

Л. М. БАРКОВСКИЙ, академик АН БССР Ф. И. ФЕДОРОВ

### ИМПЕДАНСНЫЙ ТЕНЗОР И ПРОХОЖДЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЛОСКОСЛОИСТЫЕ АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Импеданс относится к числу важных понятий электродинамики и физической акустики, применяемых для решения различных задач, связанных с распространением электромагнитных и упругих волн в дискретно или непрерывно неоднородных структурах <sup>(1-7)</sup>. Ниже рассматривается тензор импеданса  $\gamma$  упругой кристаллической среды, который применяется для определения коэффициентов отражения и прохождения упругих волн частоты  $\omega$  через набор плоских однородных анизотропных слоев  $k=1, 2, \dots, N$ , характеризуемых произвольными тензорами модулей упругости  $c_{ijkl}^{(k)}$  и плотностями  $\rho^{(k)}$ . Для этого строится волновая матрица передачи, связывающая амплитуды падающих и отраженных волн на обеих сторонах  $k$ -го слоя, и вычисляется волновая матрица передачи  $M^{(N)}$  набора плоских слоев  $k=1, 2, \dots, N$ .

Метод аналогичен методу пересчета волновой матрицы передачи, известному в теории многополюсников <sup>(3-5, 7)</sup> и теории распространения радиоволн в земной атмосфере <sup>(2, 6)</sup>. Его характерная особенность, которая делает рассмотрение простым и наглядным, состоит в последовательном ковариантном способе расчета, позволяющем избежать поэлементного выписывания матриц в какой-либо частной координатной системе. Еще одна отличительная черта метода связана с введением фазовых тензоров и матриц слоев. Их выделение в расчетной схеме оправдано тем, что, например, при рассмотрении параметрических эффектов внешние воздействия (электрические, магнитные и др.), приложенные к слоям, обычно не меняют исходных матриц передачи для границ и, таким образом, проявляются в основном в фазовых матрицах.

Рассмотрим вначале неограниченную линейную упругую среду, характеризуемую тензором модулей упругости  $c_{ijkl}$ , и введем для нее тензор импеданса. Уравнение движения среды имеет вид

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (1)$$

где  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$  — адиабатические значения модулей упругости,  $\rho$  — плотность среды.

Для плоских волн уравнение (1) переходит в уравнение Кристоффеля <sup>(8)</sup>

$$(\Lambda - v^2) \mathbf{u} = 0, \quad \Lambda = (\Lambda_{il}) = \frac{1}{\rho} (c_{ijkl} n_j n_k), \quad (2)$$

где  $v^2$  — квадрат фазовой скорости волны, а  $\mathbf{n} = (n_k)$  — единичный вектор волновой нормали. Квадраты фазовых скоростей являются корнями характеристического уравнения  $|\Lambda - v^2| = 0$ , которое в общем случае имеет три действительных корня:  $v_0^2, v_+^2, v_-^2$ . При этом единичные векторы соответствующих смещений  $\hat{\mathbf{u}}$  ( $\hat{\mathbf{u}}^2 = 1$ ) изонормальных волн находятся из выражения <sup>(8)</sup>

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{\Lambda - v^2}{\text{Sp}(\Lambda - v^2)} \quad (3)$$

В (3) черта над тензором обозначает взаимный тензор, точка между векторами — диаду.

Таким образом, при заданном  $\mathbf{n}$  и действительном положительно определенном <sup>(8)</sup> тензоре  $\Lambda$  имеем три линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях изонормальных волн, скорости и направления поляризации которых находятся из характеристического уравнения и соотношения (3).

Заметим, что для каждой отдельной изонормальной волны  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \exp\{i\omega(\frac{1}{v}\mathbf{n}\mathbf{r}-t)\}$  из закона Гука вытекает соотношение

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = i \frac{\omega}{v} c_{ijkl} n_k n_l, \quad (4)$$

где  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжения. Умножая обе части уравнения (4) справа на  $\mathbf{n}$  и учитывая (2), получим

$$\sigma_i n_j = i \frac{\omega}{v} c_{ijkl} n_j n_k u_l = i\omega\rho v u_i. \quad (5)$$

Выпишем уравнения (5) для каждой из трех изонормальных волн  $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$  и возьмем их сумму:

$$(\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) n_j = i\omega\rho (v_0 u_i^0 + v_+ u_i^+ + v_- u_i^-). \quad (6)$$

