

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Pastor, About vertices of degree 6 of C_3 -critical minimal 6-connected graph,
Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2014, Volume 427, 89–104

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

January 25, 2025, 22:48:57



А. В. Пастор

О СТРУКТУРЕ C_3 -КРИТИЧЕСКИХ
МИНИМАЛЬНЫХ k -СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Основные обозначения. Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер — $E(G)$. Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$, соответственно. Степень вершины v обозначается через $d_G(v)$, а наименьшая из степеней вершин графа G — через $\delta(G)$.

Пусть $A \subset V(G)$. Через $G(A)$ обозначается индуцированный подграф графа G на множестве A , а через $G - A$ — граф, полученный из G удалением всех вершин множества A и всех инцидентных им ребер (т. е. $G - A = G(V(G) \setminus A)$). Для $v \in V(G)$ положим $G - v = G - \{v\}$. Подграфы, получаемые из G удалением некоторых ребер, обозначаются аналогично: если $B \subset E(G)$, то через $G - B$ обозначается граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$. Для $e \in E(G)$ положим $G - e = G - \{e\}$.

Определение 1. Вершинной связностью графа G называется мощность наименьшего подмножества $T \subset V(G)$, такого, что граф $G - T$ является несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). Вершинная связность графа G обозначается $\kappa(G)$. Граф G называется k -связным, если $\kappa(G) \geq k$.

Очевидно, что $\delta(G) \geq \kappa(G)$. Пусть теперь $\kappa(G) = k$. Множество вершин графа G , имеющих степень k , мы обозначим через $V_k(G)$, а множество вершин, степень которых больше k — через $V_{k+1}(G)$. Также мы будем использовать следующие обозначения: $v_k(G) = |V_k(G)|$, $v_{k+1}(G) = |V_{k+1}(G)|$, $G_k = G(V_k(G))$, $G_{k+1} = G(V_{k+1}(G))$, $e_k(G) =$

Ключевые слова: k -связность, минимальный k -связный граф, C_3 -критический k -связный граф.

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1 и гранта РФФИ No. 14-01-00545-а.

$|E(G_k)|$, $e_{k+1}(G) = |E(G_{k+1})|$, $e_{k,k+1}(G) = e(G) - e_k(G) - e_{k+1}(G)$. Для вершины $v \in V_k(G)$ обозначим через $d_k(G)$ ее степень в графе G_k .

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v . Аналогично, *окрестностью* множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G , которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A . *Окрестностью* подграфа H мы будем называть окрестность его множества вершин (т. е. $N_G(H) = N_G(V(H))$). Через \overline{H} мы будем обозначать подграф $G - (V(H) \cup N_G(H))$. Другими словами, \overline{H} — это подграф графа G , индуцированный множеством вершин, не входящих в H и не смежных с вершинами из H .

1.2. Разделяющие множества и фрагменты.

Определение 2. *Множество $T \subset V(G)$ называется разделяющим, если граф $G - T$ несвязен. Разделяющее множество, содержащее ровно k вершин, называется также k -разделяющим. Множество всех k -разделяющих множеств графа G мы будем обозначать $\mathfrak{T}_k(G)$. При $k = \kappa(G)$ мы будем писать $\mathfrak{T}(G)$ вместо $\mathfrak{T}_k(G)$.*

Будем говорить, что разделяющее множество T отделяет подграф H графа G , если подграф H представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех компонент связности графа $G - T$. В этом случае мы будем также говорить, что множество T отделяет множество $V(H)$.

Замечание 1. Заметим, что множество $N_G(H)$ отделяет подграф H в том и только в том случае, если $V(\overline{H}) \neq \emptyset$. В частности это означает, что для любого подграфа H графа G выполнено хотя бы одно из следующих двух утверждений: либо $V(\overline{H}) = \emptyset$, либо $|N_G(H)| \geq \kappa(G)$.

Определение 3. *Подграф H графа G называется фрагментом, если существует множество $T \in \mathfrak{T}(G)$, отделяющее подграф H . Фрагмент, отделяемый множеством T , называется также T -фрагментом. Связные T -фрагменты мы будем также называть T -компонентами.*

Дополнением T -фрагмента H мы будем называть подграф \overline{H} .

Замечание 2. Очевидно, что для любого T -фрагмента H его дополнение также будет T -фрагментом. Более того, дополнением фрагмента \overline{H} будет H .

В дальнейшем, для удобства изложения, вместо “компонента связности” будем говорить просто “компонента”.

