в [3, глава 4, §1], проще и нагляднее проверить её непосредственно.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $x = 0$; общий случай сводится к этому рассмотрением функции $f_x(t) = f(x+t)$. В силу суммируемости $\widetilde{Q}_n(\Lambda)$ на $[-\pi, \pi]$ и $F_s \varphi$ на $\mathbb{R}$ достаточно доказать равенство (1) для тригонометрических многочленов f, а в силу линейности обеих частей (1) по f и нечетности ядер –

для $f(t)=\sin mt$ $(m\in\mathbb{N})$. Тогда левая часть в (1) равна $2\,\varphi(m/n)$. Осталось показать, что

$$2\varphi(v)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin vz F_s\varphi(z)\,dz \tag{2}$$

при $v=m/n$. Равенство (2) верно в $L_2[0,+\infty)$; кроме того, интеграл в правой части (2) непрерывен по параметру v в силу суммируемости $F_s\varphi$, а φ непрерывна по условию. Значит, равенство (2) верно при всех $v\geqslant 0$ и, в частности, при $v=m/n$.

Теорема 2. *Пусть функция φ при всех $n\in\mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\varphi\in C[0,+\infty)$,

б) $\varphi\in L_2[0,+\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi^2(k/n)<\infty$;

$\lambda_k^{(n)}=\varphi(k/n)$. *Тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda)=\int\limits_0^{\infty}|F_s\varphi|.$$

Доказательство. Если интеграл $\int_0^\infty|F_s\varphi|$ бесконечен, то неравенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda)\leqslant\int\limits_0^{\infty}|F_s\varphi|$$

тривиально. Если же интеграл конечен, то по лемме 2 при всех $n\in\mathbb{N}$ будет

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda)=\sup_{\substack{f\in C\\ \|f\|\leqslant 1}}\left|\int\limits_0^{\pi}f(t)\widetilde{Q}_n(\Lambda,t)\,dt\right|=\frac{1}{2}\sup_{\substack{f\in C\\ \|f\|\leqslant 1}}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\widetilde{Q}_n(\Lambda,t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{\substack{f\in C\\ \|f\|\leqslant 1}}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(z/n)F_s\varphi(z)\,dz\right|\leqslant\int\limits_0^{\infty}|F_s\varphi|.$$

Таким образом,

$$\varliminf_{n\to\infty} \widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) \leqslant \int\limits_0^\infty |F_s\varphi|.$$

Осталось доказать неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) \geqslant \int\limits_0^\infty |F_s\varphi|;$$

из него будет вытекать существование предела последовательности $\widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda)$ и требуемое равенство.

Пусть сначала φ финитна: $\varphi(u) = 0$ при $u > N$. Тогда сумма конечна:

$$\widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) = \int\limits_0^{n\pi} \left| \frac{2}{\pi n} \sum_{k=1}^{Nn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sin\frac{z}{n} \right| dz. \tag{3}$$

При фиксированном $z \geqslant 0$ последовательность интегральных сумм под знаком модуля в (3) сходится к $F_s\varphi(z)$, и требуемое неравенство выполняется по теореме Фату о предельном переходе под знаком интеграла (см., например, [5, с. 102]). Итак, для финитной φ теорема доказана.

Если же φ не финитна, то возьмем $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим суммы Фейера порядка Nn ядра $\widetilde{Q}_n(\Lambda)$:

$$\sigma_{Nn}\widetilde{Q}_n(\Lambda, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{Nn} \left(1 - \frac{k}{Nn}\right) \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sin kt.$$

По доказанному, с помощью положительности метода Фейера получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \widetilde{\mathfrak{L}}_n(\Lambda) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_0^\pi |\sigma_{Nn}\widetilde{Q}_n(\Lambda)| \geqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^N \left(1 - \frac{u}{N}\right) \varphi(u) \sin zu\, du \right| dz.$$

Интеграл $\frac{2}{\pi}\int_0^N \left(1 - \frac{u}{N}\right) \varphi(u) \sin zu\, du$ при $N \to \infty$ стремится к $F_s\varphi(z)$ в $L_2[0, +\infty)$. Осталось применить теорему Фату.

