ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.929

Е. И. БРАВЫЙ

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В монографии [1] развита «теория линейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения», где показано, что для многих сингулярных уравнений можно так выбрать пространство (понятие решения), что в этом пространстве уравнение становится регулярным [2, 3]. В настоящей работе рассматривается сингулярный линейный оператор n-го порядка

$$(\mathscr{L}x)(t)=\prod_{i=1}^{p}(t-a_i)^{\mu_i}x^{(n)}(t)+(Tx)(t),\ t\in[a,b],$$

$$a=a_1<a_2<\ldots<a_p=b,\ n\geqslant 2,\ \mu_i \text{ — целые, } 0\leqslant\mu_1,\ \mu_p\leqslant n-1,$$

$$1\leqslant\mu_i\leqslant n-1,\ i=2,\ldots,p-1.$$

Выбирается такое банахово пространство D и формулируются такие ограничения на оператор T, что $\mathscr{L}$ как оператор, действующий из D в пространство суммируемых на отрезке $[a,b]$ функций, будет непрерывным нётеровым оператором. Таким образом, уравнение $\mathscr{L}x=f$ и краевые задачи для этого уравнения являются объектом изучения монографии [1, гл. 6].

В работе [3] С. М. Лабовский изучал уравнение

$$(t-a)^q(t-b)^{n-q}x^{(n)}(t)+\int_a^b x(s)\,d_sr(t,s)=f(t),\ t\in[a,b],\ 1\leqslant q\leqslant n-1.$$

В нашем распространении подхода работы [3] на уравнение $\mathscr{L}x=f$ число точек, в которых множитель перед n-й производной может иметь нули, а также сумма кратностей этих нулей произвольны.

Используются следующие обозначения: R^k — k-мерное вещественное пространство с нормой $\|\alpha\|_{R^k}=\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|$; $L[a,b]$ — банахово пространство суммируемых на отрезке $[a,b]$ функций $x\colon[a,b]\to R^1$ с нормой $\|x\|_{L[a,b]}=\int_a^b|x(s)|\,ds$; $W^m[a,b]$ — банахово пространство m раз дифференцируемых функций $x\colon[a,b]\to R^1$ с абсолютно непрерывной производной $(m-1)$-го порядка и нормой $\|x\|_{W^m[a,b]}=\|x^{(m)}\|_{L[a,b]}+\sum_{i=0}^{m-1}|x^{(i)}(a)|$; $\chi_e(\cdot)$ — характеристическая функция множества e; $\pi(t)=\prod_{i=1}^{p}(t-a_i)^{\mu_i}$.

1. Введем линейное пространство D таких функций $x\colon[a,b]\to R^1$, что

1) $x^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна в $[a,b]\setminus\{a_1,\ldots,a_p\}$;

2) $\int_a^b|\pi(s)x^{(n)}(s)|\,ds<\infty$;

3) функции $x^{(j)}$ непрерывны при $j=0,1,\ldots,n-1-\mu_i$ в точке a_i, $i=1,\ldots,p$.

При $p=2$, $\mu_1+\mu_2=n$ пространство D совпадает с пространством, используемым в работе [3]. Аналогично лемме 1 этой работы доказывается

Лемма 1. *Если $x^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна в $[a,b]\setminus\{a_1,\dots,a_p\}$ и $\int_a^b|\pi(s)x^{(n)}(s)|ds<\infty$, то существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{t\to a_i+0}x^{(j)}(t)$, $i=1,\dots,p-1$, $\lim\limits_{t\to a_i-0}x^{(j)}(t)$, $i=2,\dots,p$, при $j=0,1,\dots,n-1-\mu_i$.*

Таким образом, существование конечных пределов в условии 3) определения пространства D гарантируется леммой 1.

