

УДК 512.9+539.1

\mathbb{Z} -градуированные тригонометрические подалгебры Ли в $\widehat{A}_\infty, \widehat{B}_\infty, \widehat{C}_\infty, \widehat{D}_\infty$ и их представление вершинными операторами

© 1993. М. И. ГОЛЕНИЩЕВА-КУТУЗОВА, Д. Р. ЛЕБЕДЕВ

Введение

В различных задачах квантовой теории поля, теории струн, мембран и т.д. возникают различные бесконечномерные алгебры Ли, что является одной из причин большого интереса к различным аспектам теории таких алгебр. В частности, многие динамические системы, в том числе и вполне интегрируемые, находятся в тесной связи с различными типами бесконечномерных алгебр Ли и их представлениями.

Одним из примеров алгебр Ли такого типа является так называемая тригонометрическая синус-алгебра [1], являющаяся одномерным центральным расширением квантованной по Мойялу–Вейлю пуассоновой алгебры Ли на двумерном торе. Эта алгебра относится к широкому классу континуальных алгебр Ли, аксиоматизированных в [2], а более точно, к подклассу таких алгебр Ли, ассоциированных со скрещенным произведением [3]. Некоторые континуальные градуированные алгебры Ли появились недавно в теории динамических систем [2, 4–6]. Изучение этих систем, в частности, мотивирует возрастающий интерес к описанию различных «естественных» классов таких алгебр Ли и их представлений.

В настоящей работе вводятся четыре серии континуальных градуированных алгебр Ли $A_{\hbar} — D_{\hbar}$, зависящих от векторного параметра $\hbar = (\hbar_1, \dots, \hbar_n)$, где $\hbar_i \in \mathbb{R}$. Для серий A_{\hbar} и B_{\hbar} (точнее для их центральных расширений) строятся неприводимые представления в терминах вершинных операторов. Эти серии естественны в следующем смысле:

- i) Алгебра Ли A_{\hbar} при $\hbar = \hbar_1 \in \mathbb{R}$, точнее ее центральное расширение \widehat{A}_{\hbar_1} , совпадает с синус-алгеброй.
- ii) Как было установлено в [7] и [8], синус-алгебра \widehat{A}_{\hbar_1} вкладывается в бесконечномерную алгебру Ли $\widehat{A}_\infty = \widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)^1$. Серия \widehat{A}_{\hbar} , где \hbar — векторный параметр, строится как естественное обобщение серии \widehat{A}_{\hbar_1} , допускающее аналогичное вложение в \widehat{A}_∞ (формула (11)).
- iii) Серии $B_{\hbar} — D_{\hbar}$ определяются как пересечения соответствующих подалгебр $B_\infty — D_\infty$ в A_∞ ([9]) с образом алгебры A_{\hbar} в A_∞ . Их центральные расширения $\widehat{B}_{\hbar} — \widehat{D}_{\hbar}$ согласованы с центральными расширениями соответствующих подалгебр $\widehat{B}_\infty — \widehat{D}_\infty$ из [9].

¹Всюду в этой статье мы будем использовать «крышку» $\widehat{}$ для обозначения одномерного центрального расширения. В частности, \widehat{A}_∞ обозначает центральное расширение алгебры Ли $A_\infty \equiv \mathfrak{gl}(\infty)$ и т.д. Это не совпадает с обозначениями из [9], где, например, $\widehat{A}_\infty \equiv \overline{A}_\infty$, а A_∞ — центральное расширение.