Определение 4. Будем говорить, что разделяющее множество T графа G разделяет множество $X \subset V(G)$, если существуют вершины $u, v \in X \setminus T$, принадлежащие разным компонентам графа $G - T$. Также будем говорить, что множество T разделяет вершины x и y , если оно разделяет множество $\{x, y\}$.

1.3. Минимальные и минимальные относительно стягивания k -связные графы. При исследовании структуры k -связных графов важную роль играют две элементарные операции: удаление и стягивание ребра (при стягивании ребра e из графа G удаляются оба его конца и вместо них добавляется новая вершина, смежная с теми и только с теми вершинами, которые были смежны хотя бы с одним из концов ребра e). Граф, получаемый из G стягиванием ребра e мы обозначим $G \cdot e$.

Определение 5. 1) k -связный граф G называется минимальным, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k -связным.

2) k -связный граф G называется минимальным относительно стягивания, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G \cdot e$ не является k -связным.

Замечание 3. Пусть G – минимальный k -связный граф, $xy \in E(G)$ и T – $(k - 1)$ -разделяющее множество графа $G - xy$. Тогда очевидно, что граф $G - xy - T$ состоит ровно из двух компонент связности, одна из которых содержит вершину x , а другая – y .

Одним из важнейших результатов в теории минимальных k -связных графов является следующая теорема.

Теорема 1 (W. Mader, [9]). Пусть G – минимальный k -связный граф и C – множество вершин произвольного цикла в G . Тогда $C \cap V_k(G) \neq \emptyset$.

Фактически это означает, что граф G_{k+1} является лесом (напомним, что через G_{k+1} мы обозначили индуцированный подграф графа G на множестве вершин, степени которых больше k).

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после того, как W. T. Tutte в работе [13] дал описание структуры трехсвязного графа в терминах удаления и стягивания ребер.

R. Halin в работе [7] доказал, что в любом минимальном k -связном графе есть вершина степени k и поставил вопрос об оценке количества таких вершин. Ответ на этот вопрос дал W. Mader в работе [10], где было доказано, что для любого минимального k -связного графа выполнено неравенство

$$v_k(G) \geq \frac{k-1}{2k-1}v(G) + \frac{2k}{2k-1}. \quad (1)$$

Более того, эта оценка точная, что подтверждается бесконечной серией примеров.

С минимальными по стягиванию графами ситуация несколько сложнее. При $k \leq 3$ минимальным по стягиванию k -связным графом является только полный граф. Минимальные по стягиванию 4-связные графы были полностью классифицированы в работах M. Fontet [6] и Н. Мартинова [12]. В этих работах, в частности, было доказано, что все вершины любого такого графа имеют степень 4. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов исследовалась в большом числе работ. Заключительной в этом исследовании стала работа [2], в которой К. Ando и Т. Iwase доказали, что для любого минимального по стягиванию 5-связного графа G выполнено неравенство $v_5(G) \geq \frac{1}{2}v(G)$, причем константу $\frac{1}{2}$ нельзя заменить на большую. Для минимальных по стягиванию 6- и 7-связных графов известные результаты значительно скромнее. В работе [3] К. Ando, А. Kaneko и К. Kawagabayashi доказали, что для любого минимального по стягиванию 6-связного графа G выполнено $v_6(G) \geq \frac{1}{7}v(G)$. В этой же работе приведена серия примеров минимальных по стягиванию 6-связных графов, в которых $v_6(G) = \frac{1}{2}v(G)$. Для 7-связных графов лучшим продвижением, по-видимому является результат М. Li, Х. Yuan и J. Su, которые в работе [8] доказали, что для любого минимального по стягиванию 7-связного графа выполнено $v_7(G) \geq \frac{1}{22}v(G)$. При $k \geq 8$ на данный момент не доказано существование в минимальном по стягиванию k -связном графе даже одной вершины степени k .

Исследовались также и графы, одновременно обладающие обоими свойствами: минимальности и минимальности по стягиванию. Для таких графов долгое время лучшей нижней оценкой количества вершин степени k при $k > 4$ являлось неравенство (1), верное для всех минимальных k -связных графов. Однако недавно появились работы, в которых для минимальных и минимальных по стягиванию k -связных графов при $5 \leq k \leq 10$ были доказаны более сильные оценки. При

$k = 5$ лучшей на данный момент является оценка $v_5(G) \geq \frac{2}{3}v(G)$, полученная в работе [4]. Для $6 \leq k \leq 10$ в работах [15–17] было доказано, что $v_k(G) > \frac{1}{2}v(G)$. Бесконечные серии примеров, дающие нетривиальные верхние оценки при всех $k \geq 5$, были построены в работе [18].

