И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник. Некоторые работы 50-х годов, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 3, 206–215

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 3

Ю. В. ЛИННИК. НЕКОТОРЫЕ РАБОТЫ 50–Х ГОДОВ

И. А. Ибрагимов

8 января 1990 г. замечательному советскому математику Юрию Владимировичу Linнику (1915–1972) исполнилось бы 75 лет. Более 18 лет отделяют нас от того знойного июньского дня, когда он ушел из жизни. Оглядываясь назад, пробегая мысленно этот 18-летний период, мы видим, как многим обязаны Ю. В. Linнику математики Ленинграда, круг же тех, на кого повлияли идеи Ю. В. Linника, созданные им методы исследования, много шире непосредственного круга его учеников и сотрудников.

Редакция журнала „Алгебра и анализ“ предложила мне поделиться воспоминаниями о каком-либо из этапов творческого пути Ю. В. Linника. Я очень признателен редакции и особенно Н. К. Никольскому за предоставленную возможность рассказать о некоторых работах моего учителя.

1. Жизненный путь. Ю. В. Linник родился 8 января 1915 г. в г. Белая Церковь. В 1932 г. он поступил на физический факультет Ленинградского университета, но по окончании третьего курса перешел на математико-механический факультет ЛГУ, который и закончил в 1938 г. Еще в студенческие годы Ю. В. Linник начал исследования по теории чисел, привязанность к которой не изменяла ему всю жизнь. Причем уже эти первые работы, касавшиеся аналитической теории квадратичных форм, содержали фундаментальные результаты, послужившие основанием целому новому направлению в этой области теории чисел.

Военные годы не обошли Ю. В. Linника. В 1939 г. он был призван в Красную Армию и зимой 1939–1940 гг. принимал участие в войне с Финляндией в качестве командира артиллерийского взвода (эту войну в своих разговорах со мной Юрий Владимирович всегда называл несправедливой). В июле 1941 г. Ю. В. Linник вступил добровольцем в народное ополчение и участвовал в боях на Пулковских высотах, защищая осажденный Ленинград. В конце 1941 г. он заболел дистрофией, был демобилизован и эвакуирован в Казань, где тогда располагался МИАН (стоит упомянуть, что между двумя войнами, в 1940 г., Юрий Владимирович защитил диссертацию по теории чисел, за которую ему сразу была присуждена степень доктора физико-математических наук).

Ю. В. Linник вернулся в Ленинград в 1945 г., где до конца своих дней работал в ЛОМИ и в Ленинградском университете.

В 1947 г. вышла в свет первая работа Ю. В. Linника по теории вероятностей. С этого времени, не прекращая интенсивных и весьма плодотворных исследований по теории чисел, Юрий Владимирович не менее активно работал в теории вероятностей и статистике.

Однажды я спросил Юрия Владимировича, почему он начал работать в теории вероятностей. Отвечая, он сказал, что определенную роль тут сыграл А. Я. Хинчин, убеждавший его, что работать нужно по крайней мере в двух разных областях и что такой дополнительной областью могла бы быть теория вероятностей. Были, по-видимому, и другие причины. Однако и в теории чисел, и в теории вероятностей Ю. В. Линник был прежде всего выдающимся аналитиком, которого привлекали трудные аналитические проблемы теории чисел и теории вероятностей. Здесь уместна будет цитата из предисловия А. Вейля к его „Основам теории чисел": „Уже давно (после основополагающих работ Хинчина и Колмогорова) стало ясно, что теория вероятностей — это прикладной анализ, другими словами, анализ, применяемый к некоторым вполне определенным типам задач. В точности то же самое можно сказать об аналитической теории чисел".

Ю. В. Линник создал и возглавил лабораторию статистических методов и кафедру теории вероятностей и математической статистики на математико-механическом факультете ЛГУ (заведование последней он позднее передал своему ученику В. В. Петрову). Я не знаю точно, когда был организован вероятностный семинар Ю. В. Линника; когда я начал посещать его осенью 1953 г., среди участников семинара были, в частности, Н. Н. Воробьев, Н. А. Сапогов, О. В. Сарманов, В. П. Скитович (незадолго до того доказавший знаменитую „теорему Скитовича–Дармуа").