Наибольший интерес, как нам кажется, представляют специальные фактор-алгебры Ли, получающиеся из введенных серий при специальном выборе значений векторного параметра $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$, $\hbar_1 \notin \pi\mathbb{Q}$, и последующей факторизации по соотношениям (24) и (28). Мы обозначаем эти факторы соответственно $\widehat{A}_{N, \hbar_1} - \widehat{D}_{N, \hbar_1}$. Последние являются естественными неабелевыми обобщениями синус-алгебры и, как показывает теорема 4, задают квантовые деформации алгебр Каца–Муди серий $A - D$, сохраняющие структуру алгебры Ли. Нам бы хотелось подчеркнуть, что в пределе $\hbar_1 \rightarrow 0$ алгебры Ли \widehat{A}_{N, \hbar_1} и \widehat{B}_{N, \hbar_1} переходят в алгебры Каца–Муди типов A и D (корни одинаковой длины). Это обстоятельство отчасти объясняет причину того, что мы строим представление вершинными операторами только для серий \widehat{A}_{\hbar} и \widehat{B}_{\hbar} . Видимо, как и в теории алгебр Каца–Муди, для построения представлений серий \widehat{C}_{\hbar} и \widehat{D}_{\hbar} необходимо расширить пространство представления, добавив свободные фермионы (или q -фермионы).

И, наконец, несколько библиографических замечаний. Коммутационные соотношения для \widehat{A}_{\hbar_1} в виде (1) были приведены в [1]. Коммутационные соотношения для алгебр Ли A_{\hbar} были приведены в [3], а алгебра B_{\hbar_1} исследовалась Попом и Романсом. Вложение \widehat{A}_{\hbar_1} в \widehat{A}_{∞} и представление вершинными операторами было получено в [7] и [8]. Серии $\widehat{B}_{\hbar} - \widehat{D}_{\hbar}$, формулы вложения в $\widehat{B}_{\infty} - \widehat{D}_{\infty}$ и представление алгебр Ли \widehat{A}_{\hbar} , \widehat{B}_{\hbar} вершинными операторами анонсированы в работе авторов [14]. Техника скрещенных произведений для построения ассоциированных континуальных алгебр Ли была описана в [3] (см. также [16]), а применительно к синус-алгебре такая реализация приводилась в [15]. Серии $B_{\hbar} - D_{\hbar}$ не являются алгебрами Ли, ассоциированными с ассоциативными C^* -алгебрами, т.е. не получаются конструкцией скрещенного произведения в отличие от серии A_{\hbar} . Фактор-алгебры Ли $\widehat{A}_{N, \hbar_1} - \widehat{D}_{N, \hbar_1}$, насколько нам известно, ранее не описывались.

Авторы благодарят А. Герасимова и О. Огиевского за полезные обсуждения, а также А. М. Вершика за конструктивные замечания.

§1. Определение серии \widehat{A}_{\hbar}

Тригонометрическая синус-алгебра является одномерным центральным расширением квантовой деформации алгебры Ли $C^{\infty}(T^2)$ функций на двумерном торе со скобкой Пуассона. В реализации, приведенной в [1], она задается образующими T_n , центральным элементом c и коммутационными соотношениями

$$[T_n, T_m] = 2i \sin[\hbar_1(m \times n)] T_{n+m} + n_2 \delta_{n+m, 0} \cdot c, \tag{1}$$

где $n = (n_1, n_2)$ и $m = (m_1, m_2)$ — целочисленные векторы двумерной плоскости, $m \times n = m_1 n_2 - m_2 n_1$, а \hbar_1 — произвольный вещественный параметр. Будем обозначать алгебру с коммутационными соотношениями (1) через \widehat{A}_{\hbar_1} , а без центрального расширения — через A_{\hbar_1} .

Другой подход к определению синус-алгебры основывается на идеях некоммутативной геометрии. Простейшим объектом некоммутативной геометрии является некоммутативный (квантовый) 2-тор [12]. Чтобы определить квантовый тор, введем ассоциативную C^* -алгебру A_{\hbar_1} , которая обычно называется алгеброй иррациональных вращений. C^* -алгебра A_{\hbar_1} порождена двумя унитарными операторами U_1 и U_2 , удовлетворяющими соотношению $U_2 U_1 = q^2 U_1 U_2$ ($q = e^{i\hbar_1}$). Произвольный элемент из A_{\hbar_1} может быть записан в виде формального ряда $f = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} f_{n_1, n_2} U_1^{n_1} U_2^{n_2}$. Как обычно, введем на A_{\hbar_1} структуру алгебры Ли,