1.4. C_3 -критические минимальные 6-связные графы. W. Madeg в работе [11] предложил следующее естественное обобщение понятия минимального по стягиванию графа.

Определение 6. *k -связный граф G называется C_m -критическим, если для любого полного подграфа H графа G , такого, что $v(H) \leq m$, существует k -разделяющее множество, содержащее $V(H)$.*

Пусть k -связный граф G не является полным. Тогда он является минимальным по стягиванию тогда и только тогда, когда он является C_2 -критическим. Таким образом, обсуждавшийся выше вопрос о количестве вершин степени k в минимальном по стягиванию k -связном графе эквивалентен аналогичному вопросу для C_2 -критических графов. В данной работе мы делаем первый шаг в исследовании вопроса о количестве вершин степени k в C_m -критических графах при $m > 2$.

Замечание 4. Отметим, что C_1 -критические k -связные графы – это графы, которые перестают быть k -связными при удалении любой вершины. Такие графы обычно называют просто *критическими*. В работе [5] было показано, что при $k > 3$ существуют критические k -связные графы, не содержащие ни одной вершины степени k .

В работе [11] доказано, что C_3 -критические k -связные графы могут существовать только при $k \geq 6$. Так что целью данной работы будет исследование структуры C_3 -критических минимальных 6-связных графов. Основным объектом исследований будет подграф G_6 (индуцированный подграф на множестве вершин степени 6) C_3 -критического минимального 6-связного графа G . Мы докажем, что каждая компонента подграфа G_6 содержит цикл и выведем из этого следующее неравенство: $v_6(G) > \frac{5}{9}v(G)$.

§2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

В этом разделе мы перечислим доказанные ранее леммы, которые понадобятся нам в данной работе, и докажем несколько новых лемм.

2.1. Зависимые и независимые разделяющие множества.

Определение 7. Назовем разделяющие множества R и T графа G независимыми, если R не разделяет T , и T не разделяет R . В противном случае мы будем называть эти множества зависимыми.

Лемма 1 (см. [14]). Пусть k -разделяющие множества R, T таковы, что R не разделяет T . Тогда T не разделяет R (то есть, эти множества независимы).

2.2. Лемма о кресте. Пусть T_1, T_2 – пара зависимых k -разделяющих множеств k -связного графа G . Рассмотрим T_1 -фрагменты H_{21} и $H_{22} = \overline{H_{21}}$, а также T_2 -фрагменты H_{11} и $H_{12} = \overline{H_{11}}$. Введем следующие обозначения для пересечений множеств вершин этих фрагментов друг с другом и с множествами T_1, T_2 (см. рисунок 1)

- $P = T_1 \cap T_2$;
- $T_{ij} = T_i \cap V(H_{ij})$;
- $S_{ij} = V(H_{1i}) \cap V(H_{2j})$;
- $R_{ij} = T_{1i} \cup P \cup T_{2j}$.

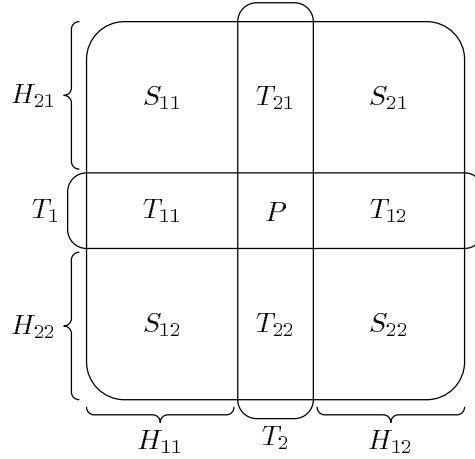


Рис. 1. стандартные обозначения для пересечений фрагментов друг с другом и с разделяющими множествами.

Эти обозначения мы будем считать стандартными и использовать в дальнейших рассуждениях. Отметим, что для любых $i, j \in \{1, 2\}$ если

$S_{ij} \neq \emptyset$, то $N_G(S_{ij}) \subset R_{ij}$. Множества S_{ij} и S_{kl} мы будем называть *соседними*, если они отличаются заменой ровно одного индекса (т.е. либо $i = k, j \neq l$, либо $i \neq k, j = l$).

Лемма 2 (о кресте). Пусть $R_{11}, R_{21} \notin \mathfrak{T}_k(G)$. Тогда существуют $i, j \in \{1, 2\}$, такие, что $T_{ij} = V(H_{ij})$ и $|T_{ij}| \leq \frac{k-|P|}{2}$.