В середине 50-х годов начинают восстанавливаться связи советских математиков с зарубежными. К этому времени относится первый визит Ю. В. Линника за границу, в Индию, во время которого, в частности, возникли дружеские отношения с С. Р. Рао, тогда работавшем в Индийском статистическом институте. Юрий Владимирович всегда придавал большое значение личным контактам между учеными разных стран. Такие тесные, порою дружеские связи установились у него со многими крупнейшими специалистами по теории вероятностей (Г. Крамер, Ю. Нейман, С. Р. Рао, Ч. Стейн, П. Моран, Р. Форте и многие другие).

Юрий Владимирович уделял большое внимание преподавательской работе, общению с молодыми математиками. Когда я познакомился с ним, он читал лишь вероятностные курсы — теорию случайных процессов (позднее читать этот курс он поручил мне), курс теории вероятностей для механиков (почему-то он больше любил читать этот курс механикам, чем математикам), математическую статистику. Этот последний курс он особенно любил и читал его каждый год вплоть до своей кончины.

Когда в 60-х годах очередной административный приказ запретил сотрудникам Академии совместительство в вузах, вплоть до отмены этого нелепого запрета, в течение 2-х лет, Юрий Владимирович преподавал бесплатно.

Ю. В. Линник был первым президентом Ленинградского математического общества (1959–1965).

Заслуги Ю. В. Линника были высоко оценены. Он был избран в 1963 г. академиком АН СССР (чл.-кор. — с 1954 г.). В 1947 г. ему была присуждена Государственная премия СССР за работу по теории чисел; в 1970 г. — за работу по предельным теоремам теории вероятностей — Ленинская (совместно с И. А. Ибрагимовым, Ю. В. Прохоровым, Ю. А. Розановым). В 1970 г. он был удостоен звания Героя Социалистического Труда. Многие университеты, академии, научные общества избрали Ю. В. Линника своим сочленом.

Скончался Юрий Владимирович 30 июня 1972 г. от инфаркта миокарда.

Ю. В. Линник был очень ярким, разносторонне одаренным человеком. Он свободно владел семью языками. Имел обширнейшие познания в литературе, истории, особенно военной. Живо интересовался политическими событиями.

Однако главным делом жизни Юрия Владимировича, которому он отдавался весь, отдавался страстно, темпераментно, было научное творчество. Ниже я хочу рассказать о двух циклах его работ по теории вероятностей, выполненных в 5-летие 1956–1961 гг., которые проводились на моих глазах и произвели на меня еще в те годы неизгладимое впечатление. Читатель должен только отдавать себе ясный отчет, что это были не единственные и даже, по-видимому, не самые замечательные работы, которые в эти годы сделал Ю. В. Линник. В эти 5 лет Юрий Владимирович опубликовал, например, продолжая развитие своего эргодического метода в теории чисел, замечательную теорему об асимптотической равномерности распределения целых точек на сфере растущего радиуса. К этим же годах относятся создание знаменитого дисперсионного метода и решение с помощью этого метода старой проблемы Харди–Литтльвуда о представлении чисел в виде суммы простого и двух квадратов. Всего в 1956—1961 гг. Ю. В. Линник опубликовал 56 работ. Я буду говорить лишь о шестнадцати из них.

2. Арифметика законов распределения. Основы арифметики законов распределения или теории разложений вероятностей законов были заложены во второй половине 30-х годов работами П. Леви, Г.Крамера, А.Я.Хинчина и Д.А.Райкова.

Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения F. Зададимся вопросом, когда ξ можно представить в виде суммы двух нетривиальных *независимых* случайных величин

$$\xi = \xi_1 + \xi_2. \tag{1}$$

Так как функция распределения F есть свертка функций распределения F_1 и F_2 слагаемых ξ_1 и ξ_2, задаче можно придать следующую чисто аналитическую форму. Когда функцию распределения F можно представить в виде „произведения“

$$F = F_1 * F_2 \tag{2}$$

и каковы свойства множителей F_1, F_2? Так как, наконец, свертке F_1, F_2 соответствует перемножение их характеристических функций, их преобразований Фурье, $f_i(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$, то исходный вопрос эквивалентен следующему. Когда характеристическую функцию $f(t)$(=положительно определенную функцию $f(t)$ с $f(0) = 1$) можно представить в виде произведения

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \tag{3}$$

характеристических функций $f_i(t)$ и каковы свойства компонент $f_i(t)$?

