

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Shamolin, An introduction to the problem of the braking of a body in a resisting medium, and a new two-parameter family of phase portraits, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1996, Number 4, 57–69

<https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2036>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 20, 2025, 10:49:33



МЕХАНИКА

УДК 517.925.4+531.552

М. В. Шамолин

ВВЕДЕНИЕ В ЗАДАЧУ О ТОРМОЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ И НОВОЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ

§ 1. Постановка задачи

1. В работах [1, 2] начато, а в [3—10] продолжено рассмотрение модельного варианта задачи о плоскопараллельном движении тела в сопротивляющейся среде.

Будем предполагать, что все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоской области AB , перпендикулярной плоскости движения [5, 8] (рис. 1). Точка приложения N силы сопротивления определяется лишь углом атаки α , который измеряется от вектора скорости v середины D пластинки до нормали в этой точке (прямая CD) ($DN=y_N(\alpha)$). Величину силы сопротивления S , вектор которой смещается перпендикулярно пластинке, примем в виде $S=sv^2$, где коэффициент сопротивления s — функция α ($s=s(\alpha)$). Подобные условия возникают при движении тела в среде при струйном или отрывном обтекании [11, 12].

Распределение масс примем таким, чтобы центр масс C тела располагался на срединном перпендикуляре CD к пластинке AB .

Фазовое состояние системы задается величинами: v ; α ; угловой скоростью Ω ; декартовыми координатами D (x_0, y_0); углом поворота φ в плоскости от прямой CD до оси x_0 . Величины v и α рассматриваются как квазискорости системы.

В силу цикличности переменных (x_0, y_0, φ) будем исследовать систему уравнений третьего порядка

$$v' \cos \alpha - \alpha' v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m} v^2,$$

$$v' \sin \alpha + \alpha' v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \Omega' = 0, \quad (1)$$

$$I \Omega' = -y_N(\alpha) s(\alpha) v^2,$$

первые два уравнения которой описывают движение центра масс в проекциях на оси Dx , Dy (рис. 1), а третье получено из теоремы о производной кинетического момента относительно оси Кенига. Здесь введены следующие обозначения: σ — расстояние DC , I — центральный момент инерции, m — масса.

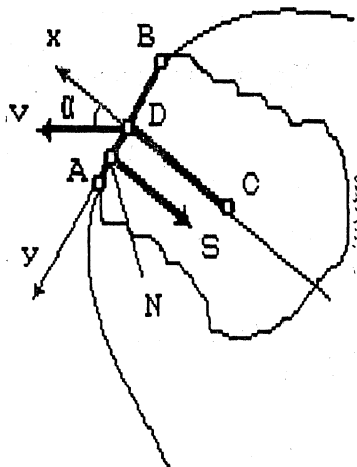


Рис. 1

Систему (1) дополним кинематическими соотношениями

$$\varphi' = \Omega, \quad x'_0 = v \cos(\alpha - \varphi), \quad y'_0 = v \sin(\alpha - \varphi).$$

2. Для качественного описания функций y_N , s из системы (1) используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Будем считать, что функция y_N (соответственно s) достаточно гладкая, нечетная (четная), 2π -периодическая, удовлетворяющая свойствам: $y_N = 0$ ($s = 0$) только в точках πk_1 , $k_1 \in \mathbf{Z}$ (в точках $\frac{\pi}{2} + \pi k_2$, $k_2 \in \mathbf{Z}$), $y'_N(0) > 0$ ($s'(\frac{\pi}{2}) < 0$). Функция y_N (как и s) удовлетворяет также тождеству

$$y_N(\alpha + \pi) = -y_N(\alpha).$$

Класс, содержащий введенные функции s , обозначим через Σ . Поэтому

$$s \in \Sigma. \quad (2)$$

Произведение $\mathcal{F}(\alpha) = y_N(\alpha)s(\alpha)$ является достаточно гладкой, нечетной, π -периодической функцией, равной нулю лишь в точках $\frac{\pi}{2} k_3$, $k_3 \in \mathbf{Z}$ и удовлетворяющей условиям: $\mathcal{F}'(0) > 0$, $\mathcal{F}'(\frac{\pi}{2}) < 0$.

Класс, содержащий функции \mathcal{F} , обозначим через Φ . Поэтому

$$\mathcal{F} \in \Phi. \quad (3)$$

В частности, справедливы включения:

$$\mathcal{F}_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi; \quad AB > 0, \quad (4)$$

$$s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \Sigma; \quad B > 0. \quad (5)$$

3. **Понижение порядка.** После замены времени t ($dq = v dt$) система (1) и первое из кинематических соотношений примут вид:

$$\varphi' = \omega,$$

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (6)$$

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I} \mathcal{F}(\alpha) \cos \alpha + \sigma\omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \quad (7)$$

$$\omega' = -\frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (8)$$

где $' = \frac{d}{dq}$; $\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} \mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \sigma\omega^2 \cos \alpha$.