определив коммутатор двух элементов $f, g \in A_{\hbar_1}$ формулой

$$[f, g] = f * g - g * f = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^2} f_{n_1, n_2} g_{m_1, m_2} (q^{2m_1 n_2} - q^{2m_2 n_1}) U_1^{n_1 + m_1} U_2^{n_2 + m_2}.$$

Алгебра Ли A_{\hbar_1} допускает одномерное центральное расширение, определяемое 2-коциклом $\omega(f, g) = \tau(\delta_2 f * g)$. Здесь τ — инвариантный функционал «след» на алгебре A_{\hbar_1} , определяемый формулой $\tau(\sum f_{n_1 n_2} U_1^{n_1} U_2^{n_2}) = f_{0,0}$, а δ_2 — одно из дифференцирований в A_{\hbar_1} , удовлетворяющее условиям $\delta_2 U_1 = 0$ и $\delta_2 U_2 = U_2$. Выберем в $\widehat{A}_{\hbar_1} = A_{\hbar_1} \oplus \mathbb{C} \cdot c$ базис вида $T_{n_1 n_2} = q^{n_1 n_2} U_1^{n_1} U_2^{n_2}$; тогда образующие $T_{n_1 n_2}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (1), определяющим синус-алгебру.

Естественным обобщением синус-алгебры являются тригонометрические алгебры Ли серии \widehat{A}_{\hbar} , $\hbar = (\hbar_1, \dots, \hbar_k) \in \mathbb{R}^k$. Алгебра Ли \widehat{A}_{\hbar} , $\hbar \in \mathbb{R}^k$, порождена образующими $A_{\alpha, m}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^k$, $(\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, центральным элементом c и соотношениями

$$[A_{\alpha, m}, A_{\beta, \ell}] = 2i \sin[m(\hbar, \beta) - \ell(\hbar, \alpha)] A_{\alpha+\beta, m+\ell} + m \delta_{\alpha+\beta, 0} \delta_{m+\ell, 0} \cdot c. \quad (2)$$

Здесь мы используем обозначение $(\hbar, \alpha) = \hbar_1 \alpha_1 + \dots + \hbar_k \alpha_k$.

Алгебра Ли A_{\hbar} , $\hbar \in \mathbb{R}^k$, может быть реализована как скрещенное произведение алгебры функций на k -мерном торе $T^k = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \mid \varphi_k \bmod 2\pi\}$ и оператора сдвига $U = e^{2(\hbar_1 \partial / \partial \varphi_1 + \dots + \hbar_k \partial / \partial \varphi_k)}$. Пусть $q = (q_1, \dots, q_k)$, $q_{\ell} = e^{i \hbar_{\ell}}$, и пусть $q^{\alpha} = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$. Тогда образующие $\widetilde{A}_{\alpha, m} = q^{m \alpha} e^{i(\alpha, \varphi)} U^m$ этой алгебры удовлетворяют соотношениям (2) при $c = 0$. Таким образом, соответствие $A_{\alpha, m} \mapsto \widetilde{A}_{\alpha, m}$ задает представление A_{\hbar} в пространстве $C^{\infty}(T^k)$.

Существует неприводимое представление алгебры Ли A_{\hbar} в пространстве $C^{\infty}(S^1)$ гладких функций на окружности $S^1 = \{\varphi_1 \bmod 2\pi\}$:

$$A_{\alpha, m} \mapsto q^{-m \alpha} e^{-i m \varphi_1} e^{-2(\hbar, \alpha) \partial / \partial \varphi_1}. \quad (3)$$

§2. Представление вершинными операторами алгебр Ли серии \widehat{A}_{\hbar}

В этом параграфе мы применим метод Каца–Каждана–Липовского–Вильсона [9, 10] для построения неприводимого представления тригонометрических алгебр Ли серии \widehat{A}_{\hbar} при помощи вершинных операторов.