Далее утверждения, доказываемые аналогично лемме 2 или теореме 2, будут формулироваться без подробного доказательства.

Ранее [6] автором исследовался случай многочленов Лежандра и была доказана до некоторой степени аналогичная теореме 1, но существенно более трудная

Теорема 3. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям:*

а) $\varphi \in C[0,+\infty)$,

б) $\int_0^\infty u\varphi^2(u)\,du < \infty$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n)(k+1/2) < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$,

г) *функция* $z^{q-1}|B\varphi(z)|^q$ *суммируема на* $[0,+\infty)$ *при некотором* $q > 1$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(0,0)}(\Lambda) = \int\limits_0^\infty |B\varphi|.$$

Возникает вопрос, нельзя ли для данного класса функций φ получить полный аналог теоремы 1, т.е. еще и равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(0,0)}(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(0,0)}(\Lambda)?$$

Г. И. Натансон [7] установил, что для метода Фейера ($\varphi(u) = 1-u$ при $u \in [0,1]$, $\varphi(u) = 0$ при $u > 1$)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(0,0)}(\Lambda) < 1,495543,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(0,0)}(\Lambda) = \int\limits_0^\infty \left| \int\limits_0^x J_0 - xJ_0(x) \right| \frac{dx}{x^2} = 1,29634\ldots$$

Машинный счет позволяет высказать гипотезу, что последовательность констант Лебега метода Фейера возрастает, и, таким образом, предел является ее верхней гранью. Сейчас мы предъявим функцию множителей φ, для которой это не так.

Пусть

$$g(v) = \begin{cases} (1-v)\cos\pi v + \frac{1}{\pi}\sin\pi v & \text{при } v \in [0,1], \\ 0 & \text{при } v > 1 \end{cases}$$

– функция множителей метода Бомана–Коровкина. Хорошо известно, что метод Бомана–Коровкина суммирования тригонометрических рядов Фурье положительный: $F_c g \geqslant 0$. Положим

$$\psi(u) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_u^1 \frac{g'(\tau)}{\sqrt{\tau^2-u^2}}\,d\tau, \qquad \varphi(u) = \frac{\psi(u)}{\psi(0)}.$$

Тогда

$$\frac{1}{z}B\psi(z) = \int\limits_0^1 u\psi(u)J_0(zu)\,du = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 u\psi(u)\int\limits_0^u \frac{\cos zv}{\sqrt{u^2-v^2}}\,dv\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \cos zv \int\limits_v^1 \frac{u\psi(u)}{\sqrt{u^2-v^2}}\,du\,dv,$$

$$\int\limits_v^1 \frac{u\psi(u)}{\sqrt{u^2-v^2}}\,du = -\frac{2}{\pi}\int\limits_v^1 \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}\int\limits_u^1 \frac{g'(\tau)}{\sqrt{\tau^2-u^2}}\,d\tau\,du =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_v^1 g'(\tau)\int\limits_v^\tau \frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}\frac{du}{\sqrt{\tau^2-u^2}}\,d\tau = g(v)$$

и $B\psi(z) \geqslant 0$, а значит, и $B\varphi(z) \geqslant 0$. Следовательно, по теореме 3 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}_n^{(0,0)}(\Lambda) = \varphi(0) = 1.$$

Покажем, что $\mathfrak{L}_2^{(0,0)}(\Lambda) > 1$. Это равносильно тому, что ядро

$$Q_2 = \varphi(0)\frac{1}{2}P_0 + \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}P_1$$

меняет знак. Очевидно, что $Q_2(1) > 0$. Докажем, что $Q_2(-1) < 0$. В силу равенств $P_k(-1) = (-1)^k$ и $g'(\tau) = -\pi(1-\tau)\sin\pi\tau$ последнее равносильно условию $1 < 3\varphi(1/2)$ или

$$\int\limits_0^1 \frac{1-\tau}{\tau}\sin\pi\tau\,d\tau < 3\int\limits_{1/2}^1 \frac{1-\tau}{\sqrt{\tau^2-1/4}}\sin\pi\tau\,d\tau. \tag{4}$$