Впервые подобная проблема была поставлена П. Леви, высказавшем в 1934 г. гипотезу, что если левая часть в (1) имеет гауссово распределение, то компоненты ξ_1 и ξ_2 тоже имеют гауссово распределение. Эту гипотезу доказал в 1936 г. Г. Крамер.

Теорема (Г. Крамер). *Компоненты F_1, F_2 разложения (2) закона Гаусса F необходимо являются законами Гаусса.*

Я укажу схему доказательства. Из (1) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 > x\} \geqslant \mathbf{P}\{\xi_1 > y\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_2 > x - y\}.$$

Поэтому $\mathbf{P}\{|\xi_i| > x\} = O(e^{-\varepsilon x^2}), \varepsilon > 0$, и функции $f_i(t)$ допускают продолжение до целой функции $f_i(z)$. При этом в силу (3)

$$f_1(z) f_2(z) = \exp\{az^2 + bz\}.$$

В силу теоремы Адамара отсюда уже легко следует, что $f_i(z) = e^{\mathbf{P}_i(z)}, \mathbf{P}_i$ — полином степени не выше 2, чем доказательство, и заканчивается.

Доказательство это представляется сейчас столь простым и естественным, что я долго воображал себе его историю следующим образом. П. Леви задал соответствующий вопрос Г. Крамеру, а тот дня через три нашел доказательство. На самом деле постановку задачи и ее решение разделяет срок 2 года. Более того, недавно в воспоминаниях Л. Шварца о П. Леви я с некоторым удивлением прочел следующее: „Я вспоминаю, что он долго искал доказательство этой теоремы (и я тоже), но это был Г. Крамер, кто, наконец, нашел его. Поль Леви никогда не мог утешиться“ (L. Schwartz? Quelques réflexions et souvenirs sur Paul Lévy, Astérisque, 1988, Soc. Math. France, 1988). „Простые“ доказательства не так легко найти.

Годом позже Д. А. Райков доказал сходную теорему о распределениях Пуассона.

Теорема (Д. А. Райков). *Компоненты F_1, F_2 разложения (2) закона Пуассона F необходимо являются законами Пуассона.*

Напомню, что ξ распределена по закону Пуассона, если

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, \ldots, \lambda > 0.$$

Характеристическая функция $f(t)$ этого закона — целая функция, равная $\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$, и доказательство теоремы Райкова в идейном плане напоминает доказательство теоремы Крамера.

Множество всех вероятностных распределений F на прямой образует полугруппу относительно операции свертки. Естественно называть элемент этой полугруппы простым или неразложимым, если его нельзя представить в виде произведения $F = F_1 * F_2$ с нетривиальными F_1, F_2. Простыми законами распределения будут, например, законы, сосредоточенные в двух целых точках, или равномерное распределение в точках $0, 1, \ldots p - 1; p$ — простое. Простым будет распределение с характеристической функцией $f(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$ (Д.Дюге).

Из теоремы Крамера и Райкова следует, что существуют законы, не имеющие вообще простых делителей.

В 1937 г. А. Я. Хинчин доказал „основную теорему“ арифметики законов распределения.

Теорема (А. Я. Хинчин). *Каждое вероятностное распределение F допускает представление*

$$F = F_0 * F_1 * \ldots,$$

где $F_1, \ldots$ — простые множители, а F_0 не имеет простых делителей.

Таким образом, в отличие от обычной арифметики в арифметике законов распределения наличествует класс I_0 законов без простых делителей. Об этом классе А. Я. Хинчин доказал, что все его элементы безгранично делимы. В частности, если распределение $F \in I_0$, то его характеристическая функция $f(t)$ представима в виде

$$f(t) = \exp\{i\alpha t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1 + u^2})\}dG(u), \qquad (4)$$

$\alpha \in R^1$, $\sigma \geqslant 0$, а G — монотонно не убывающая непрерывная в нуле функция ограниченной вариации.

Гауссовскому распределению соответствует случай, когда в (4) $G \equiv 0$; у распределения Пуассона $\sigma = 0$, а мера сосредоточена в одной точке (отличной от нуля).