Поскольку для результирующих напряжений и смещений имеем  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-$  и  $u_i = u_i^0 + u_i^+ + u_i^-$ , то соотношение (6) сводится к

$$\sigma \mathbf{n} = \beta \mathbf{u}, \quad (7)$$

причем

$$\beta = i\omega\rho (v_0 \hat{\mathbf{u}}^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}^0 + v_+ \hat{\mathbf{u}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}^+ + v_- \hat{\mathbf{u}}^- \cdot \hat{\mathbf{u}}^-). \quad (8)$$

В (7)  $\sigma$  — тензор результирующего напряжения, вызываемого смещением всех трех распространяющихся вдоль  $\mathbf{n}$  волн. Тензор

$$\gamma = -i\beta/\omega = \rho (v_0 \hat{\mathbf{u}}^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}^0 + v_+ \hat{\mathbf{u}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}^+ + v_- \hat{\mathbf{u}}^- \cdot \hat{\mathbf{u}}^-) \quad (9)$$

будем называть волновым тензорным импедансом анизотропной упругой среды. Как и  $\Lambda$ , тензор  $\gamma$  является действительным, положительно определенным, неособенным, причем

$$\gamma^2/\rho^2 = V^2 = \Lambda, \quad \gamma^{-1} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{v_0} \hat{\mathbf{u}}^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}^0 + \frac{1}{v_+} \hat{\mathbf{u}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}^+ + \frac{1}{v_-} \hat{\mathbf{u}}^- \cdot \hat{\mathbf{u}}^- \right). \quad (10)$$

Тензор  $V$  можно рассматривать как тензор скоростей изонормальных волн. Собственные векторы тензоров  $\gamma, V, \Lambda$  совпадают.

Рассмотрим нормальное падение плоской упругой монохроматической волны из полубесконечной анизотропной среды на систему плоских анизотропных слоев, используя тензор  $\gamma$  (рис. 1).

Предполагаем, что  $\rho$  и  $c_{ijkl}$  изменяются скачкообразно при переходе через границы и постоянны в пределах слоев. Задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (задача Коши) на верхней границе  $l$  (рис. 1). Будем решать эту задачу методом пересчета волновой матрицы передачи.

Граничные условия имеют вид <sup>(8)</sup>

$$\mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{II} = 0, \quad (\sigma^I - \sigma^{II}) \mathbf{q} = 0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{u}^I, \mathbf{u}^{II}$  — векторы смещения точек первой и второй среды на поверхности раздела,  $\sigma^I, \sigma^{II}$  — соответствующие тензоры напряжений,  $\mathbf{q}$  — нормаль к поверхности раздела. Условия (11) справедливы для всех точек на границе. В рассматриваемом случае нормального падения условия (11) принимают вид

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1^r - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2^r = 0, \quad (\sigma_1 - \sigma_1^r - \sigma_2 + \sigma_2^r) \mathbf{n} = 0; \quad (12)$$

здесь индекс  $r$  относится к волнам, распространяющимся вверх. Для проходящих вниз и вверх волн (рис. 1) имеем  $\mathbf{n}=\mathbf{q}$  и  $\mathbf{n}=-\mathbf{q}$  соответственно. Условия (12) на первой границе с учетом (7), (9) переходят в

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1^r - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2^r = 0, \quad \gamma_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1^r) - \gamma_2 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2^r) = 0. \quad (13)$$

Умножив обе части второго уравнения (13) на обратный тензор  $\gamma_2^{-1}$  и взяв сумму и разность уравнений, получим систему двух векторных уравнений, которую можно записать в матричной форме

$$U_2 = I^{21} U_1, \quad (14)$$

где

$$I^{21} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma_2^{-1} \gamma_1 & 1 - \gamma_2^{-1} \gamma_1 \\ 1 - \gamma_2^{-1} \gamma_1 & 1 + \gamma_2^{-1} \gamma_1 \end{pmatrix},$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^r \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2^r \end{pmatrix}. \quad (15)$$

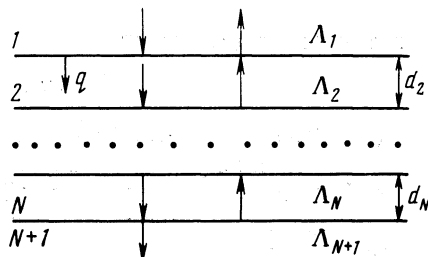


Рис. 1

Аналогично определяется блочная матрица  $I^{k+1, k}$  — волновая матрица передачи на границе  $k$ -го ( $k+1$ )-го слоев.