Делая замену $\tau=(1+u)/2$, получим, что правая часть в (4) равна

$$I=\int\limits_0^1 h(u)\frac{du}{\sqrt{u}},\qquad \text{где}\qquad h(u)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{1-u}{\sqrt{1+u/2}}\cos\frac{\pi u}{2}.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся при $n=3$ квадратурной формулой $I=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k h(x_k)+R_n(h)$, где остаточный член представляется в виде

$$R_n(h)=\frac{h^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\cdot\frac{2}{4n+1}\left\{\frac{2^{2n}[(2n)!]^2}{(4n)!}\right\}^2,\quad 0<\eta<1$$

(см. [8, с. 116, 117], где приведены узлы x_k и коэффициенты A_k). Оценим производную $h^{(6)}$. Имеем (считая $(-1)!!=1$)

$$h^{(m)}(u)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(\frac{1-u}{\sqrt{1+u/2}}\right)^{(k)}\left(\cos\frac{\pi u}{2}\right)^{(m-k)},$$

$$\left|\left(\cos\frac{\pi u}{2}\right)^{(m-k)}\right|\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-k},$$

$$\left(\frac{1-u}{\sqrt{1+u/2}}\right)^{(k)}=(1-u)\left(\frac{1}{\sqrt{1+u/2}}\right)^{(k)}-k\left(\frac{1}{\sqrt{1+u/2}}\right)^{(k-1)}=$$

$$=\frac{(1-u)(-1)^k(2k-1)!!}{2^{2k}(1+u/2)^{k+1/2}}-\frac{k(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{2^{2k-2}(1+u/2)^{k-1/2}}=$$

$$=\frac{(-1)^k(2k-3)!!\,(6k-1+u)}{2^{2k}(1+u/2)^{k+1/2}}\qquad\text{при } k\in\mathbb{N},$$

$$\left|\left(\frac{1-u}{\sqrt{1+u/2}}\right)^{(k)}\right|\leqslant\frac{(2k-3)!!\,(6k-1)}{2^{2k}}\qquad\text{при } k\in\mathbb{N},$$

$$\left|\left(\frac{1-u}{\sqrt{1+u/2}}\right)^{(k)}\right|\leqslant\left(3-\frac{\pi}{2}\right)^k\qquad\text{при } k=0,\dots,6,$$

$$|h^{(6)}(u)|<\frac{3}{2\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{6}C_6^k\left(3-\frac{\pi}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{2}\right)^{6-k}=\frac{3^7}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $|R_3(h)|<8\cdot10^{-4}$. Вычисления дают, что $I=1,229\pm10^{-3}$, тогда как левая часть в (4) равна $\operatorname{Si}\pi-\frac{2}{\pi}<1,216$.

Далее мы исследуем константы Лебега некоторых методов суммирования рядов Фурье–Якоби при $|\alpha|=|\beta|=1/2$. Если

$\alpha \geqslant \beta \geqslant \min\{-1/2, -\alpha\}$ (всегда считаем $\alpha, \beta > -1$), то функции Лебега методов суммирования рядов Фурье–Якоби достигают максимума при $y = 1$. Аналогичное утверждение справедливо для точки $y = -1$, если поменять α и β местами. Для доказательства Дж. Гаспер [9] воспользовался найденной им формулой умножения для многочленов Якоби (в ней μ_{xy} – некоторая мера)

$$\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(y)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(z)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)} (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\, d\mu_{xy}(z)$$

(для ультрасферических многочленов формула умножения установлена Гегенбауэром). Там же Дж. Гаспер отметил, что на возможность применения формулы умножения к доказательству равномерной суммируемости рядов Фурье–Якоби методами Чезаро указали Р. Аски и С. Вейнгер [10]. Доказательство равенства

$$\mathfrak{L}_n^{(\alpha,\alpha)}(\Lambda) = L_n^{(\alpha,\alpha)}(\Lambda, 1)$$

для полиномиальных методов суммирования рядов Фурье–Гегенбауэра при $\alpha \geqslant 1/2$ см. также в работе С. Г. Кальнея [11].

Лемма 1 и теорема 1 допускают очевидную переформулировку для многочленов Чебышева первого рода.