Определим в алгебре Ли \widehat{A}_{\hbar} , $\hbar \in \mathbb{R}^k$, следующие подалгебры (аналоги верхне- и нижнетреугольных нильпотентных подалгебр полупростых алгебр Ли):

$$n_+ = \{A_{\alpha, m} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^k, m > 0\}, \quad n_- = \{A_{\alpha, m} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^k, m < 0\}$$

и максимальную коммутативную подалгебру (подалгебру Картана)

$$H = \{c, A_{\alpha, 0} \mid \alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\}.$$

Скобки $\{, \}$ обозначают линейную оболочку. Тогда $\widehat{A}_{\hbar} = n_- \oplus H \oplus n_+$ — разложение Картана–Вейля в алгебре \widehat{A}_{\hbar} . Имея разложение Картана–Вейля, мы стандартным образом можем ввести понятие представления со старшим вектором алгебры Ли \widehat{A}_{\hbar} . Старший вес $\Lambda \in H^*$ задается своими значениями на базисе H : $\Lambda(c) = a_0$, $\Lambda(A_{\alpha, 0}) = a_{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$.

Зафиксируем в \widehat{A}_{\hbar} подалгебру Гейзенберга $\mathcal{S} = \{c, p_m, q_m \mid m > 0\}$, где $p_m = A_{0, m}$, $q_m = (1/m) A_{0, -m}$. Определим производящие функции (поля) $X_{\alpha}(z)$

формулой

$$X_\alpha(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} A_{\alpha, \ell} z^{-\ell}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\},$$

где z — комплексная переменная. Отметим, что все генераторы алгебры \widehat{A}_\hbar содержатся либо в $X_\alpha(z)$ в виде коэффициентов Лорана, либо в подалгебре Гейзенберга \mathcal{S} . Несложно проверить, что для любого $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \bar{0}$ выполняются следующие соотношения:

$$[A_{0, m}, X_\alpha(z)] = 2i \sin[m(\hbar, \alpha)] z^m X_\alpha(z). \quad (4)$$

Существует стандартное неприводимое представление π_0 подалгебры Гейзенберга \mathcal{S} в пространстве $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ многочленов от бесконечного числа переменных:

$$\pi_0(A_{0, m}) = \partial/\partial x_m, \quad \pi_0(A_{0, -m}) = mx_m, \quad \pi_0(c) = 1, \quad m > 0. \quad (5)$$

Уравнения (4), в которых $A_{0, \pm m}$, $m > 0$, представлены операторами $\partial/\partial x_m$, mx_m , имеют единственное решение (с точностью до умножения на произвольные константы a_α) в классе дифференциальных операторов на пространстве V [9]:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_\alpha(z) = a_\alpha \exp \left\{ 2i \sum_{m \geq 1} z^m \sin[m(\hbar, \alpha)] x_m \right\} \\ \times \exp \left\{ 2i \sum_{m \geq 1} \frac{z^{-m}}{m} \sin[m(\hbar, \alpha)] \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Определим дифференциальные операторы на пространстве V формулой

$$\widehat{X}_{\alpha, \ell} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma dz z^{\ell-1} \widehat{X}_\alpha(z),$$

где интегрирование проводится по контуру Γ , охватывающему точку $0 \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. *Соответствие π такое, что*

$$\begin{aligned} \pi(A_{0, m}) = \partial/\partial x_m, \quad \pi(A_{0, -m}) = mx_m, \quad \pi(c) = 1, \quad m > 0; \\ \pi(A_{\alpha, n}) = \widehat{X}_{\alpha, n}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

задает неприводимое представление алгебры Ли A_\hbar в пространстве $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ с вакуумным вектором $|0\rangle = 1$. Константы a_α , $\alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$, в формуле (6) определяются из уравнения

$$a_\alpha a_{\alpha'} = \frac{q^{\alpha+\alpha'} - q^{-(\alpha+\alpha')}}{(q^\alpha - q^{-\alpha})(q^{\alpha'} - q^{-\alpha'})} a_{\alpha+\alpha'},$$

которое имеет единственное (с точностью до умножения на фазовый множитель $e^{i(\alpha, \lambda)}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$) решение

$$a_\alpha = q^\alpha / (q^\alpha - q^{-\alpha}). \quad (7)$$

Старший вес $\Lambda \in H^$ определяется условиями $\Lambda(A_{\alpha, 0}) = a_\alpha$.*

Доказательство теоремы состоит в прямой проверке коммутационных соотношений между образующими $\widehat{X}_{\alpha, \ell}$. Для этого выпишем правило слияния двух вершинных операторов (6) в различных точках z и ζ комплексной плоскости.