Доказательство. Заметим, что $|R_{11}| + |R_{22}| = 2k$. Пусть $S_{11} \neq \emptyset$. Тогда, поскольку множество R_{11} отделяет S_{11} , но не является k -разделяющим, имеем $|R_{11}| > k$, следовательно, $|R_{22}| < k$, откуда $S_{22} = \emptyset$. Таким образом, хотя бы одно из множеств S_{11} и S_{22} пусто. Аналогично, хотя бы одно из множеств S_{12} и S_{21} пусто. Тогда среди множеств S_{ij} найдутся два соседних пустых множества.

Не умаляя общности будем считать, что $S_{11} = S_{12} = \emptyset$ (с этого момента мы не будем пользоваться тем, что множества R_{11} и R_{21} не являются k -разделяющими: мы будем пользоваться только тем, что среди S_{ij} есть два соседних пустых множества, а это свойство сохраняется при смене нумерации). Тогда $T_{11} = V(H_{11})$. Далее мы рассмотрим следующие три случая: среди множеств S_{ij} есть 2, 3 или 4 пустых.

1. Пусть $S_{21} \neq \emptyset$ и $S_{22} \neq \emptyset$. Тогда

$$2k \leq |R_{21}| + |R_{22}| = |T_2| + |P| + 2|T_{12}| = k + |P| + 2|T_{12}|,$$

откуда $|P| + 2|T_{12}| \geq k$, следовательно, $|P| + 2|T_{11}| \leq k$, то есть $|T_{11}| \leq \frac{k-|P|}{2}$, что и требовалось.

2. Пусть S_{22} – единственное непустое множество среди S_{ij} . Тогда $T_{11} = V(H_{11})$, $T_{21} = V(H_{21})$ и

$$|T_{11}| + |T_{21}| + |P| = |R_{11}| = 2k - |R_{22}| \leq k,$$

следовательно, $\min(|T_{11}|, |T_{21}|) \leq \frac{k-|P|}{2}$.

3. Пусть все множества вида S_{ij} пусты. Тогда $T_{11} = V(H_{11})$, $T_{12} = V(H_{12})$, и $|T_{11}| + |T_{12}| + |P| = k$, откуда

$$\min(|T_{11}|, |T_{12}|) \leq \frac{k-|P|}{2}.$$

□

2.3. Леммы о компонентах и окрестностях. Отметим, что любой C_3 -критический граф является также и минимальным по стягиванию, то есть леммы, доказанные ранее для минимальных по стягиванию графов мы можем применять и к C_3 -критическим графам.

Лемма 3 (см. [14]). Пусть k -разделяющее множество R отделяет от k -связного графа G компоненту G_1 . Тогда каждая из вершин множества R смежна хотя бы с одной из вершин компоненты G_1 .

Лемма 4 (см. [16, лемма 6]). Пусть G — k -связный граф, T — k -разделяющее множество в G , H — произвольная компонента связности $G-T$. Тогда для любого $S \subset T$ верно либо $|S| \leq |N_G(S) \cap V(H)|$, либо $V(H) \subset N_G(S)$.

Лемма 5 (см. [15, лемма 3]). Пусть G — минимальный k -связный граф и $x, y \in V(G)$ — смежные вершины. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y) \setminus \{x\}$, равны k .

Лемма 6 (см. [15, лемма 4]). Пусть G — минимальный k -связный граф. Предположим, что k -разделяющее множество T , содержащее смежные вершины x и y , отделяет множество, состоящее из не более чем двух вершин. Тогда вершина x смежна хотя бы с одной вершиной степени k .

Лемма 7 (см. [17, лемма 5]). Пусть G — минимальный k -связный граф. Предположим, что множество $H \subset V(G)$ отделяется k -разделяющим множеством T . Тогда, если $|H| = 2$, то H содержит не более одной вершины степени больше k .

Лемма 8 (см. [15, лемма 5]). Пусть G — минимальный относительно стягивания k -связный граф. Степень вершины $a \in V(G)$ равна k . Тогда существует k -разделяющее множество T , содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин.

Замечание 5. 1) Строго говоря, в лемме 5 работы [15] было дополнительное условие $v(G) \geq 2k$, однако очевидно, что в случае $v(G) < 2k$ утверждение этой леммы также верно.

2) В нашем случае $k = 6$, то есть утверждение леммы 8 означает, что найдется 6-разделяющее множество, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, содержащую не более двух вершин.

Следующая лемма впервые была доказана С. А. Образцовой [15, лемма 6]. Позже ее независимо доказали К. Ando, S. Fujita и К. Kawabayashi [1].