Новая независимая переменная q — это путь, пройденный центром пластинки. Уравнения (7), (8) образуют замкнутую подсистему.

4. **Относительная структурная устойчивость.** Под структурно устойчивой (грубой) системой дифференциальных уравнений обычно понимают систему, малые деформации в C^1 -топологии которой топологически эквивалентны данной системе, причем деформация берется во всем классе гладких векторных полей $\chi(C^1)$ [13, 14]. Будем рассматривать деформацию векторного поля системы над некоторым подклассом $\chi(\mathcal{A}) \subseteq \chi(C^1)$, определенным с помощью класса функций \mathcal{A} .

Определение [8, 9]. Систему дифференциальных уравнений, заданных гладким векторным полем V , назовем относительно структурно устойчивой (относительно грубой), или грубой по отношению к классу $\mathcal{B} \subseteq C^1$, если любое векторное поле W , полученное достаточно малой деформацией из поля V в C^1 -топологии относительно класса функций \mathcal{B} , топологически эквивалентно полю V .

Как будет следовать из результатов работы, при некоторых условиях система (1) имеет свойство фазовых портретов, каждый топологический тип которого не меняется при деформации вдоль некоторых подмножеств классов функций Φ и Σ . Система в этом случае является структурно устойчивой относительно последних подмножеств.

Таким образом, достаточно рассмотреть систему (1) при условиях (4), (5) и использовать результаты для систем с \mathcal{F} и s достаточно близкими к \mathcal{F}_0 и s_0 .

§ 2. Точки покоя и соответствующие им стационарные движения

Задача исследования точек покоя разбивается на две: о точках покоя системы (6)—(8) в пространстве $R_+\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ и точках покоя системы (7), (8) на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$.

Точки покоя системы (6)—(8) задаются соотношениями с параметрами v_1, v_2, v_3 :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z, \quad \omega = 0; \quad v = v_1; \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}; \quad v = v_2; \quad (10)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}; \quad v = v_3. \quad (11)$$

Каждая из систем (9)—(11) задает в пространстве $R_+\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ прямые, сплошь заполненные точками покоя системы (6)—(8).

Дадим интерпретацию точек покоя систем (9)—(11). Система (9): тело поступательно движется с постоянной скоростью, параллельной пластинке. Системы (10), (11): тело вращается вокруг неподвижного центра масс с постоянной скоростью.

У системы (7), (8) существуют точки покоя на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = 0; \quad (12)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi, \quad k \in Z; \quad \omega = 0; \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = 0; \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}; \quad (15)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}. \quad (16)$$

Системы (14)—(16) и только они задают на плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ точки покоя, в которые в евклидовой метрике ортогонально проектируются многообразия положений равновесия системы (6)—(8).

Системы (12), (13) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{-\frac{B}{m} q}, \quad v^0 = v(0); \\ a(q) &\equiv \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \\ \omega(q) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Интерпретация частных решений (17): тело движется поступательно с углом атаки, равным или 0, или π . При этом скорости всех точек тела убывают со временем, как t^{-1} .

Положения равновесия (12)–(16) назовем тривиальными (ТПР). Наряду с ТПР могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям системы (6)–(8).

Определение. Нетривиальными положениями равновесия (НПР) системы (7), (8) на плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$ называются точки покоя, не лежащие во множестве

$$\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2: \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.$$

Введем обозначение $n_0^2 = \frac{\mathcal{F}'(0)}{I}$. Рассмотрим систему (7), (8) при условиях (4), (5). Если НПР существуют, то они задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega &= a \sin \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{-\frac{B}{m} + \varepsilon \sqrt{\frac{B^2}{m^2} + 4\sigma a(1 + \sigma a)(a^2 - n_0^2)}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем либо $a = a_+ = \frac{n_0}{2}(-\sigma n_0 + \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4})$, либо $a = a_- = \frac{n_0}{2}(\sigma n_0 - \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4})$. Следовательно, при $\sigma n_0 < 2$ НПР не существуют.