Примерно таким было состояние арифметики законов распределения к 40-му году и вплоть до середины 50-х годов, до работ Ю. В. Линника ничего существенно нового здесь не прибавилось. В частности, были известны лишь два представителя класса I_0 — законы Гаусса и Пуассона.

Юрий Владимирович поначалу заинтересовался совершенно конкретным вопросом — будет ли композиция законов Гаусса и Пуассона разлагаться снова лишь в законы того же вида, т.е. в композицию законов Гаусса и Пуассона. Я не знаю, почему Ю.В.Линника заинтересовал этот вопрос. Мне кажется, что вначале он не думал об арифметике законов распределения и даже не знал теорем Хинчина. Похоже даже, что вначале он и не думал сам заниматься этой задачей, а просто хотел знать ответ. Во всяком случае, в течение некоторого времени (я не помню, месяца, двух) Юрий Владимирович всех спрашивал о возможном ответе. В итоге Ю.В.Линник решил проблему сам и доложил свое решение не на семинаре по теории вероятностей, а на семинаре В.И.Смирнова, конечно, с приглашением туда участников вероятностного семинара (угадано место первого доклада было правильно: дальнейшим развитием работ Ю.В.Линника занимались больше аналитики, а не специалисты по теории вероятностей).

Теорема (Ю.В.Линник). *Всякая композиция F законов Гаусса и Пуассона имеет своими делителями лишь композиции законов Гаусса и Пуассона.*

Доказательство этой теоремы в отличие от теорем Крамера и Райкова очень сложно. Действительно, нам нужно доказать, что все положительно определенные решения f_i уравнения

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \exp\{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \lambda(e^{it} - 1)\} \tag{5}$$

имеют вид $\exp\{\frac{\sigma_j^2 t^2}{2} + \lambda_j(e^{it} - 1)\}$, $0 \leqslant \sigma_j^2 \leqslant \sigma^2, 0 \leqslant \lambda_j \leqslant \lambda$. Разумеется, как и выше, (5) продолжается до уравнения во всей комплексной плоскости. На этом, однако, сходство кончается — гауссова компонента $\exp\{-\frac{\sigma^2 z^2}{2}\}$ и пуассонова компонента $\exp\{\lambda(e^{iz} - 1)\}$ имеют совершенно несравнимые порядки роста, и не понятно, как на фоне гигантской пуассоновой компоненты все-таки ощутить гауссовскую. Я не берусь дать каких-либо наметок доказательства. Оно слишком сложно. Оригинальное доказательство Ю.В.Линника занимает 25 с. Затем И.В.Островский нашел более простые варианты доказательства, но и они достаточно сложны.

Я помню, что во время доклада кем-то был задан вопрос типа: „Я не понимаю, как Вы вообще могли до этого додуматься". Ответ я помню буквально. Совершенно серьезно и с некоторой гордостью Ю.В.Линник ответил: „Трое суток думал". Он действительно имел в виду трое суток, а не три дня.

С доказательством этой же теоремы связано еще одно курьезное обстоятельство, имеющее отношение, я уже не знаю к чему, к психологии творчества, творческой памяти. При доказательстве своей теоремы Ю.В.Линник существенно использовал классический результат Пэли–Винера об интегральном представлении суммируемых с квадратом целых функций конечной степени. Юрий Владимирович возмущался, что никто из ленинградских аналитиков не смог просветить его о существовании этой теоремы и что он узнал о ней, лишь обратившись в Харьков к Б.Я.Левину. Каково же было мое удивление, когда, обсуждая с Ю.В.Линником выход в 1964 г. русского перевода книги Пэли–Винера, я узнал, что в молодости он изучал английский оригинал. А изучал различные работы Юрий Владимирович очень внимательно, как правило, конспектируя. Я помню большие книги с такими конспектами; конспект всегда писался на языке оригинала.

После результата о разложении законов Гаусса и Пуассона Ю.В.Линник занялся собственно арифметикой законов распределения, именно попыткой разобраться в структуре класса I_0. В 1958–1959 гг. он публикует три большие работы (в сумме около 100 с.) под общим заглавием „Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов", посвященные исследованию I_0. В частности, он доказывает следующий замечательный результат, теорему о принадлежности классу I_0 законов с гауссовой компонентой.