Лемма 9. Пусть G – минимальный и минимальный относительно стягивания 6-связный граф и $a \in V_6(G)$. Тогда $N_G(a) \cap V_6(G) \neq \emptyset$.

Замечание 6. Строго говоря, в лемме 6 работы [15] было дополнительное условие $v(G) \geq 12$. Однако единственным местом, где это условие использовалось, была ссылка на лемму 8 (легко видеть, что лемма 9 непосредственно следует из лемм 6 и 8), в которой, как уже отмечалось в замечании 5, можно обойтись без ограничения на число вершин.

Лемма 10. Пусть G – C_3 -критический k -связный граф, $x \in T \in \mathfrak{T}_k(G)$ и множество T отделяет компоненту, состоящую из двух вершин u и v . Тогда существует множество $R \in \mathfrak{T}_k(G)$, такое, что $\{u, v, x\} \subset R$.

Доказательство. В случае, если вершина x смежна с обеими вершинами u и v , утверждение леммы очевидно следует из того, что граф G – C_3 -критический. Поэтому предположим не умаляя общности, что вершина x смежна с u и несмежна с v (см. рисунок 2). Рассмотрим k -разделяющее множество R , такое, что $\{x, u\} \subset R$. Очевидно, что множества T и R зависимы, поскольку в противном случае $R = N_G(v) \not\ni x$. Предположим, что $v \notin R$. Тогда существует вершина $y \in T$, такая, что множество R разделяет v и y . Следовательно, вершина v не смежна с y . Поскольку v не смежна также и с x , это означает, что $d(v) \leq k - 1$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

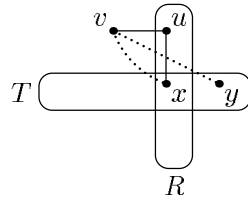


Рис. 2. пунктирными линиями обозначены заведомо отсутствующие в графе G ребра.

§3. О СТРУКТУРЕ ПОДГРАФА G_6

В этом разделе мы докажем, что количество ребер подграфа G_6 не меньше, чем количество его вершин. Для этого достаточно доказать, что каждая компонента связности подграфа G_6 содержит цикл. Для компонент, в которых нет висячих вершин, это утверждение очевидно. Кроме того, по лемме 9 в подграфе G_6 нет изолированных вершин. Поэтому нам достаточно рассмотреть вершину $a \in V_6$, такую, что $d_6(a) = 1$ и доказать, что содержащая ее компонента связности A графа G_6 содержит цикл.

Лемма 11. Пусть G – C_3 -критический 6-связный граф и $a \in V_6(G)$ – такая вершина, что $d_6(a) = 1$. Тогда существует множество $T \in \mathfrak{T}_6(G)$, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с a вершин, которое отделяет компоненту, состоящую ровно из двух вершин.

Доказательство. По лемме 8 существует 6-разделяющее множество, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, которое отделяет компоненту, состоящую не более, чем из двух вершин. Если эта компонента состоит ровно из двух вершин, то мы получили требуемое. Пусть она состоит из единственной вершины b . Поскольку $d_6(a) = 1$, вершина b – единственная смежная с a вершина степени 6.

Пусть x – отличная от b вершина, смежная с a . Обозначим через \mathfrak{S}_x множество таких $T \in \mathfrak{T}_6(G)$, что $\{a, x\} \subset T$ и, если вершины b и x смежны, то $b \in T$. Пусть также

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{x \in N_G(a) \setminus \{b\}} \mathfrak{S}_x.$$

Отметим, что поскольку граф G является C_3 -критическим, все наборы \mathfrak{S}_x непусты.

Для каждого множества $T \in \mathfrak{S}$ рассмотрим все T -компоненты, которые не содержат вершину b , и выберем из всех рассмотренных компонент наименьшую по числу вершин. Обозначим отделяющее ее 6-разделяющее множество через T_1 , саму эту компоненту через H_{21} , а ее дополнение через $H_{22} = \overline{H_{21}}$. Пусть $T_1 \in \mathfrak{S}_{x_1}$. По лемме 3 вершина a смежна с некоторой вершиной $x_2 \in V(H_{21})$, причем $x_2 \neq b$, поскольку $b \notin V(H_{21})$. Рассмотрим произвольное множество $T_2 \in \mathfrak{S}_{x_2}$. Очевидно, что множества T_1 и T_2 зависимы, в противном случае получим противоречие с минимальностью компоненты H_{21} .