Для поиска точек покоя системы (7), (8) приравняем линейную комбинацию правых частей (7) $\omega \cos \alpha$ — (8) $\sin \alpha$ к нулю (деленную на $\cos \alpha$):

$$\omega^2 + \frac{1}{I} g(\alpha) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega g(\alpha) = 0. \quad (19)$$

Здесь $g(\alpha) = \frac{\mathcal{F}(\alpha)}{\cos \alpha}$. Рассмотрим $\max_{\alpha \in (0, \pi/2)} \frac{g(\alpha)}{\sin \alpha} = g^*$. Если принять, что $n^2 = \frac{g^*}{I}$, то уравнение (19) выполнено лишь в ТПР, если

$$\sigma n < 2. \quad (20)$$

Поэтому у системы (7), (8) при условиях (2), (3), (20) не существует НПР. При условиях (4), (5) неравенство (20) эквивалентно $\sigma n_0 < 2$, поскольку в этом случае $n^2 = n_0^2$. Рассмотрим для простоты систему (7), (8), (4), (5) при условии $\sigma n_0 \geq 2$.

Предложение 1. У данной системы существуют НПР, задаваемые равенством (18), тогда и только тогда, когда выполнена одна из групп условий:

а) $B/m > -n_0^2 a_-$, $a = a_-$, $\varepsilon = 1$;

б) $B \leq 2\sigma m (n_0^2 - a_+^2)$, $B^2 \geq 4\sigma m^2 a_+ (1 + \sigma a_+) (n_0^2 - a_+^2)$, $a = a_+$, $\varepsilon = 1$;

в) $B > 2\sigma m (n_0^2 - a_+^2)$, $B/m > -n_0^2/a_+$, $B^2 \geq 4\sigma m^2 a_+ (1 + \sigma a_+) (n_0^2 - a_+^2)$,
 $a = a_+$, $\varepsilon = 1$;

г) $B < 2\sigma m (n_0^2 - a_+^2)$, $B/m < -n_0^2/a_+$, $B^2 \geq 4\sigma m^2 a_+ (1 + \sigma a_+) (n_0^2 - a_+^2)$,
 $a = a_+$, $\varepsilon = -1$.

Следствие 1. Если \mathcal{F} и s достаточно близки к \mathcal{F}_0 и s_0 , то у системы (6)–(8) (соответственно у системы (1)) при условиях (2), (3) существуют частные решения вида

$$v(q) = v_0 e^{\chi q}, \quad v^0 = v(0), \quad \chi = \Psi(\alpha^0, \omega^0) < 0;$$

$$\alpha(q) \equiv \alpha^0, \quad \alpha^0 = \alpha(0);$$

$$\omega(q) \equiv \omega^0, \quad \omega^0 = \omega(0)$$

(частные решения вида

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - v_0 \chi t}, \quad v_0 = v(0);$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0);$$

$$\Omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 - v_0 \chi t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0),$$

при этом

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\Omega_0}{v_0 \chi} \ln(1 - v_0 \chi t), \quad \varphi_0 = \varphi(0),$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 - \varphi_0) - \frac{v_0}{\Omega_0} \sin \left[\alpha_0 - \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \chi} \ln(1 - v_0 \chi t) \right],$$

$$x_0 = x(0),$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 - \varphi_0) + \frac{v_0}{\Omega_0} \cos \left[\alpha_0 - \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \chi} \ln(1 - v_0 \chi t) \right],$$

$$y_0 = y(0).$$

Следствие 2. Траектория центра пластинки, лежащая в плоскости $\mathbf{R}^2(x, y)$ и соответствующая последним частным решениям системы (7), (8), является окружностью с центром в точке

$$\left(x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 - \varphi_0), y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 - \varphi_0) \right) \text{ и радиусом } \frac{v_0}{\Omega_0}.$$

§ 3. О расположении траекторий в фазовом пространстве.
 Симметрии фазового пространства

1. Следующее утверждение можно доказать при помощи характеристических уравнений линеаризованных систем возле соответствующих точек покоя. Далее $B = s(0)$, $\mu_1 = 2 \frac{B}{mn_0}$, $\mu_2 = \sigma n_0$.

Предложение 2. а. Точки (12) являются репеллерами: фокусами, если $\mu_2 < 2$; вырожденными узлами, если $\mu_2 = 2$; узлами, если $\mu_2 > 2$.

б. Точки (13) являются: седлами, если $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) > 4$; аттракторами, если $\mu_2 > \mu_1$, $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$; репеллерами, если $\mu_2 < \mu_1$, $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$. При выполнении последних двух групп условий они являются фокусами, если $\mu_2 < 2$, и узлами, если $\mu_2 > 2$.

в. Точки (14) являются седлами.

г. Точки (15), (16) являются аттракторами: фокусами, если $\mu_1\mu_2 < 4$; вырожденными узлами, если $\mu_1\mu_2 = 4$; узлами, если $\mu_1\mu_2 > 4$.

2. Портрет системы (6) — (8) в $\mathbb{R}_+\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ строится с помощью портрета (7), (8) в $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ посредством поднятия фазовых траекторий с плоскостей в пространство.