Теорема (Ю.В.Линник). *Для того чтобы распределение F с характеристической функцией, задаваемой равенством (4), с $\sigma > 0$ принадлежало классу I_0, необходимо, чтобы носитель меры G был подмножеством некоторого множества вида*

$$\{\mu_{k1}\}_{k=-\infty}^{\infty} \cup \{-\mu_{k2}\}_{k=-\infty}^{\infty}, \tag{6}$$

где $\mu_{k1} > 0, \mu_{k2} > 0$, а числа $\frac{\mu_{k+1,r}}{\mu_{k,r}}$ натуральные, бóльшие 1.

Множество вида (6) теперь принято называть множеством Линника. Так, множеством Линника будет множество $\{2^k\}_{-\infty}^{\infty} \cup \{-2^k\}_{-\infty}^{\infty}$. В общем случае множество $\{\mu_{k1}\}$ — это последовательность вида $\ldots k_{-2}k_{-1}, \mu, k_{-1}\mu, \mu, \frac{\mu}{k_1}, \frac{\mu}{k_1 k_2}, \ldots$, а $\{\mu_{k2}\}$ — последовательность вида $\ldots l_{-2}l_{-1}\lambda, l_{-1}, \lambda, \lambda, \frac{\lambda}{l_1}, \frac{\lambda}{l_1 l_2}, \ldots$, где $\mu > 0$, $\lambda < 0$, а k_j, l_j — целые, бóльшие 1.

Класс безгранично делимых законов, у которых носитель есть множество Линника, называют классом $\mathcal{L}$ или классом Линника.

Доказательство этой теоремы сложно и занимает даже и сейчас около 50 с. Полное обращение этой теоремы невозможно. Ю.В.Линник привел примеры законов класса $\mathcal{L}$ не принадлежащих I_0. В то же время он показал, что если $G\{x : |x| > r\}$ с ростом r убывает достаточно быстро, то законы класса $\mathcal{L}$ с такой G принадлежат I_0. Например, если у какого-либо распределения F класса $\mathcal{L}$ носитель G ограничен, то $F \in I_0$.

Активную работу над теорией разложений вероятностных законов Ю.В.Линник прекратил в 1960 г. Его работы, безусловно, знаменовали начало нового этапа в развитии этой теории, явились мощным импульсом ее развития, не ослабевающим до сих пор. В этом легко убедиться, хотя бы вкратце просмотрев обзоры результатов, полученных в этой области за последующие 30 лет. Соответствующие ссылки приводятся в библиографии в конце статьи.

Я процитирую лишь один недавний результат, касающийся принадлежности законов класса $\mathcal{L}$ классу I_0. В свое время Ю.В.Линник высказал гипотезу, что законы класса $\mathcal{L}$, характеристические функции которых суть целые аналитические функции, принадлежат I_0. Недавно Г.П.Чистяков в очень трудной работе доказал эту гипотезу.

Объединив теорему Линника с теоремой Чистякова, мы приходим к следующему результату.

Для того чтобы безгранично делимое распределение F с целой характеристической функцией, имеющее ненулевую гауссову компоненту, не имело простых делителей, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало классу $\mathcal{L}$.

Трудно не восхититься этим результатом. Я кончу одним небольшим эпизодом, о котором часто вспоминал Юрий Владимирович. Однажды он рассказывал свои результаты о разложении на семинаре в МГУ в присутствии А.Н.Колмогорова, который вдруг заявил: „Фу, какие уродливые теоремы!" Рассказывал Юрий Владимирович об этом всегда с юмором, но и с некоторой горечью. Уважение же его к А.И.Колмогорову было столь велико, что эта реплика могла быть одной из причин (хотя и не самой серьезной), почему он перестал заниматься этой проблематикой. Как-то я попробовал расспросить А.И.Колмогорова об этом эпизоде. Его воспоминания, разумеется, были не столь яркими и слово „уродливые" он не мог вспомнить. Во всяком случае, сказал он, если такое слово он и употребил, то не желал сказать, что это плохие теоремы, это хорошие теоремы, а желал, может быть, подчеркнуть их неокончательный характер.