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция φ удовлетворяет условиям:*

а) $\varphi \in C[0, +\infty)$,

б) $\varphi \in L_2[0, +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n) < \infty$,

г) $F_c\varphi \in L[0, +\infty)$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. *Тогда для всех $f \in C[-1, 1]$*

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x) Q_n^{(-1/2,-1/2)}(\Lambda, 1, x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{0}^{\infty} f\left(\cos\frac{z}{n}\right) F_c\varphi(z)\, dz.$$

Теорема 4. *Пусть функция φ при всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\varphi \in C[0, +\infty)$,

б) $\varphi \in L_2[0, +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n) < \infty$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. *Тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(-1/2,-1/2)}(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(-1/2,-1/2)}(\Lambda) = \int\limits_0^{\infty} |F_c\varphi|.$$

Чтобы получить аналоги для многочленов Чебышева второго рода или для многочленов Якоби при $\alpha = -\beta = \pm 1/2$, удобно рассматривать "сдвинутые" методы суммирования: $\lambda_k^{(n)} = \varphi\bigl(\frac{k+1}{n}\bigr)$ или $\varphi\bigl(\frac{k+1/2}{n}\bigr)$.

Лемма 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, функция $\psi(u) = u\varphi(u)$ удовлетворяет условиям:*

а) $\psi \in C[\,0, +\infty)$,

б) $\psi \in L_2[\,0, +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k/n) < \infty$,

г) $F_s\psi \in L[\,0, +\infty)$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi\bigl(\frac{k+1}{n}\bigr)$. *Тогда для всех $f \in C[-1,1]$*

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x) Q_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda,1,x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty} f\left(\cos\frac{z}{n}\right) n \sin\frac{z}{n} F_s\psi(z)\,dz.$$

Для доказательства надо записать левую часть в виде

$$\int\limits_0^{\pi} f(\cos t) n \sin t\, \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n}\, \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \sin kt\, dt$$

и воспользоваться леммой 2.

Теорема 5. *Пусть функция $\psi(u) = u\varphi(u)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\psi \in C[\,0, +\infty)$,

б) $\psi \in L_2[\,0, +\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k/n) < \infty$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right)$. *Тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda) = \int\limits_0^\infty z|F_s\psi(z)|\,dz.$$

Доказательство. Оценка сверху

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda) \leqslant \int\limits_0^\infty z|F_s\psi(z)|\,dz$$

получается с помощью леммы 4 так же, как в теореме 2. Оценка снизу

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda) \geqslant \int\limits_0^\infty z|F_s\psi(z)|\,dz$$

для финитных функций φ следует из теоремы Фату, как в теореме 2.

Для распространения оценки снизу с финитных функций множителей на произвольные, удовлетворяющие условиям теоремы, вместо средних Фейера используем сдвинутые средние Гёльдера второго порядка. Эти средние порождаются функцией множителей $p(u) = (1-u)^2$, если $u \in [0,1]$; $p(u) = 0$, если $u > 1$:

$$H_N^{(2)}(g, \cos s) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi g(\cos t)\sum_{k=1}^N \left(1-\frac{k}{N}\right)^2 \frac{\sin ks}{\sin s}\frac{\sin kt}{\sin t}\sin^2 t\,dt.$$

Так как функция Лебега достигает максимума на конце отрезка, для всякой функции g, суммируемой с весом $\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1,1]$, имеем

$$\int\limits_0^\pi |H_N^{(2)}(g,\cos s)|\sin^2 s\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi |g(\cos s)| \int\limits_0^\pi \left|\sum_{k=1}^N \left(1-\frac{k}{N}\right)^2 \frac{\sin ks}{\sin s}\frac{\sin kt}{\sin t}\right| \sin^2 t\,dt\,\sin^2 s\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\sum_{k=1}^N \left(1-\frac{k}{N}\right)^2 k\frac{\sin kt}{\sin t}\right| \sin^2 t\,dt \int\limits_0^\pi |g(\cos s)|\sin^2 s\,ds.$$

Далее, по доказанному

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\left|\sum_{k=1}^N\left(1-\frac{k}{N}\right)^2 k\frac{\sin kt}{\sin t}\right|\sin^2 t\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty z\left|\int\limits_0^1 (1-u)^2 u\sin zu\,du\right| dz =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^1 ((1-u)^2 u)'\cos zu\,du\right| dz.$$