Замечание 1. Движение возможно лишь в области

$$B = \{(\alpha, \omega, v) \in \mathbb{R}^3 : v \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, v\}.$$

Сделаем замену переменных $p = \ln v$ в области B. Полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, p\}$ не зависит от p и ортогонально проектируется на любую плоскость $\{v = \text{const}\}$.

Замечание 2. Система (7), (8) при условиях (2), (3) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$: в координатах (α, ω) векторное поле системы меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

§ 4. Введение в топологическую классификацию фазовых портретов

Диаграмма перестроек поля системы (7), (8) возле точки $(\pi, 0)$ изображена на рис. 2. Поведение системы около этой точки определя-

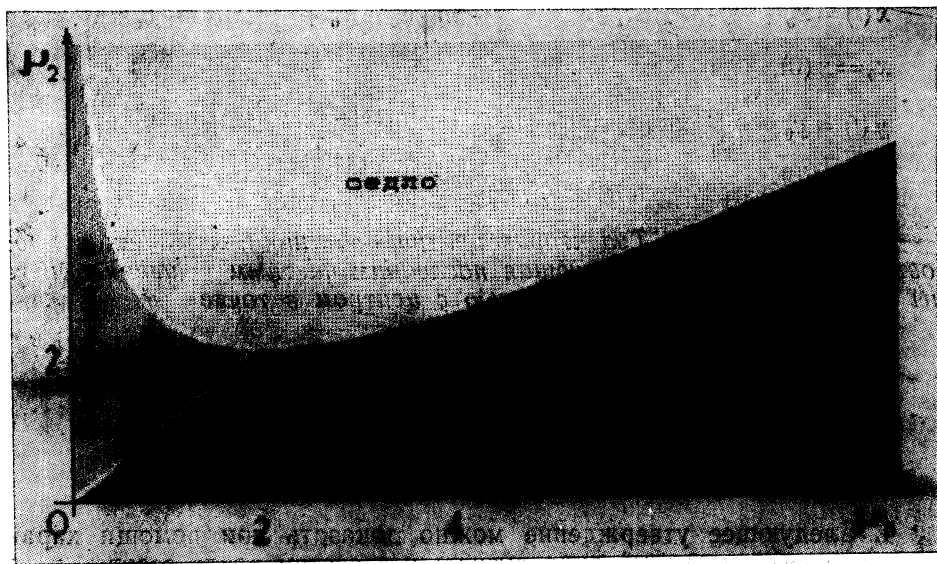


Рис. 2

ет основные топологические особенности глобального портрета. Будем изучать те системы, для которых равенство (19) выполнено лишь в ТПР. Более того, для простоты предполагаем, что выполнено неравенство (20).

В пространстве параметров

$$M^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$$

будем изучать область

$$J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\}.$$

Топологическая классификация ТПР была приведена выше.

В работе [15] доказано существование изолированных траекторий системы (7), (8), уходящих на бесконечность, причем их предельными множествами являются точки $(\pi k, \pm\infty)$, $k \in \mathbb{Z}$. В этой же работе отрицательно решен вопрос о существовании замкнутых траекторий, нестягиваемых по цилиндру $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$ в точку.

В силу замечания 2 задача поиска неизолированных периодических траекторий или предельных циклов сводится к отысканию замкнутых траекторий, содержащих внутри себя лишь точки покоя индекса 1 (см. [16]). Основным вопросом классификации фазовых портретов является вопрос о поведении сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

§ 5. Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов

Исследуем следующую область параметров:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} > \frac{\sigma \mathcal{F}(\alpha)}{I \sin \alpha} \right\}. \quad (21)$$

При выполнении условий (4) и (5) область (21) совпадает с областью OAB , показанной на рис. 2.

Введем семейство полос на фазовой плоскости $\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$, при этом $\Pi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \Pi$, $\Pi_{(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})} = \Pi'$. Далее бу-

дем использовать так называемые системы сравнения для системы (7), (8), т. е. такие системы, топологические типы портретов которых четко установлены. Вычисление угла между полем системы (7), (8) и полем системы сравнения помогает определить топологический тип портрета системы (7), (8). Так, будут рассмотрены топологически различные портреты, а именно фазовый портрет физического маятника

$$\alpha' = \omega,$$

$$\omega' = -\frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) \quad (*)$$

и три топологически различных портрета системы

$$\alpha' = \omega + \frac{\sigma}{I} \mathcal{F}(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha,$$

$$\omega' = -\frac{1}{I} \mathcal{F}(\alpha) - \frac{\alpha}{I} \omega \mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha + \sigma \omega^3 \cos \alpha. \quad (**)$$

О трех типах фазовых портретов системы (**) см. [8, 9].