Обозначим через H_{11} и H_{12} два дополняющих друг друга T_2 -фрагмента и обозначим стандартным образом пересечения множеств вершин фрагментов $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ друг с другом и с множествами T_1 и T_2 . Докажем, что если вершина b смежна с x_2 , то $b \in P$. Действительно, в этом случае $b \in T_2$, поскольку $T_2 \in \mathfrak{S}_{x_2}$. Кроме того, $b \in T_1$ так как иначе x_2 и b находятся в разных компонентах графа $G - T_1$. (См. рисунок 3а; на рисунках 3б и 3с изображены возможные варианты расположения вершины b когда она не смежна с x_2). Далее, предположим, что $R_{i1} \in \mathfrak{T}_6(G)$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда по доказанному выше $R_{i1} \in \mathfrak{S}_{x_2}$, что противоречит минимальности компоненты H_{21} .

Таким образом, $R_{11}, R_{21} \notin \mathfrak{T}_6(G)$, откуда по лемме 2 одно из множеств T_i отделяет компоненту H , состоящую не более, чем из двух вершин. Заметим, что H не может состоять ровно из одной вершины: если $V(H) = \{b\}$, то b смежна с x_i и, следовательно, $b \in T_i$, если же $V(H) = \{v\}$ и $v \neq b$, то v — отличная от b вершина степени 6, смежная с a . Таким образом, $|H| = 2$ и мы нашли требуемую компоненту. \square

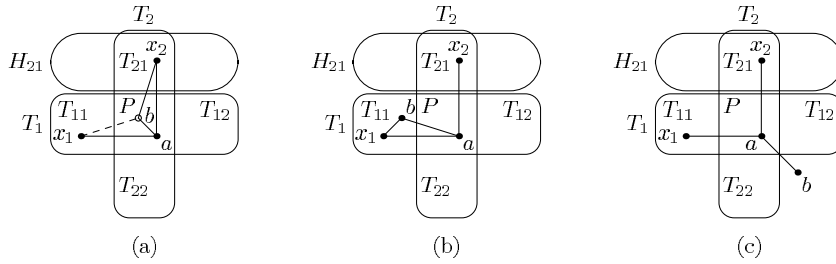


Рис. 3. Возможные варианты расположения вершины b .

- (а) Вершина b смежна с x_2 и, возможно, с x_1 , тогда $b \in P$;
- (б) вершина b не смежна с x_2 , но смежна с x_1 , тогда $b \in T_1$, но, возможно, $b \notin T_2$;
- (с) вершина b не смежна ни с x_1 , ни с x_2 , тогда она может не принадлежать ни T_1 , ни T_2 .

Лемма 12. Пусть G — C_3 -критический минимальный 6-связный граф и A — не содержащая циклов компонента его подграфа G_6 (т. е.

индуцированного подграфа на множестве вершин степени 6). Рассмотрим вершины $b \in V(A)$, $c \in N_G(b)$, множество $T \in \mathfrak{T}_6(G)$ и T -компоненту H , такие, что $\{b, c\} \subset T$ и $v(H) = 2$. Тогда

1) $V(H) \cap V(A) \neq \emptyset$;

2) существуют множество $S \in \mathfrak{T}_6(G)$ и S -компонента F , такие, что $V(H) \subset S$, $v(F) = 2$ и одна из вершин компоненты F имеет степень 6, а другая — степень 7.

Доказательство. 1) Пусть $V(H) = \{u, v\}$. По лемме 7 хотя бы одна из вершин u и v имеет степень 6. Не умаляя общности, будем считать, что $d_G(u) = 6$. Докажем, что $u \in V(A)$. Действительно, в случае, если $d_G(v) = 6$, это очевидно следует из леммы 3, а если $d_G(v) = 7$ и $bu \notin E(G)$, то по лемме 5 все вершины множества T , смежные с u , имеют степень 6, и тогда $d_G(c) = 6$ и c смежна с b и u .

2) Пусть $x \in N_G(u) \cap T$. Обозначим через \mathfrak{S}_x множество таких $S \in \mathfrak{T}_6(G)$, что $S \supset \{u, v, x\}$. Пусть также

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{x \in N_G(u) \cap T} \mathfrak{S}_x.$$

Заметим, что по лемме 10 все наборы \mathfrak{S}_x непусты. Отметим также, что $N_G(u) \cap T = N_G(u) \setminus \{v\}$.