Рассмотрим «модельное» уравнение

$$\pi(t)x^{(n)}(t)=z(t),\ t\in[a,b]. \tag{1}$$

Лемма 2. *Уравнение (1) разрешимо в D при каждом $z\in L[a,b]$.*

Доказательство. Выберем произвольно точки $t_i\in(a_i,a_{i+1})$, $i=1,\dots,p-1$. Функция $\tilde{x}$, определенная на каждом интервале (a_i,a_{i+1}) равенством $\tilde{x}(t)=\int_{t_i}^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{z(s)}{\pi(s)}ds$, удовлетворяет условиям леммы 1. Положим $\tilde{x}(a_1)=\tilde{x}(a_1+0)$, $\tilde{x}(a_i)=\tilde{x}(a_i-0)$, $i=2,\dots,p$. Функция

$$y(t)=\tilde{x}(t)-\sum_{l=2}^{p-1}\sum_{j=0}^{n-\mu_l-1}[\tilde{x}^{(j)}(a_l+0)-\tilde{x}^{(j)}(a_l-0)]\,\frac{(t-a_l)^j}{j!}\chi_{[a_l,b]}(t),$$

$$t\in[a,b],$$

принадлежит пространству D и удовлетворяет уравнению (1).

Положим $N=\sum\limits_{i=2}^{p-1}\mu_i+n$.

Лемма 3. *Однородное уравнение $\pi x^{(n)}=0$ имеет N-мерное множество решений в пространстве D.*

Доказательство. Множество решений уравнения $\pi x^{(n)}=0$ совпадает с множеством решений уравнения $x^{(n)}=0$. Любое решение последнего уравнения в пространстве D является линейной комбинацией линейно независимых функций $\frac{(t-a)^j}{j!}$, $j=0,1,\dots,n-1$, и $\frac{(t-a_i)^j}{j!}\chi_{[a_i,b]}(t)$, $i=2,\dots,p-1$, $j=n-\mu_i-1,\dots,n-1$.

Пусть $r=\{r_1,\dots,r_N\}:D\to R^N$ — линейный N-мерный вектор-функционал. В силу лемм 2 и 3 условия однозначной разрешимости краевой задачи

$$\pi x^{(n)}=z,\ rx=\alpha \tag{2}$$

и краевой задачи

$$x^{(n)}=z,\ rx=\alpha \tag{3}$$

состоят в невырожденности одной и той же $(N\times N)$-матрицы, составленной из значений функционалов r_i на элементах базиса множества решений однородного уравнения. Следовательно, справедлива

Лемма 4. *Краевые задачи (2) и (3) однозначно разрешимы в D для всех $z\in L[a,b]$, $\alpha\in R^N$ одновременно.*

Для построения однозначно разрешимой модельной задачи (2) можно использовать вектор-функционал, соответствующий краевым условиям многоточечной задачи:

$$rx=\{x(c_1),\dot{x}(c_1),\dots,x^{(\rho_1-1)}(c_1),\dots,x(c_i),\dot{x}(c_i),\dots,x^{(\rho_i-1)}(c_i),\dots$$
$$\dots,x(c_q),\dot{x}(c_q),\dots,x^{(\rho_q-1)}(c_q)\}, \tag{4}$$

где $a \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_q \leqslant b$, $1 \leqslant \rho_i \leqslant n-1$, $i=1, \ldots, q$, $\sum\limits_{i=1}^{q} \rho_i = N$ (если точка c_j совпадает с точкой a_i, то $\rho_j \leqslant n - \mu_i$). Из леммы 4 и результатов работы [4] непосредственно вытекает следующий критерий. Если $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant q,\ c_i \in (a, b)} \rho_i + \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant p-1} \mu_i \leqslant n$, то для однозначной разрешимости задачи (2) с вектор-функционалом r вида (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant q,\ c_i \in [a, a_j]} \rho_i \leqslant n + \sum_{i=2}^{j-1} \mu_i, \quad j=2, \ldots, p-1, \tag{5}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant q,\ c_i \in [a_j, b]} \rho_i \leqslant n + \sum_{i=j+1}^{p-1} \mu_i, \quad j=2, \ldots, p-1; \tag{6}$$

здесь $\sum\limits_{i=k}^{l} \mu_i = 0$, если $l < k$.