Воспользовавшись формулами Шура<sup>(9)</sup>, легко показать, что для детерминанта  $|I^{k+1, k}|$  имеет место равенство

$$|I^{k+1, k}| = |\gamma_{k+1}^{-1}| |\gamma_k| = \left( \frac{\rho^{(k)}}{\rho^{(k+1)}} \right)^3 \frac{v_0^{(k)} v_+^{(k)} v_-^{(k)}}{v_0^{(k+1)} v_+^{(k+1)} v_-^{(k+1)}}. \quad (16)$$

Перейдем теперь к рассмотрению упругой слоистой среды (см. рис. 1). При установившемся режиме амплитуды полей на границах слоев отличаются экспоненциальными множителями, учитывающими набег фаз. Легко видеть, что в каждом слое смещение в любой точке, отстоящей на  $z_k$  от верхней его границы, определяется формулой

$$U_k(z_k) = P^{(k)} U_k(0), \quad (17)$$

где фазовая матрица  $P^{(k)}$  в блочной форме имеет вид

$$P^{(k)} = \begin{pmatrix} \pi_k & 0 \\ 0 & \pi_k^* \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\pi_k = \exp(i\varphi_k^0) \hat{\mathbf{u}}_k^0 \cdot \hat{\mathbf{u}}_k^0 + \exp(i\varphi_k^+) \hat{\mathbf{u}}_k^+ \cdot \hat{\mathbf{u}}_k^+ + \exp(i\varphi_k^-) \hat{\mathbf{u}}_k^- \cdot \hat{\mathbf{u}}_k^-.$$

Для первой среды, откуда падает волна, под  $U_1$  подразумевается значение  $U$  на самой верхней границе. При  $z_k = d_k$ , т. е. на нижней границе  $k$ -го слоя, для изонормальных волн  $\mathbf{u}_k^0$ ,  $\mathbf{u}_k^+$ ,  $\mathbf{u}_k^-$  имеем соответственно

$$\varphi_k^0 = \omega d_k / v_0^{(k)}, \quad \varphi_k^+ = \omega d_k / v_+^{(k)}, \quad \varphi_k^- = \omega d_k / v_-^{(k)}.$$

Таким образом, имеем, согласно (12), (14),

$$U_2(d_2) = P^{(2)} I^{21} U_1, \quad U_3(0) = I^{32} U_2(d_2) = I^{32} P^{(2)} I^{21} U_1, \dots \quad (19)$$

Отсюда ясно, что

$$U_N(0) = M^{(N)} U_1, \quad U_N(d_N) = P^{(N)} U_N(0), \quad M^{(N)} = I^{N, N-1} P^{(N-1)} I^{N-1, N-2} \dots I^{21}. \quad (20)$$

Эти соотношения решают поставленную задачу.

Если система слоев заканчивается полубесконечной средой  $N+1$ , то на нижней границе имеем

$$U_{N+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{N+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

При этом, записывая  $M^{(N+1)}$  в блочном виде, получим

$$M^{(N+1)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (22)$$

и соотношения (20) дают

$$\mathbf{u}_1^r = -D^{-1}C\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_{N+1} = (A - BD^{-1}C)\mathbf{u}_1, \quad (23)$$

где  $(-D^{-1}C)$  и  $(A - BD^{-1}C)$  будем называть соответственно тензорами отражения и пропускания волн слоистой структурой. Если требуется найти коэффициент отражения одной из изонормальных волн, например,  $\mathbf{u}_1^+$  в падающей волне, нужно умножить правую и левую части первого уравнения (23) на  $\mathbf{u}_1^+$ .

В заключение отметим, что понятие тензорного импеданса и соответствующий расчет нетрудно обобщить на случай слоев с акустической гиротропией и затуханием. Анализ устойчивости полученного общего решения должен быть предметом отдельного исследования.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило  
31 I 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957. <sup>2</sup> П. Е. Краснушкин, Р. Б. Байбулатов, ДАН, т. 182, № 2, 294 (1968); т. 188, № 2, 300 (1969). <sup>3</sup> Р. Е. Краснушкин, J. Phys., v. 9, 5, 439 (1945). <sup>4</sup> П. Е. Краснушкин, Радиотехника и электроника, т. 10, 7, 1214 (1965). <sup>5</sup> Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, 1959. <sup>6</sup> К. Г. Бадден, Геофизика, 1964. <sup>7</sup> А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич, В. П. Смирнов, Справочник по элементам волноводной техники, М.-Л., 1963. <sup>8</sup> Ф. И. Федоров, Теория упругих волн в кристаллах, «Наука», 1965. <sup>9</sup> А. П. Мишина, И. В. Проскураков, Высшая алгебра, М., 1962.