Следующее предложение справедливо во всем пространстве параметров M^2 благодаря существованию топографической системы Пу-

анкаре (ТСП) в полосе Π [8, 16] (под топографической системой Пуанкаре на плоскости для данной системы понимают семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, окружающих особую точку системы. Семейство обладает свойством: угол между полем данной системы и полем, определяющим ТСП, имеет один и тот же знак в области, сплошь заполненной замкнутыми кривыми. Более точное определение не потребуется, см. [16]).

Предложение 3. Устойчивая сепаратриса в полосе Π для точки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ имеет точку $(0, 0)$ в качестве α -предельного множества.

Предложения 4,5 подводят нас к решению вопроса об α -предельном множестве сепаратрисы, входящей в точку $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосе Π' .

Предложение 4 несет информацию о расположении ТСП, образованной системой (*), в полосе Π' относительно нетривиальной кривой контактов (НКК), предложение 5 — о расположении НКК вблизи седла $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(3\frac{\pi}{2}, 0\right)$. НКК нетривиальна в том смысле, что является не точкой, а топологической окружностью. НКК является кривой контактов в том смысле, что векторные поля систем (7), (8) и (*) касаются на ней [16].

Предложение 4. Рассмотрим систему (7), (8) в области параметров (21). Пусть $\mathcal{F}(\alpha) \sin \alpha \geq 0$ в полосе Π . Если $s(\alpha) \geq m \frac{\sigma}{l} \bar{g}(\alpha)$, где $\bar{g}'(\alpha) = -2\mathcal{F}(\alpha)$, $\bar{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то ТПС с центром в точке $(\pi, 0)$ полностью лежит в области, ограниченной НКК.

Следствие. Пусть выполнены условия (4), (5). Тогда в области параметров (21) выполнено неравенство $B \geq \sigma m l_0^2 \cos \alpha$ из предложения 4. При этом $\bar{g}(\alpha) = AB \cos^2 \alpha$.

Предложение 5. Пусть $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $s'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, $\mathcal{F}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. Тогда НКК пересекает прямую $\{(a, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega = 0\}$ под прямым углом.

Предложение 6 полностью решает вопрос об α -предельном множестве сепаратрисы, входящей в точку $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосе Π' .

Предложение 6. Если выполнены все условия предложений 4, 5, то в области параметров (21) сепаратриса, входящая в точку $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосе Π' , имеет в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0)$.

Схема доказательства. В силу предложения 5 ветвь исследуемой сепаратрисы около точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ лежит в ТСП. В силу предложения 4 данная ТСП в полосе Π' целиком лежит внутри области, ограниченной НКК и содержащей внутри себя точку $(\pi, 0)$.

Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π и из $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π' . (Результат распространяется во всю область параметров M^2 , в которой не существуют

НПР.) Для этого дадим определение индекса сепаратрисного поведения (ИСП).

Определение. ИСП (будем обозначать его isp) называется пара $k = (k_1, k_2)$, где $k_1 \in \mathbb{N}_0 \cup \left\{ k + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$. При этом значение k_2 неоднозначно и может быть равно

$$k_2 = \begin{cases} \text{либо } k_1 - 1/2, \text{ если } k_1 \in \mathbb{N}; \\ \text{либо } k_1 + 1/2, \text{ если } k_1 \in \mathbb{N}_0; \\ \text{либо } k_1 - 1/4, \text{ если } k_1 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и $k_2 = k_1 + 1/4$, если $k_1 \notin \mathbb{N}_0$. Здесь и далее $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. По определению $\text{isp} = k = (k_1, k_2)$, если сепаратриса, выходящая из $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π , имеет в качестве ω -предельного множества точку, отстоящую от точки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ на $2\pi k_1$ по оси α , а сепаратриса, выходящая из $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π' , имеет ω -предельное множество, отстоящее от $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ на $2\pi k_2$ по оси α .

Это определение опирается на тот факт, что сепаратрисы, выходящие из точек $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, лежат в области, частью границы которой являются сепаратрисы, выходящие из точек $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0\right)$.

Основная лемма. Для любого $\text{isp} = k$ из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.

Прежде чем доказывать лемму, приведем несколько утверждений. Поведение сепаратрисы системы (**) при наличии некоторого «возмущения», дающего систему (7), (8), характеризуется предложением 7.

Предложение 7. Возмущение, дающее систему (7), (8), расщепляет сепаратрису системы (**), выходящую из $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и входящую в $\left(3\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Предложение 8. Для любого $M > 0$ и достаточно малого значения $\mu_2 > 0$ найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\mu_1 < \varepsilon$ сепаратриса, выходящая из точки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π , продолжится вправо вдоль оси α более чем на M .