Лемма 5. *Для каждого многочлена π существует вектор-функционал вида (4), для которого сингулярная краевая задача (2) однозначно разрешима при любых $z \in L[a, b]$ и $\alpha \in R^N$.*

Доказательство. Пусть $q = N$, $\rho_1 = \ldots = \rho_q = 1$. Выберем точки c_i так, чтобы они не совпадали ни с одной из точек a_j. На интервале (a_1, a_2) возьмем n точек, на интервалах (a_j, a_{j+1}), $j=2, \ldots, p-1$,— по μ_j точек. Тогда в условиях (5) имеет место равенство при каждом $j=2, \ldots, p-1$. Кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{q} \rho_i = N$. Условия (6) выполнены, так как $n + \sum\limits_{i=j+1}^{p-1} \mu_i - \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant q,\ c_i \in [a_j, b]} \rho_i = n - \mu_j > 0$ при $j=2, \ldots, p-1$. Следовательно, задача (2) однозначно разрешима.

2. Пусть краевая задача (2) однозначно разрешима всюду. Введем на линейном пространстве D норму

$$\|x\| = \|\pi x^{(n)}\|_{L[a, b]} + \|rx\|_{R^N}. \tag{7}$$

Теперь D — банахово пространство, изоморфное произведению $L[a, b] \times R^N$, а оператор $x \to \{\pi x^{(n)}, rx\} : D \to L[a, b] \times R^N$ является изоморфизмом. Линейный непрерывный оператор $x \to \pi x^{(n)} : D \to L[a, b]$ будем обозначать δ. Так как δ действует из D на все пространство $L[a, b]$ и $\dim \ker \delta = N$, то δ — нётеров оператор, $\operatorname{ind} \delta = N$.

Отметим, что в отличие от пространств, введенных в работе [2], пространство D изоморфно произведению R^N и всего пространства $L[a, b]$, а не его подпространства.

Теорема 1. *Все нормы (7), введенные в D с помощью различных вектор-функционалов (4), для которых краевая задача (2) однозначно разрешима, эквивалентны.*

Доказательство. Пусть вектор-функционал r определен равенством (4), и краевая задача (2) однозначно разрешима. Выберем произвольно точки $t_i \in (a_i, a_{i+1})$, $i=1, \ldots, p-1$, и введем в D новую норму

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=0}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| + \int_a^b |\pi(s) x^{(n)}(s)|\, ds. \tag{8}$$

Покажем, что в норме (8) оператор $[\delta, r] : D_{\|\cdot\|_1} \to L[a, b] \times R^N$ непрерывен, следовательно, является изоморфизмом. Тогда оператор $x \to x : D_{\|\cdot\|} \to D_{\|\cdot\|_1}$ также изоморфизм, что означает эквивалентность всех норм вида (7) с такими вектор-функционалами (4), что краевая задача (2) однозначно разрешима.

Оператор $\delta: D_{\|\cdot\|_1} \to L[a, b]$ ограничен. Осталось доказать, что каждая из компонент вектор-функционала r является ограниченным функционалом. Пусть $c_l \in [t_i, a_{i+1}]$. Из леммы 1 следует, что при $j=0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, если $c_l \neq a_{i+1}$, и при $j=0, 1, \ldots, n-1-\mu_{i+1}$, если $c_l = a_{i+1}$, выполнено равенство

$$x^{(j)}(c_l) = \sum_{k=j}^{n-1} x^{(k)}(t_i) \frac{(c_l - t_i)^{k-j}}{(k-j)!} + \int_{t_i}^{c_l} \frac{(c_l - s)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} x^{(n)}(s)\, ds.$$

Тогда при тех же j

$$|x^{(j)}(c_l)| \leqslant \sum_{k=j}^{n-1} |x^{(k)}(t_i)| \frac{(c_l - t_i)^{k-j}}{(k-j)!} +$$

$$+ \frac{1}{(n-1-j)!} \max_{t_i \leqslant s < c_l} \left| \frac{(c_l - s)^{n-1-j}}{\pi(s)} \right| \int_{t_i}^{c_l} |\pi(s) x^{(n)}(s)|\, ds \leqslant K \|x\|_1$$

при некотором K для всех $x \in D$. То же самое получаем, если $c_l \in [a_i, t_i]$. Теорема доказана.