Рассмотрим множество $S \in \mathfrak{S}_x$ и S -компоненту F . Докажем, что $|V(F) \cap T| \geq 2$ и компонента F содержит вершину степени 7. Заметим сначала, что как минимум одна из вершин v и x имеет степень 6. Действительно, если $d_G(v) = 7$, то вершины u и v удовлетворяют условию леммы 5, откуда $d_G(x) = 6$. Тогда множество S содержит две смежные вершины подграфа A : одной из них будет u , а другой — v или x . По лемме 3 каждая из этих вершин смежна с вершиной компоненты F . Соединив полученные вершины путем в компоненте F , мы получим цикл, состоящий из вершин подграфа A и вершин компоненты F . Поскольку в подграфе A циклов нет, мы получаем, что в компоненте F есть вершина степени 7. Тогда $v(F) \geq 2$. Далее, применив лемму 4 к множеству S и его подмножеству $V(H)$, имеем $|V(F) \cap T| = |V(F) \cap N_G(H)| \geq 2$. Заметим также, что если $v(F) = 2$, то по лемме 7 в компоненте F есть вершина степени 6, следовательно, множество S и компонента F нам подходят.

Итак, нам осталось доказать, что существуют множество $S \in \mathfrak{S}$ и S -компонента F , такие, что $v(F) \leq 2$. Рассмотрим произвольную вершину $x_1 \in N_G(u) \cap T$ и множество $T_1 \in \mathfrak{S}_{x_1}$. Очевидно, что одна

из компонент графа $G - T_1$ содержит не более двух вершин множества T . Обозначим эту компоненту через H_{21} , а ее дополнение – через $H_{22} = \overline{H_{21}}$. По лемме 3 существует вершина $x_2 \in N_G(u) \cap V(H_{21}) \subset T$. Рассмотрим множество $T_2 \in \mathfrak{S}_{x_2}$. Очевидно, что оно зависимо с T_1 , поскольку в противном случае компонента графа $G - T_2$, не содержащая вершин T_1 , содержит не более одной вершины множества T . Обозначим через H_{11} и H_{12} два дополняющих друг друга T_2 -фрагмента и обозначим стандартным образом пересечения множеств вершин фрагментов $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$ друг с другом и с множествами T_1 и T_2 (см. рисунок 4).

Пусть $n \in \{1, 2\}$. Заметим, что $|S_{n1} \cap T| \leq 1$, следовательно, $R_{n1} \notin \mathfrak{S}$. Тогда, учитывая что $\{u, v, x_2\} \subset R_{n1}$, мы получаем $R_{n1} \notin \mathfrak{T}_6(G)$. Следовательно, по лемме 2 существуют $i, j \in \{1, 2\}$, такие, что $T_{ij} = V(H_{ij})$ и $|T_{ij}| \leq 2$, что и требовалось. \square

Лемма 13. Пусть $G - C_3$ -критический минимальный 6-связный граф, $a \in V_6(G)$ – такая вершина, что $d_6(a) = 1$, и A – компонента графа G_6 , содержащая a . Тогда компонента A содержит цикл.

Доказательство. Предположим противное. По лемме 11 существует множество $T \in \mathfrak{T}_6(G)$, содержащее a и смежную с a вершину b , которое отделяет компоненту H , такую, что $v(H) = 2$. Применив лемму 12 к вершинам a, b , множеству T и компоненте H мы получим, что $V(H) \cap V(A) \neq \emptyset$. Кроме того, существуют множество $S_1 \in \mathfrak{T}_6(G)$ и S_1 -компонента H_1 , такие, что $V(H) \subset S_1$, $v(H_1) = 2$ и одна из вершин

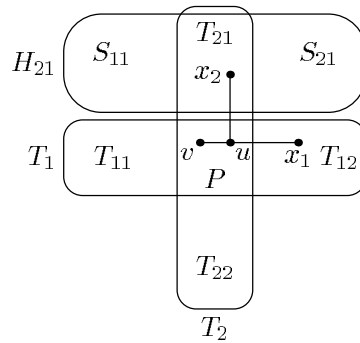


Рис. 4. разбиение графа парой зависимых множеств T_1 и T_2 .

компоненты H_1 имеет степень 6, а другая — степень 7. Обозначим первую из этих двух вершин через u_1 , а вторую — через v_1 . Вершины компоненты H обозначим u и v , так, что $u \in V(A)$. Применив лемму 12 к вершинам u, v , множеству S_1 и компоненте H_1 мы получим, что существуют множество $S_2 \in \mathfrak{T}_6(G)$ и S_2 -компонента H_2 , такие, что $V(H_1) \subset S_2$, $v(H_2) = 2$ и одна из вершин компоненты H_2 имеет степень 7. Но тогда эта вершина должна быть смежна с u_1 , а по лемме 5 единственной вершиной, смежной с u_1 и имеющей степень 7, является v_1 . Противоречие. \square

Следствие 1. Пусть G — C_3 -критический минимальный 6-связный граф. Тогда $e_6(G) \geq v_6(G)$.