Несложно проверить, что при $|z| > |\zeta|$

$$\widehat{X}_\alpha(z)\widehat{X}_{\alpha'}(\zeta) = \frac{(z - q^{\alpha-\alpha'}\zeta)(z - q^{-(\alpha-\alpha')}\zeta)}{(z - q^{\alpha+\alpha'}\zeta)(z - q^{-(\alpha+\alpha')}\zeta)} : \widehat{X}_\alpha(z)\widehat{X}_{\alpha'}(\zeta) :. \quad (8)$$

Нормальное упорядочение понимается в стандартном смысле, т.е. все операторы рождения в $: \widehat{X}_\alpha(z)\widehat{X}_{\alpha'}(\zeta) :$ стоят слева. Поскольку правая часть в формуле (8) не меняется при замене $z \leftrightarrow \zeta$, $\alpha \leftrightarrow \alpha'$, то вычисление коммутаторов $[\widehat{X}_{\alpha,n}, \widehat{X}_{\alpha',m}]$ для $\alpha + \alpha' \neq 0$ сводится к вычислению контурных интегралов

$$\sum_{i=1}^2 \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\Gamma} d\zeta \zeta^{n-1} \oint_{\Gamma_i} dz z^{m-1} F(z, \zeta),$$

где $F(z, \zeta)$ — обозначение для правой части формулы (8), а Γ_i , $i = 1, 2$, — две инфинитезимальные окружности, охватывающие полюсы $z = q^{\alpha+\alpha'}\zeta$, $z = q^{-(\alpha+\alpha')}\zeta$ правой части формулы (8). В случае когда $\alpha + \alpha' = \bar{0}$, два полюса первого порядка сливаются в один полюс первого порядка. Результат вычислений следующий. При условии что константы a_α определяются формулами (7), коммутационные соотношения между операторами $\widehat{X}_{\alpha,\ell}$ таковы:

$$\begin{aligned} [\widehat{X}_{\alpha,n}, \widehat{X}_{\alpha',m}] &= 2i \sin[n(\hbar, \alpha') - m(\hbar, \alpha)] X_{\alpha+\alpha', n+m} \quad \text{при } \alpha + \alpha' \neq 0; \\ [\widehat{X}_{\alpha,n}, \widehat{X}_{-\alpha,m}] &= \begin{cases} -2i \sin[p(\hbar, \alpha)] \partial/\partial x_p, & p = n + m > 0, \\ 2i \sin[p(\hbar, \alpha)] p x_p, & p = -(n + m) > 0, \\ n \cdot 1, & n + m = 0. \end{cases} \quad (9) \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (9) и (2), мы видим, что алгебра дифференциальных операторов $\partial/\partial x_m$, x_m , 1 , $\widehat{X}_{\alpha,n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, замкнута относительно операции коммутирования (что априори не очевидно) и задает представление алгебры Ли \widehat{A}_\hbar в пространстве V . Это представление неприводимо, так как является циклической оболочкой вектора $|0\rangle = 1 \in V$. Более того, оно остается неприводимым при ограничении на подалгебру Гейзенберга \mathcal{S} . Используя выражение (6) для вершинного оператора $\widehat{X}_\alpha(z)$, имеем $X_{\alpha,0}|0\rangle = a_\alpha$ и $X_{\alpha,n}|0\rangle = 0$ при $n > 0$. Это означает, что мы построили представление со старшим вектором $|0\rangle = 1$ и старшим весом $\Lambda \in H^*$ таким, что $\Lambda(A_{\alpha,0}) = a_\alpha$.