В дальнейшем будем считать, что норма в D введена равенством (7) с помощью одного из вектор-функционалов (4).

Теорема 2. *$D \subset W^m[a, b]$ $(m = n - \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \mu_i)$, норма в D не слабее нормы в $W^m[a, b]$.*

Доказательство. Покажем, что норма (8) не слабее нормы в $W^m[a, b]$. Если $x \in D$, то при $i = 1, \ldots, p-1$

$$\int_{t_i}^{a_{i+1}} |x^{(m)}(s)|\, ds \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(a_{i+1} - t_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} +$$

$$+ \int_{t_i}^{a_{i+1}} \int_{t_i}^{t} \frac{(t-s)^{n-1-m}}{(n-1-m)!} |x^{(n)}(s)|\, ds\, dt =$$

$$= \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(a_{i+1} - t_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \int_{t_i}^{a_{i+1}} \frac{(a_{i+1} - s)^{n-m}}{(n-m)!} |x^{(n)}(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(a_{i+1} - t_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \frac{1}{(n-m)!} \times$$

$$\times \max_{t_i \leqslant s \leqslant a_{i+1}} \left| \frac{(a_{i+1} - s)^{n-m-\mu_{i+1}}}{\prod\limits_{j=1, j \neq i+1}^{p} (s - a_j)^{\mu_j}} \right| \int_{t_i}^{a_{i+1}} |\pi(s) x^{(n)}(s)|\, ds,$$

$$\int_{a_i}^{t_i} |x^{(m)}(s)|\, ds \leqslant \sum_{j=m}^{n-1} |x^{(j)}(t_i)| \frac{(t_i - a_i)^{j-m+1}}{(j-m+1)!} + \frac{1}{(n-m)!} \times$$

$$\times \max_{a_i \leqslant s \leqslant t_i} \left| \frac{(a_i - s)^{n-m-\mu_i}}{\prod\limits_{j=1, j \neq i}^{p} (s - a_j)^{\mu_j}} \right| \int_{a_i}^{t_i} |\pi(s) x^{(n)}(s)|\, ds.$$

Кроме того, при $j = 0, 1, \ldots, m-1$

$$|x^{(j)}(a)| \leqslant \sum_{k=j}^{n-1} |x^{(k)}(t_1)| \frac{(t_1 - a)^{k-j}}{(k-j)!} + \int_{a}^{t_1} \frac{(s-a)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} |x^{(n)}(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=j}^{n-1} |x^{(k)}(t_1)| \frac{(t_1-a)^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{1}{(n-1-j)!} \times$$

$$\times \max_{a \leqslant s \leqslant t_1} \left| \frac{(s-a)^{n-1-j-\mu_1}}{\prod_{l=2}^{p} (s-a_l)^{\mu_l}} \right| \int_a^{t_1} |\pi(s) x^{(n)}(s)| ds.$$

Суммируя полученные выше неравенства, имеем, что $x \in W^m[a, b]$, и существует такая постоянная K, что $\|x\|_{W^m[a,b]} \leqslant K \|x\|_1$ для всех $x \in D$. Так как нормы (7) и (8) эквивалентны, то теорема доказана. Отметим, что приведенные доказательства теорем 1 и 2 существенно используют идеи работы [3].