Вообще мнению А.Н.Колмогорова Ю.В.Линник придавал очень большое значение. Он очень, почти по-детски, радовался письмам А.Н.Колмогорова с похвалой своим работам, показывал их своим знакомым. Впрочем, и А.Н.Колмогоров высоко ценил работы Юрия Владимировича. Однажды во время прогулки по Ленинграду А.Н.Колмогоров вкратце характеризовал многих математиков. К сожалению, я не записал тогда же то, что он говорил, и почти все теперь забылось. Но слова, сказанные им о Ю.В.Линнике, мне кажется, я помню настолько точно, что даже позволю передать их прямой речью. „О большинстве математиков я могу сказать, что я равномерно сильнее их: то, что они делают, я мог бы сделать лучше. Что делает Линник, я сделать не смогу". Чуть помолчав, А.Н.Колмогоров добавил: „Но и он не сделает того, что делаю я".

3. Теоремы о больших уклонениях. Классический сюжет теории вероятностей — предельное поведение распределений сумм $\sum\limits_1^n \xi_j$ независимых случайных величин ξ_j при $n \to \infty$. Допустим, что все ξ_j имеют одинаковое распределение, конечное среднее $a = \mathbf{E}\xi_j$ и дисперсии $D\xi_j = \sigma_j^2$. Пусть $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum\limits_1^n (\xi_j - a)$. В силу центральной предельной теоремы (в данном случае теоремы П.Леви)

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{Z_n < x\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \tag{7}$$

а значит, и

$$\mathbf{P}\{Z_n \geqslant x\} = 1 - F_n(x) \to 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{8}$$

Более того, если вдобавок $\mathbf{E}|\xi_j|^3 < \infty$, то (теорема Эссена) разность между допредельным и предельным выражениями (7) и (8) есть $O(1/\sqrt{n})$.

Во многих случаях, однако, в целом ряде задач математической статистики, в ряде разделов современной теории вероятностей, даже аналитической арифметике гиперкомплексных чисел требуется знать поведение левых частей (7),(8) для бо́льших x(т.е. для $x = x(n) \to \infty$ вместе с n). В силу (8) такие задачи называют задачами о вероятностях больших уклонений. Классические предельные теоремы (7), (8) практически не дают никакой полезной информации, поскольку с ростом x правая часть (8) убывает, как $e^{-x^2/2}$.

Определенный выход из этого положения приносит теорема Г.Крамера, опубликованная им в 1938 г.

Теорема (Г.Крамер). *Пусть величины ξ_j удовлетворяют дополнительному условию*

$$\mathbf{E}\exp\{a|\xi_j|\} < \infty \tag{C}$$

для какого-нибудь $a > 0$. Тогда при $x \geqslant 0$, $x = 0(\sqrt{n}), n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}\{Z_n \geqslant x\}}{1 - \Phi(x)} &= \exp\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda(\frac{x}{\sqrt{n}})\}(1 + O(\frac{x+1}{\sqrt{n}})), \\ \frac{\mathbf{P}\{Z_n < -x\}}{\Phi(-x)} &= \exp\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda(-\frac{x}{\sqrt{n}})\}(1 + O(\frac{x+1}{\sqrt{n}})). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\lambda(t) = \sum\limits_0^\infty \lambda_k t^k$ — степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности нуля. Коэффициент λ_k есть функция моментов $\mathbf{E}\xi_1^l$, $l = 1, 2, \ldots k+3$.

Ряд $\lambda(t)$ называют рядом Крамера.

В определенном смысле до работ Ю.В.Линника в том, что касается поведения вероятностей больших уклонений для сумм независимых величин, практически ничего, кроме теоремы Крамера, не было; т.е. были, разумеется, различные обобщения теоремы Крамера, распространение ее на неодинаково распределенные слагаемые и т.д. Но все они имели ту же структуру и использовали существенное условие (C).

Насколько я припоминаю, первый интерес Ю.В.Линника к задачам о вероятностях больших уклонений был связан с желанием понять, насколько необходимо условие (C), что вначале привело его к непониманию соотношений (9) вообще. Я помню, как он всех спрашивал, что же означает теорема Крамера. Именно ряд Крамера $\lambda(t)$ определяется заданием всех моментов величин ξ_j, и, следовательно, правая часть (9) годится для вычисления поведения $\mathbf{P}\{Z_n \geqslant x\}$ лишь данных величин ξ_j и только их. Тогда, как например (7), (8), позволяют найти асимптотику $F_n(x)$ для всех ξ_j с данными a и σ^2.