Докажем лемму. Рассмотрим сепаратрису, выходящую из точки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в полосу Π . Фазовый поток системы (7), (8) отображает часть прямой Λ_{-1} на прямую Λ_1 . (Здесь и далее $\Lambda_k = \left\{ (\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -\frac{\pi}{2} + \pi k \right\}$). Рассмотрим отображение прямой Λ_{-1} на Λ_1 в силу фазовых траекторий. Для системы (**), это отображение, по крайней мере вблизи точки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ в области $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega > 0\}$, является тождественным.

Предложение 9. Для системы (7), (8) построенное отображение (там, где оно определено) таково:

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \omega_1\right) \Rightarrow \left(3\frac{\pi}{2}, \omega_2\right); \omega_1 < \omega_2.$$

Продолжим доказательство леммы. Имея в виду непрерывную зависимость данного отображения от параметра μ_1 , рассмотрим при достаточно малых μ_2 зависимость топологии портрета от параметра μ_1 .

Предположим, что сепаратриса, выходящая из точки $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, имеет предельное множество, отстоящее от прямой Λ_{-1} вдоль оси α на $2\pi k_1$, $k_1 \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим ТСП вокруг точки $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(k_1 + 1), \frac{1}{\sigma}\right)$

[9]. Эта система ограничена особой траекторией, уходящей на бесконечность. Уменьшим параметр μ_1 настолько, чтобы точка $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \frac{1}{\sigma}\right)$ перестала быть ω -предельным множеством. «Отделение» сепаратрисы от точки $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \frac{1}{\sigma}\right)$ и «присоединение» к точке $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(k_1 + 1), \frac{1}{\sigma}\right)$ возможно ввиду гладкой зависимости угла между полями системы (7), (8) и системы (**), от параметра μ_1 . Случай $k_1 \in \mathbb{N}_0$ рассмотрен. Позже покажем, что при этом k_2 выбирается из вышеописанного множества. Возможны три логические ситуации для k_2 , когда $k_1 \in \mathbb{N}$.

Напомним, что у систем (7), (8) и (**) существуют бесконечно удаленные предельные точки $(-0, +\infty)$, $(+0, -\infty)$, $(\pi+0, +\infty)$, $(\pi-0, -\infty)$, причем две первые — притягивающие, а последние — отталкивающие. Предложение 10 отличает негрубые ω -предельные множества.

Предложение 10. Значение k_1 может быть равно $r+1/4$, $r \in \mathbb{N}_0$.

Более общее утверждение о строго монотонных полях см. в [15].

Закончим доказательство леммы. Пусть теперь $k_1 = k + 1/4$. Тогда у сепаратрисы, выходящей из точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, нет других ω -предельных множеств, кроме точки $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k_2, \frac{1}{\sigma}\right)$, $k_2 = k + 1/4$, $k_1 \notin \mathbb{N}_0$. Заметим, что данные ω -предельные множества являются грубыми (ввиду гиперболичности притягивающих точек $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{1}{\sigma}\right)$).

В силу последнего, если k_2 фиксировано, то k_1 может быть равно $k_2 \pm 1/2$ (ω -предельное множество перемещается), либо (согласно предложению 10) $k_2 + 1/4$ (негрубое предельное множество). Основная лемма доказана.

Следствие. Рассмотрим систему сравнения (*) для системы (7), (8) (см. [1, 10, 11]). Она описывает консервативную систему. Среди систем вида (7), (8), достаточно мало отличающихся от системы (*), существуют системы с любым из описанных типов портретов.

Некоторые из фазовых портретов (индекс isp принимает три выбранных значения) показаны на рис. 3—5. При этом функции \mathcal{F} и s удовлетворяют условиям (2), (3), а также неравенству из условия (21).