Пусть $[\delta, r]$ — изоморфизм. Обозначим $[\delta, r]^{-1} = \{\Lambda, Y\} : \{\Lambda, Y\} \times \times \{z, \beta\} = \Lambda z + Y\beta$, $z \in L[a, b]$, $\beta \in R^N$. Из теоремы 2 следует, что линейный непрерывный оператор $\Lambda : L[a, b] \to D$ непрерывно действует из $L[a, b]$ в $W^1[a, b]$, а такой оператор имеет интегральное представление (см., например, [1, с. 51]) и его ядро — функция Грина краевой задачи (2) $\Lambda(t, s)$ — ограничено в существенном на $[a, b] \times [a, b]$ [5, с. 100]. При каждом $t \in [a, b]$ сечение ядра $\Lambda(t, \cdot)$ как функция переменной s определено на отрезке $[a, b]$ с точностью до множества нулевой меры. Поэтому, не оговаривая это в дальнейшем, считаем, что все утверждения относительно $\Lambda(t, s)$ при каждом $t \in [a, b]$ выполняются при почти всех $s \in [a, b]$.

Теорема 3. $\Lambda(t, s) = \dfrac{G(t, s)}{\pi(s)}$ *при* $t, s \in [a, b]$, *где* $G(t, s)$ — *функция Грина краевой задачи (3).*

Доказательство. Для таких $z \in L[a, b]$, что $\int_a^b \left| \dfrac{z(s)}{\pi(s)} \right| ds < \infty$, выполнено $(\Lambda z)(t) = \int_a^b \dfrac{G(t, s)}{\pi(s)} z(s) ds$, $t \in [a, b]$. Таким образом, $\Lambda(t, s) = \dfrac{G(t, s)}{\pi(s)}$ при $t, s \in [a, b]$, $|s - a_i| > \varepsilon$, $i = 1, \dots, p$, для каждого $\varepsilon > 0$. Это значит, что $\Lambda(t, s) = \dfrac{G(t, s)}{\pi(s)}$ при $t, s \in [a, b]$.

Итак, для построения изоморфизма пространств D и $L[a, b] \times R^N$ достаточно найти функцию Грина краевой задачи (3). Следует отметить, что пространство решений задачи (3) состоит из функций без разрывов производных (т. е. является пространством $W^n[a, b]$) только если $p = 2$. Пространство решений сопряженной задачи [4] к задаче (3) может быть пространством $W^n[a, b]$ лишь тогда, когда $\sum_{i=1}^{p} \mu_i \leqslant n$. В работе [3] рассматривается случай, когда оба эти условия выполнены. В нашем же случае приходится пользоваться более широким пространством, чем $W^n[a, b]$.

3. Следующие две теоремы посвящены вопросу об условиях сохранения знака функции Грина $\Lambda(t, s)$ задачи (2).

Теорема 4. *Функция Грина* $\Lambda(t, s)$ *краевой задачи (2) с функционалом* r *вида (4), где* $c_1 = a$, $c_q = b$, $\max\limits_{2 \leqslant i \leqslant p-1} \mu_i + \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant q-1} \rho_i \leqslant n$, *сохраняет знак тогда и только тогда, когда* ρ_i *четны при* $i = 2, \dots, q-1$. *В этом случае* $(-1)^{\mu_p + \rho_q} \Lambda(t, s) \geqslant 0$, $t, s \in [a, b]$.

Доказательство. Из теоремы 2 работы [4] следует, что

$$(-1)^{\rho_q} \prod_{i=2}^{q-1} (t - c_i)^{\rho_i} \prod_{i=2}^{p-1} (s - a_i)^{\mu_i} G(t, s) \geqslant 0, \ t, s \in [a, b],$$

где G — функция Грина задачи (3). Отсюда

$$(-1)^{\rho_q+\mu_p}\prod_{i=2}^{q-1}(t-c_i)^{\rho_i}\Lambda(t,s)\geqslant 0,\ t,s\in[a,b].$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *Если $\mu_i\leqslant n-2$, $i=1,2,\dots,p$, то существует такой вектор-функционал r вида (4), что функция Грина краевой задачи (2) неотрицательна.*