Внутренний интеграл в последней формуле равен

$$\int\limits_0^1 ((1-u)^2 u)'\cos zu\,du = \frac{4z+2z\cos z-6\sin z}{z^3} = \frac{d(z)}{z^3}.$$

Докажем, что $d(z)>0$ при $z>0$. Действительно,

$$d(z) = \sum_{k=2}^\infty (-1)^k\frac{2}{(2k)!}\frac{2k-2}{2k+1}z^{2k+1}.$$

При $0<z\leqslant 2$ положительность $d(z)$ следует из того факта, что члены ряда Маклорена функции d убывают по абсолютной величине:

$$\left(\frac{2}{m!}\,\frac{m-2}{m+1}z^{m+1}\right) : \left(\frac{2}{(m+2)!}\,\frac{m}{m+3}z^{m+3}\right) =$$

$$= \left(m-\frac{4}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m+1}\right)\frac{1}{z^2} = A$$

(здесь $m=2k\geqslant 4$). Множитель при $1/z^2$ возрастает по m, поэтому

$$A \geqslant \frac{21}{5z^2} > \frac{4}{z^2} \geqslant 1 \quad \text{при } 0<z\leqslant 2.$$

При $2<z\leqslant 3$ имеем

$$d(z) > 4z-6\sin z > 8-6\sin z > 0,$$

а при $z>3$

$$d(z) \geqslant 2z-6\sin z > 6-6\sin z \geqslant 0.$$

Следовательно, по формуле обращения для преобразования Фурье повторный интеграл равен

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1((1-u)^2u)'\cos zu\,du\,dz = \left.(u(1-u)^2)'\right|_{u=0} = 1$$

и, таким образом,

$$\int\limits_0^\pi |H_N^{(2)}(g,\cos s)|\sin^2 s\,ds \leqslant \int\limits_0^\pi |g(\cos s)|\sin^2 s\,ds.$$

Применяя средние Гельдера к ядру $Q_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda,1,\cdot)$, находим

$$\mathfrak{L}_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda) \geqslant \int\limits_0^\pi |H_{Nn}^{(2)}(Q_n^{(1/2,1/2)}(\Lambda,1,\cdot),\cos t)|\sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left|\sum_{k=1}^{Nn}\left(1-\frac{k}{Nn}\right)^2\varphi\left(\frac{k}{n}\right)k\sin kt\right|\sin t\,dt.$$

Завершается доказательство, как в теореме 2.

Лемма 5. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, функция $\psi(u)=u\varphi(u)$ удовлетворяет условиям:*

а) $\psi\in C[\,0,+\infty)$,

б) $\psi\in L_2[\,0,+\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\psi^2\big(\frac{k+1/2}{n}\big)<\infty$,

г) $F_s\psi\in L[\,0,+\infty)$;

$\lambda_k^{(n)}=\varphi\big(\frac{k+1/2}{n}\big)$. *Тогда для всех* $f\in C[-1,1]$

$$\int\limits_{-1}^1 f(x)Q_n^{(1/2,-1/2)}(\Lambda,1,x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty f\left(\cos\frac{z}{n}\right)2n\sin\frac{z}{2n}F_s\psi(z)\,dz, \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) Q_n^{(-1/2,1/2)}(\Lambda,-1,x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx =$$
$$= \int_0^\infty f\left(-\cos\frac{z}{n}\right) 2n\sin\frac{z}{2n} F_s\psi(z)\,dz. \tag{6}$$

Доказательство. Запишем левую часть (5) в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos t) 2n\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^\infty \frac{k+1/2}{n}\,\varphi\left(\frac{k+1/2}{n}\right)\sin{(k+1/2)t}\,dt.$$

Достаточно проверить равенство (5) для многочленов $f(x) = \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}$, что делается так же, как в доказательстве леммы 2. Равенство (6) доказывается аналогично; для этого надо записать левую часть (6) в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos t) 2n\cos\frac{t}{2}\sum_{k=0}^\infty \frac{k+1/2}{n}\,\varphi\left(\frac{k+1/2}{n}\right)(-1)^k\cos{(k+1/2)t}\,dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(-\cos t) 2n\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^\infty \frac{k+1/2}{n}\,\varphi\left(\frac{k+1/2}{n}\right)\sin{(k+1/2)t}\,dt$$

и проверить равенство для многочленов $f(x) = \frac{\cos(m+1/2)t}{\cos(t/2)}$.