Доказательство. Из леммы 13 очевидно следует, что в каждой компоненте подграфа G_6 ребер не меньше чем вершин. Просуммировав эти неравенства по всем компонентам, получим требуемое. \square

§4. ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ВЕРШИН СТЕПЕНИ 6

Теорема 2. Пусть G — C_3 -критический минимальный 6-связный граф. Тогда $v_6(G) > \frac{5}{9}v(G)$.

Доказательство. По следствию 1 мы имеем $e_6(G) \geq v_6(G)$. С другой стороны, по теореме 1 подграф G_7 является лесом, следовательно, $e_7(G) \leq v_7(G) - 1$. Далее мы двумя способами оценим величину $e_{6,7}(G)$. Отметим, что $e_{6,7}(G)$ — это количество ребер, один конец которых имеет степень 6, а другой — хотя бы 7. Заметим, что

$$e_{6,7}(G) = 6v_6(G) - 2e_6(G) \leq 4v_6(G). \quad (2)$$

С другой стороны,

$$e_{6,7}(G) \geq 7v_7(G) - 2e_7(G) \geq 5v_7(G) + 2. \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) немедленно следует, что

$$4v_6(G) \geq 5v_7(G) + 2 = 5v(G) - 5v_6(G) + 2,$$

откуда

$$v_6(G) \geq \frac{5}{9}v(G) + \frac{2}{9} > \frac{5}{9}v(G).$$

\square

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Ando, S. Fujita, K. Kawarabayashi, *Minimally contraction-critically 6-connected graphs*. — Discrete Mathematics **312** no. 3 (2012), 671–679.
2. K. Ando, T. Iwase, *The number of vertices of degree 5 in a contraction-critically 5-connected graph*. — Discrete Mathematics **311** (2011), 1925–1939.
3. K. Ando, A. Kaneko, K. Kawarabayashi, *Vertices of degree 6 in a contraction critically 6-connected graphs*. — Discrete Mathematics **273** (2003), 55–69.
4. K. Ando, C. Qin, *Some structural properties of minimally contraction-critically 5-connected graphs*. — Discrete Mathematics **311** (2011), 1084–1097.
5. G. Chartrand, A. Kaugars, D. R. Lick, *Critically n -connected graphs*. — Proc. of the Amer. Math. Soc. **32** (1972), 63–68.
6. M. Fontet, *Graphes 4-essentiels*. — C. R. Acad. Se. Paris, 287, serie A (1978), 289–290.
7. R. Halin, *A theorem on n -connected graphs*. — J. Comb. Theory **7** (1969), 150–154.
8. M. Li, X. Yuan, J. Su, *The number of vertices of degree 7 in a contraction-critical 7-connected graph*. — Discrete Mathematics **308** (2008), 6262–6268.
9. W. Mader, *Ecken Vom Grad n in minimalen n -fach zusammenhängenden Graphen* (German). — Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
10. W. Mader, *Zur Struktur minimal n -fach zusammenhängender Graphen*. (German). — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
11. W. Mader, *Generalization of critical connectivity of graphs*. — Discrete Mathematics **72** (1988), 267–283.
12. N. Martinov, *A recursive characterization of the 4-connected graphs*. — Discrete Mathematics **84** (1990), 105–108.
13. W. T. Tutte, *A theory of 3-connected graphs*. — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
14. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k -связного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
15. С. А. Образцова, *О локальной структуре 5 и 6-связных графов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 88–96.
16. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О локальной структуре 7 и 8-связных графов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 97–111.
17. С. А. Образцова, *О локальной структуре 9 и 10-связных графов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 157–197.
18. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О вершинах степени k минимальных и минимальных относительно стягивания k -связных графов: верхние оценки*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 198–210.

Pastor A. V. About vertices of degree 6 of C_3 -critical minimal 6-connected graph.

In this paper we research C_3 -critical minimal 6-connected graphs, i.e. such 6-connected graphs, that lost there 6-connectivity when we delete any edge and in which any clique on at most 3 vertices is contained in a

6-cutset. We prove that more than $\frac{5}{9}$ of all vertices of a such graph has degree 6.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург;
Санкт-Петербургский
государственный политехнический
университет
E-mail: pastor@pdmi.ras.ru

Поступило 20 октября 2014 г.