Доказательство. Пусть $c_1=a$, $c_q=b$, ρ_1 и ρ_q равны либо 1, либо 2, причем четность ρ_q совпадает с четностью μ_p, а четность ρ_1 совпадает с четностью $n+\sum_{i=2}^{p-1}\mu_i-\rho_q$. Точки c_i, $i=2,\dots,q-1$, выберем так, чтобы они не совпадали с точками a_j. Число точек c_i на интервале (a_j,a_{j+1}) обозначим α_j, $j=1,\dots,p-1$. Положим $\rho_i=2$, $i=2,\dots,q-1$. Выбираем точки c_i так, что $\alpha_1=\left[\frac{n-\rho_1}{2}\right]$, $\alpha_k=\left[\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=2}^{k}\mu_i-\rho_1\right)\right]-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i$, $k=2,\dots,p-2$ ($[l]$ — целая часть l), $\alpha_{p-1}=\frac{1}{2}\left(n+\sum_{i=2}^{p-1}\mu_i-\rho_1-\rho_q\right)-\sum_{i=1}^{p-2}\alpha_i$. Таким образом, условие $\sum_{i=1}^{q}\rho_i=N$ и условия (5) выполнены. Кроме того, $n+\sum_{i=2}^{j-1}\mu_i-\rho_1-2\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i\leqslant 1$ при $j=2,\dots,p-1$. Тогда $n+\sum_{i=j+1}^{p-1}\mu_i-\rho_q-2\sum_{i=j}^{p-1}\alpha_i=n-\mu_j-\left(n+\sum_{i=2}^{j-1}\mu_i-\rho_1-2\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i\right)>0$ при $j=2,\dots,p-1$, т. е. условия (6) также выполнены. Таким образом, задача (2) однозначно разрешима, и вектор-функционал r удовлетворяет условиям теоремы 4. Так как $\mu_p+\rho_q$ четно, то теорема доказана.

4. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\mathscr{L}:D\to L[a,b]$

$$(\mathscr{L}x)(t)=\pi(t)x^{(n)}(t)+(Tx)(t),\ t\in[a,b],$$

где оператор $T:D\to L[a,b]$ вполне непрерывен (в силу теоремы 2 для этого достаточно полной непрерывности T как оператора из $W^m[a,b]$ в $L[a,b]$). Так как оператор δ нётеров, то оператор $\mathscr{L}$ также нётеров, $\operatorname{ind}\mathscr{L}=\operatorname{ind}\delta=N$. Получили, что уравнение $\mathscr{L}x=f$, $x\in D$, $f\in L[a,b]$, не является сингулярным, а представляет собой одну из реализаций абстрактного функционально-дифференциального уравнения (см. § 6.1 монографии [1]). При этом главная часть оператора $\mathscr{L}$ — оператор $Q=\mathscr{L}\Lambda$ — является фредгольмовым оператором, действующим в пространстве $L[a,b]$. Краевая задача

$$\mathscr{L}x=f,\ l^ix=\alpha_i,\ \alpha_i\in R^1,\ i=1,\dots,N,\ f\in L[a,b],\ x\in D, \tag{9}$$

с линейно независимой системой линейных ограниченных функционалов $l^i:D\to R^1$, $i=1,\dots,N$, также будет фредгольмовой задачей [1, с. 103].

В частности, справедлива теорема [1, с. 105]:

следующие утверждения эквивалентны:

а) уравнение $\mathscr{L}x=f$ разрешимо для каждого $f\in L[a,b]$;

б) $\dim\ker\mathscr{L}=N$;

в) существует такой ограниченный вектор-функционал $l:D\to R^N$, что краевая задача (9) однозначно разрешима.