Теорема 6. *Пусть функция $\psi(u) = u\varphi(u)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям:*

а) $\psi \in C[0,+\infty)$,

б) $\psi \in L_2[0,+\infty)$,

в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi^2\bigl(\frac{k+1/2}{n}\bigr) < \infty$;

$\lambda_k^{(n)} = \varphi\bigl(\frac{k+1/2}{n}\bigr)$. *Тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(1/2,-1/2)}(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(1/2,-1/2)}(\Lambda) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(-1/2,1/2)}(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(-1/2,1/2)}(\Lambda) = \int_0^\infty z|F_s\psi(z)|\,dz.$$

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5. При распространении оценки снизу используются сдвинутые на 1/2 средние Гельдера второго порядка.

Замечание 1. В леммах 1–5 условие $n \in \mathbb{N}$ несущественно и может быть заменено на $n > 0$. Не умаляя общности, можно доказать леммы при $n = 1$, а затем применить доказанные утверждения к функции $\varphi(\cdot/n)$.

Литература

1. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* М., 1962.
2. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
3. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* СПб., 1995.
4. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации.* Л., 1983.
5. Л. В. Флоринская, В. П. Хавин, *Теория меры и интеграла. Вып. 2. Интеграл.* Л., 1975.
6. О. Л. Виноградов, *Предел констант Лебега методов суммирования рядов Фурье–Лежандра, задаваемых функцией множителей.* — Записки научных семинаров ПОМИ **262** (1999), 71–89.
7. Г. И. Натансон, *О нормах сумм Фейера–Лежандра.* — Вестник Ленингр. ун-та, сер.1, вып.4 (22) (1996), 25–34.
8. В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов.* М., 1959.
9. G. Gasper, *Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel.* — Ann. Math. **95, 2** (1972), 261–280.
10. R. Askey, S. Wainger, *A convolution structure for Jacobi series.* — Amer. J. Math. **91, 2** (1969), 463–485.
11. С. Г. Кальней, *О регулярности линейных методов суммирования рядов Фурье–Якоби.* — Теоремы вложения и их приложения. Материалы всесоюзного симпозиума (Алма-Ата, 1973 г.) (1976), 44–49.

Vinogradov O. L. On the upper bounds of Lebesgue constants for Fourier–Jacobi series summation methods.

In what follows, the $P_k^{(\alpha,\beta)}$ are Jacobi polynomials, $C[a,b]$ is the space of continuous functions on $[a,b]$ with uniform norm, $\mathcal{U}_n^{\Lambda} : C[-1,1] \to C[-1,1]$ is a sequence of operators determined by a matrix of multipliers

$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^{(\alpha,\beta)}, \qquad \mathcal{U}_n^{\Lambda} f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} a_k P_k^{(\alpha,\beta)},$$

$$\mathfrak{L}_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda) = \sup_{y\in[-1,1]} \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\mathcal{U}_n^{\Lambda} f(y)|.$$

The values of $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda)$ and $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n^{(\alpha,\beta)}(\Lambda)$ are studied.

It is proved that in the cases of

$$1)\ \alpha = \beta = -1/2, \quad \lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n);$$
$$2)\ \alpha = \beta = 1/2, \quad \lambda_k^{(n)} = \varphi((k+1)/n);$$
$$3)\ \alpha = -\beta = \pm 1/2, \quad \lambda_k^{(n)} = \varphi((k+1/2)/n)$$

these values are equal to

$$1)\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\varphi(t)\cos zt\,dt\right|dz; \qquad 2,3)\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} z\left|\int_0^{\infty} t\varphi(t)\sin zt\,dt\right|dz,$$

under some conditions on φ.

Then it is shown that for the Legendre polynomials ($\alpha = \beta = 0$) and $\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$ the limit and the supremum of the Lebesgue constants may fail to be equal.

С.-Петербургский
государственный университет
e-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 14 июня 2001 г.