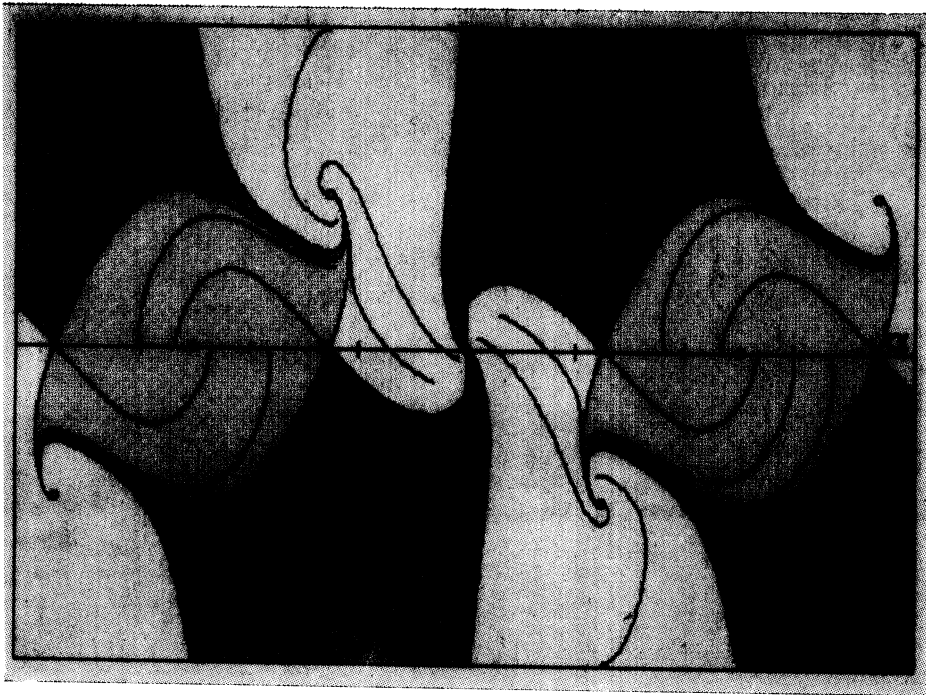


Рис. 3

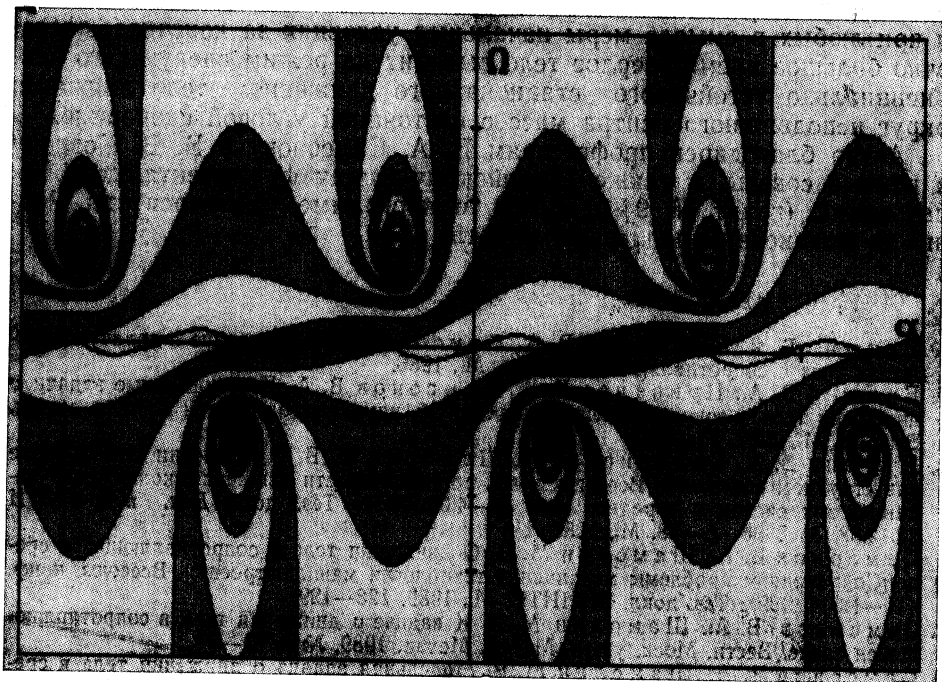


Рис. 4

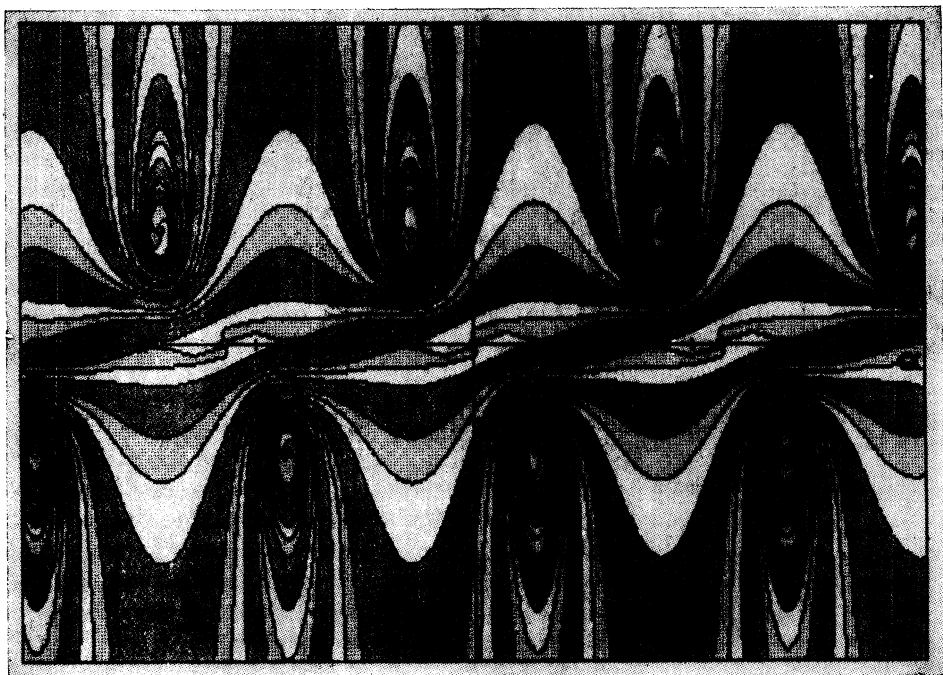


Рис. 5

В заключение хотелось бы отметить общее свойство движения тела. Рассмотрим область (21). Ей соответствует небольшой по сравнению с безразмерной силой безразмерный момент. В этой области почти при любых в смысле начальных условиях за конечное, достаточно большое время твердое тело выходит на режим следующего экспоненциально устойчивого стационарного движения: тело движется вокруг неподвижного центра масс с постоянной угловой скоростью.

Автор благодарен профессорам В. А. Самсонову и В. В. Козлову за ценные советы, а также Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 94-01-01547) и программе «Университеты России» за финансовую поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М., 1986.
2. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде//Сб. научн.-метод. статей по теор. механ. Вып. 18. М., 1987. 75—78.
3. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в среде при струйном обтекании//Всесоюз. конф. по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике (2—4.02.1988): Тез. докл. Деп. в ВИНТИ 22.12.88. № 8886—В—88. М., 1988. 21.
4. Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в сопротивляющейся среде//Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всесоюз. конф. (16—18.04.1989): Тез. докл. ВИНТИ. М., 1989. 128—129.
5. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1989. № 3. 51—54.
6. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием//Нелинейные колебания механических систем: Тез. докл. II Всесоюз. конф. Сентябрь 1990 г. Ч. 2. Горький, 1990. 95—96.
7. Рыжова В. Е., Шамолин М. В. О некоторых аналогиях в задаче о движении

- тела в сопротивляющейся среде//Седьмой Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механ. (15—21.08.1991): Тез. докл. М., 1991. 305.
8. Шамолин М. В. Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. М., 1991.
 9. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 1. 52—58.
 10. Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 2. 52—56.
 11. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М., 1976.