Можно заменить операцию $x^{(n)}$ линейным неосциллирующим на отрезке $[a,b]$ дифференциальным оператором n-го порядка

$$(\delta x)(t)=x^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1} p_i(t)x^{(i)}(t),\ t\in[a,b],\ p_i\in L[a,b],$$

а пространство $L[a,b]$ любым лебеговым пространством $L_p[a,b]$, $p>1$. Все приведенные выше утверждения при этом сохраняются.

5. Для измеримой $h\colon [a,b]\to R^1$ обозначим

$$x_h(t)=\begin{cases} x(h(t)), & \text{если } h(t)\in[a,b],\\ 0, & \text{если } h(t)\notin[a,b].\end{cases}$$

Рассмотрим вопрос об условиях однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{aligned}&\pi(t)x^{(n)}(t)+p(t)x_h(t)=f(t),\ t\in[a,b],\\ &rx=0,\end{aligned}\tag{10}$$

где $p, f\in L[a,b]$, $r\colon D\to R^N$ — вектор-функционал вида (4), для которого однозначно разрешима краевая задача (2), $x\in D$.

Подстановка $x(t)=\int_a^b \Lambda(t,s)z(s)ds$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами решений краевой задачи (10) и уравнения относительно $z\in L[a,b]$

$$z(t)+p(t)\int_a^b \Lambda(h(t),s)z(s)ds=f(t),\ t\in[a,b],$$

где $\Lambda(t,s)=0$ при $(t,s)\notin[a,b]\times[a,b]$. Оценивая норму интегрального оператора в левой части последнего уравнения, получаем достаточное условие однозначной разрешимости задачи (10)

$$M\int_a^b |p(t)|\chi_{[a,b]}(h(t))dt<1,$$

где $M=\operatorname{v.sup}\limits_{a\leqslant t,s\leqslant b}|\Lambda(t,s)|$.

В каждом конкретном случае число M можно вычислить. Например, при $t\in[-a,a]$

а) если $n=3$, $\pi(t)=(t+a)t(t-a)$, $rx=\{x(-a),\dot x(-a),x(a),\dot x(a)\}$, то $M=\dfrac{1}{4a}$;

б) если $n=3$, $\pi(t)=(t+a)^2(t-a)^2$, $rx=\{x(-a),x(0),x(a)\}$, то $M=\dfrac{1}{8a^2}$;

в) если $n=4$, $\pi(t)=(t+a)^3(t-a)^3$, $rx=\{x(-a),x(0),\dot x(0),x(a)\}$, то $M=\dfrac{1}{48a^3}$;

г) если $n=4$, $\pi(t)=(t+a)t^2(t-a)$, $rx=\{x(-a),\dot x(-a),\ddot x(-a),x(a),\dot x(a),\ddot x(a)\}$, то $M=\dfrac{1}{12a}$ (см. [6]). Оценки величины M при $\pi(t)=(t-a)^q(t-b)^{n-q}$, $1\leqslant q\leqslant n-1$, можно получить с помощью теоремы 2 работы Ю. В. Покорного [7].

6. В заключение рассмотрим вариационную задачу, которая становится регулярной, если искать решение в пространстве D. Здесь при определении пространства D заменяем пространство $L[a,b]$ пространством $L_2[a,b]$. Получим условие существования в D решения задачи

$$\int_a^b \left\{\frac{1}{2}\,[\pi(s)x^{(n)}(s)]^2+(T_1x)(s)(T_2x)(s)+(T_3x)(s)\right\}ds\to\min,$$
$$rx=\alpha,\ \ \alpha\in R^N, \tag{11}$$