Предельные теоремы последнего типа Ю.В.Линник предложил называть собирательными, ибо „в один класс собирается бесконечное число последовательностей случайных величин, удовлетворяющих определенным условиям, причем для всех них соответственным образом нормированные и центрированные уклонения имеют одно и то же значение“.

Но, замечает Ю.В.Линник, теорему Крамера можно рассматривать и как теорему собирательного типа, нужно лишь, чтобы x менялся в более узкой области, чем $[0, o(\sqrt{n})]$. Пусть, например, $x \in [0, o(n^\alpha)]$. Тогда в (9) можно употреблять не весь ряд Крамера, а лишь его отрезок $\lambda^{[s]}(t) = \lambda_0 + \cdots + \lambda_s t^s$, где

$$\frac{1}{2}\frac{s}{s+2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3}.$$

Эти рассуждения приводят Ю.В.Линника к новым постановкам задач о больших уклонениях. Пусть $\psi(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Разыскиваются предельные теоремы вида

$$\frac{\mathbf{P}\{Z_n > x\}}{\Phi(x, a_1, \ldots a_k, n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$
$$\frac{\mathbf{P}\{Z_n < -x\}}{\Psi(x, b_1, \ldots b_l, n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

равномерно по $x \in [0, \psi(n)]$. При этом $a_1 \ldots b_l$ предполагаются (линейными) функционалами от закона распределения F величин ξ_j.

Ю.В.Линник получил ряд таких новых предельных теорем прежде всего для $\Phi(x \dots a_k n)$, получающихся заменой в правой части (9) ряде Крамера λ его отрезком $\lambda^{[s]}$. Я приведу две самые простые по формулировке и очень красивые теоремы.

Теорема (Ю.В.Линник). *Пусть для любого* $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\frac{\mathbf{P}\{Z_n > x\}}{1 - \Phi(x)} \to 1, \qquad \frac{\mathbf{P}\{Z_n < -x\}}{\Phi(-x)} \to 1, \tag{10}$$

когда $n \to \infty$ *равномерно для* $x \in [o, n^\alpha]$. *Тогда случайные величины* ξ_j *нормальны.*

Теорема (Ю.В.Линник). *Пусть* $\rho(n) \uparrow \infty$ *и* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Если* $\alpha < 1/6$ *и соотношения* (10) *выполняются равномерно по* $x \in [0, n^\alpha \rho(n)]$, *то*

$$\mathrm{E}\exp|\xi_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} < \infty. \tag{11}$$

Последнее условие достаточно для выполнения (10) *равномерно по* $x \in [0, n^\alpha/\rho(n)]$. *Если* $1/6 \leqslant \alpha < 1/2$, *рассмотрим последовательность критических чисел*

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \dots \frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3} \to \frac{1}{2}.$$

Пусть $\frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\frac{s+2}{s+4}$. *Если соотношения* (10) *выполняются равномерно по* $x \in [0, n^\alpha \rho(n)]$, *то необходимо конечен момент* (11), *и все моменты* $E\xi_j^k$ *для* $k \leqslant s+3$ *совпадают с моментами закона Гаусса* $\Phi(x)$. *Обратно, если эти условия выполнены, соотношения* (10) *выполняются равномерно для* $x \in [0, n^\alpha/\rho(n)]$.

В последующих работах (С.В.Нагаев, Л.В.Осипов) удалось заменить $\rho(n)$ на 1.

Подобно теоремам о разложениях вероятностных законов эти теоремы потребовали для своего доказательства создания совсем новых и порой очень сложных аналитических методов. Вообще, читая работы Ю.В.Линника, видишь в них те „орудия первооткрывателей“, в которых Г.Вейль отказал Ф.Клейну — „изощренную тонкость математической мысли, головоломные трюки, позволяющие доказывать результаты, еще определенно не созревшие для того, чтобы можно было уяснить их исходные принципы“ (Г.Вейль. Феликс Клейн и современная математика. Избранные труды. М.: Наука, 1984).