 12. Гуревич Г. И. Теория струй идеальной жидкости. М., 1979.
 13. Нитецкий З. Введение в дифференциальную динамику. М., 1975.
 14. Пали Дж., Смейл С. Теоремы структурной устойчивости//Сб. пер. Математика. 1969. 13, № 2. 145—155.
 15. Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для динамических систем на плоскости//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 1. 68—71.
 16. Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. № 2. 66—70.

Поступила в редакцию
08.04.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 531.351

Н. Н. Кравченко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ЯКОБИ

1. Как показал Якоби [1], задача о движении материальной точки по поверхности эллипсоида под действием упругой силы, направленной к его центру, вполне интегрируема. В [2] построены бифуркационные диаграммы в задаче Якоби и ее вырождениях, когда одна из полуосей эллипсоида устремляется к нулю. В [3] показано, как эти результаты можно перенести на случай пространства постоянной ненулевой кривизны.

С этой целью рассмотрим трехмерную сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 + l^2 = 1 \quad (1)$$

и двумерную поверхность на ней, которая является пересечением сферы и конуса:

$$\frac{x^2}{\mu^2 + \alpha^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - \gamma^2} + \frac{l^2}{\mu^2} = 0. \quad (2)$$

Эта поверхность — аналог двумерного эллипсоида в обычном трехмерном пространстве.

Рассмотрим сначала задачу о движении материальной частицы по трехмерной сфере (1) в сфероконических координатах (ξ, η, μ) , которые определяются как корни уравнения

$$f(\lambda^2) = \frac{x^2}{\lambda^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 + \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 + \gamma^2} + \frac{l^2}{\lambda^2} = 0.$$

Справедливо соотношение

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 + \beta^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 + \gamma^2} + \frac{l^2}{\lambda^2} = \frac{(\lambda^2 - \xi^2)(\lambda^2 + \eta^2)(\lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 + \beta^2)(\lambda^2 + \gamma^2)\lambda^2}. \quad (3)$$