где D изоморфно $L_2[a,b]\times R^N$, а изоморфизмом является оператор $[\delta, r]:D\to L_2[a,b]\times R^N$ $((\delta x)(t)=\pi(t)x^{(n)}(t),\ [\delta,r]^{-1}=\{\Lambda, Y\})$. Кроме того, T_1, $T_2:D\to L_2[a,b]$, $T_3:D\to L[a,b]$ — линейные ограниченные операторы, операторы $T_1\Lambda$, $T_2\Lambda:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ интегральные:

$$(T_i\Lambda z)(t)=\int_a^b Q_i(t,s)z(s)ds,\ \ t\in[a,b],\ i=1,2.$$

Подстановка $x(t)=\int_a^b \Lambda(t,s)z(s)ds+Y\alpha,\ \ z\in L_2[a,b]$ сводит задачу (11) к задаче в $L_2[a,b]$:

$$\int_a^b\left\{\frac{z^2(t)}{2}+\int_a^b Q_1(t,s)z(s)ds\int_a^b Q_2(t,s)z(s)ds+(Tz)(t)\right\}\to\min, \tag{12}$$

где $T:L_2[a,b]\to L[a,b]$ — линейный ограниченный оператор.

Можно показать, что достаточным условием однозначной разрешимости задачи (12) является неравенство $\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)\,dtds<1$, где $K(t,s)=$ $=\int_a^b\{Q_2(\tau,t)Q_1(\tau,s)+Q_1(\tau,t)Q_2(\tau,s)\}d\tau,\ \ t,s\in[a,b]$.

Если $(T_1x)(t)=p_1(t)x_{h_1}(t)$, $(T_2x)(t)=p_2(t)x_{h_2}(t)$, где h_1, h_2: $[a,b]\to R^1$ измеримы, p_1, $p_2\in L[a,b]$, $M=\operatorname*{v.sup}_{a\leqslant t,\ s\leqslant b}|\Lambda(t,s)|$, то справедлива

Т е о р е м а 6. *Задача (11) имеет единственное решение в пространстве D при любых $\alpha\in R^N$ и $T_3:D\to L[a,b]$, если*

$$\int_a^b |p_1(\tau)p_2(\tau)|\chi_{[a,b]}(h_1(\tau))\chi_{[a,b]}(h_2(\tau))d\tau<\frac{1}{2M^2(b-a)}.$$

П р и м е р 1. Если $T_1=0$, то задача (11) имеет единственное решение в пространстве D.

П р и м е р 2: Рассмотрим вариационную задачу

$$\int_{-1}^1\{[(s-1)s^2(s+1)x^{\mathrm{IV}}(s)]^2+p(s)[x_h(s)]^2+(Tx)(s)\}ds\to\min,$$

$$x(-1)=\alpha_1,\ \dot x(-1)=\alpha_2,\ \ddot x(-1)=\alpha_3,$$
$$x(1)=\alpha_4,\ \dot x(1)=\alpha_5,\ \ddot x(1)=\alpha_6,\ x\in D.$$

Здесь D — пространство абсолютно непрерывных функций x: $[-1,1]\to R^1$, у которых $\dot x$ абсолютно непрерывна в $[-1,1]$, $\ddot x$ локально абсолютно непрерывна в $[-1,0)$ и $(0,1]$, $\dddot x$ локально абсолютно непрерывна в $(-1,0)$ и $(0,1)$ и $\int_{-1}^1[(s-1)s^2(s+1)x^{\mathrm{IV}}(s)]^2ds<\infty$.

Так как в данном случае $M=1/12$, то из теоремы 6 следует, что если $\int_{-1}^1|p(t)|dt<72$, то задача имеет единственное решение при всех измеримых h: $[-1,1]\to R^1$, при любом линейном ограниченном операторе $T:D\to L[a,b]$ и любых $\alpha_i\in R^1$, $i=1,\dots,6$.

Литература

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М., 1991.
2. Шиндяпин А. И. // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 3. С. 450—455.
3. Лабовский С. М. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 10. С. 1695—1704.
4. Дерр В. Я. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 11. С. 1861—1872.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. М., 1968.
6. Бравый Е. И. // Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 1991. С. 12—19.
7. Покорный Ю. В. // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 5. С. 653—664.

Пермский политехнический институт

Поступила в редакцию 2 июля 1992 г.