Итак, я весьма вкратце рассказал лишь о двух циклах работ, выполненных Ю.В.Линником в 5-летие 1956–1961 гг. Общий объем опубликованных работ занимает около 500 с. А ведь это лишь меньшая доля того, что Ю.В.Линник сделал за эти годы. Трудолюбие его было необычайно. Но труд этот был источником радости. Юрий Владимирович всегда любил ту работу, которой он был занят в данный момент и почти по-детски гордился, даже чуть-чуть хвастался своими достижениями данного момента. То, что уже было сделано, волновало его мало. При встрече Юрий Владимирович немедленно начинал рассказывать вам, какую замечательную вещь он сейчас придумал, лучшую в своей жизни. Иногда собеседник припоминал, что, кажется, лучшую вещь в своей жизни Юрий Владимирович сделал три дня назад. Юрий Владимирович искренне недоумевал: „О чем это Вы? Ах, это ... Ну, это пустяки. Вот то, что я сейчас сделал, вот это да“. К Ю.В.Линнику, как нельзя лучше, подходят слова Ф.Клейна, сказанные им в его „Истории математики XIX в.“:„И все-таки тайна продвижения вперед лежит в наивном творчестве, возникающем из чистой радости того дела, к которому толкает творцов их мысль“.

На этом я планировал кончить. Однако в связи с одной публикацией в нематематическом журнале я хочу рассказать еще об одном результате Ю.В.Линника, которым он, кстати, весьма гордился. Те, кто знал Юрия Владимировича, помнят, каким блистательно остроумным человеком он был. Многие его шутки пересказываются до сих пор. Однажды у Ю.В.Линника возникла мысль написать «математический вариант знаменитого „Краткого курса“». Идея эта так и не была осуществлена, но некоторые результаты были получены. В частности, была доказана следующая теорема, которую Юрий Владимирович любил.

Теорема. *Генеральная линия партии — прямая.*

Доказательство. Действительно, она вся состоит из точек перегиба.

Я слышал эту теорему от Юрия Владимировича уже в 1953 г. Возможно, что она была найдена даже раньше. Разумеется, эта шутка широко разошлась. Теперь она даже опубликована в одном из номеров „Знамени“ за 1990 г. (ухудшенный вариант), но без ссылок на автора.

Собрание работ Ю.В.Линника опубликовано в 4 томах [1-4]. В собрание работ Ю.В.Линника включены статьи Бредихина, Виноградова, Малышева, Фоменко, Ибрагимова, Петрова о работах Ю.В.Линника. Работы Ю.В.Линника о разложениях вероятностных законов включены в [3]. См. также монографии [5,6]. С развитием этой области после Ю.В.Линника можно ознакомиться по обзорным статьям [7–9]. Работы Ю.В.Линника о вероятностях больших уклонений содержатся в [3]. См. также монографии [10,11].

Список литературы

[1] Линник Ю.В., *Теория чисел. I. Эргодический метод L-функции*, Избр. тр., т. 1, Наука, Л., 1979.

[2] Линник Ю.В., *Теория чисел. II. L-функции и дисперсионный метод*, Избр. тр., т. 2, Наука, Л., 1980.

[3] Линник Ю.В., *Теория вероятностей*, Избр. тр., т. 3, Наука, Л., 1981.

[4] Линник Ю.В., *Математическая статистика*, Избр. тр., т. 4, Наука, Л., 1982.

[5] Линник Ю.В., Островский И.В., *Разложения случайных величин и векторов*, Наука, М., 1973.

[6] Линник Ю.В., *Разложение вероятностных законов*, Изд-во ЛГУ, Л., 1960.

[7] Лившиц Л.З., Островский И.В., Чистяков Г.П., *Арифметика вероятностных законов*, Итоги науки и техники, Сер. теория вероятностей, математическая статистика, теория кибернетики, т. 12, ВИНИТИ, М., 1975.

[8] Островский И.В., *Арифметика вероятностных распределений*, Теория вероятностей и ее применение **31**, вып. 1 (1986), 3–30.

[9] Чистяков Г.П., *Устойчивость разложений вероятностных распределений*, Теория вероятностей и ее применение **31**, вып. 3 (1986), 433–450.

[10] Ибрагимов И.А, Линник Ю.В., *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.

[11] Петров В.В., *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1982.

Поступило 20 декабря 1990 г.