Определим на \widehat{A}_\hbar компактную инволюцию ω_0 (см. [9]) условиями $\omega_0(A_{\alpha,m}) = -A_{\alpha,-m}$. Тогда на пространстве V существует контравариантная эрмитова форма Φ (форма Шаповалова). Положим $D_m = (1/m)\partial/\partial x_m$; тогда условие контравариантности эквивалентно условию $\Phi(D_m(P), Q) = \Phi(P, x_m Q)$ для любых $P, Q \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Таким образом,

$$\Phi(P, Q) = (P(D_1, D_2, \dots)\bar{Q}(x_1, x_2, \dots))(0).$$

Другими словами, ортогональный базис в $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ образуют мономы $x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s}$, и длина каждого такого монома равна $\prod_{j=1}^s j^{-k_j} (k_j)!$ (см. [9]).

§3. Вложение \widehat{A}_\hbar в A_∞

Нетрудно заметить, что вершинные операторы $\widehat{X}_\alpha(z)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^k$, могут быть получены при помощи редукции $u = zq^\alpha$, $v = zq^{-\alpha}$ из стандартного вершинного оператора

$$Z(u, v) = \frac{u}{u-v} \left[\exp \left\{ \sum_{m=1} (u^m - v^m) x_m \right\} \exp \left\{ - \sum_{m \geq 1} \frac{u^{-m} - v^{-m}}{m} \frac{\partial}{\partial x_m} \right\} - 1 \right],$$

реализующего базисное представление алгебры Ли $\widehat{A}_\infty = \widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ [9]. Пусть $Z(u, v) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} Z_{ij} u^i v^{-j}$. Положим $u = zq^\alpha$, $v = zq^{-\alpha}$; тогда путем несложных вычислений получаем, что

$$\widehat{X}_{\alpha, m} = q^{m\alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n\alpha} Z_{n, n+m} + \delta_{m, 0} a_\alpha \cdot 1.$$

Операторы Z_{ij} реализуют базисное представление \widehat{A}_∞ . Справедливо и более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E_{ij} , $i, j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют коммутационным соотношениям для \widehat{A}_∞ с произвольным центральным зарядом c :

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{ij} - \delta_{li} E_{kj} + \psi(E_{ij}, E_{kl}) \cdot c,$$

где ψ есть 2-коцикл на A_∞ , определяемый условиями (см. [9])

$$\begin{aligned} \psi(E_{ij}, E_{ji}) &= -\psi(E_{ji}, E_{ij}) = 1, & \text{если } i \leq 0, j \geq 1, \\ \psi(E_{ij}, E_{kl}) &= 0 & \text{в остальных случаях.} \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда генераторы $A_{\alpha, m}$, $(\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, определяемые формулой

$$A_{\alpha, m} = q^{m\alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n\alpha} E_{n, n+m} + \delta_{m, 0} a_\alpha \cdot c, \tag{11}$$

где $a_\alpha = q^\alpha / (q^\alpha - q^{-\alpha})$, удовлетворяют коммутационным соотношениям (2), определяющим алгебру Ли \widehat{A}_h .

Формула (11) задает вложение алгебры \widehat{A}_h в \widehat{A}_∞ . Отметим, что эта формула является естественным обобщением аналогичной формулы, задающей вложение синус-алгебры в \widehat{A}_∞ ([7, 8]).

§4. Серии \widehat{B}_h , \widehat{C}_h , \widehat{D}_h тригонометрических алгебр Ли

Принимая во внимание то, что алгебру Ли \widehat{A}_h можно рассматривать как подалгебру в $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$, определяемую формулами (11), мы можем определить тригонометрические алгебры Ли серий \widehat{B}_h , \widehat{C}_h и \widehat{D}_h вполне естественным способом.

Напомним [9], что алгебры Ли B_∞ , C_∞ и D_∞ определяются как подалгебры в A_∞ , сохраняющие соответственно билинейные формы

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= (-1)^i \delta_{i, -j} & \text{в случае } B_\infty, \\ \langle e_i, e_j \rangle &= (-1)^i \delta_{i, 1-j} & \text{в случае } C_\infty, \\ \langle e_i, e_j \rangle &= \delta_{i, 1-j} & \text{в случае } D_\infty \end{aligned}$$

в $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$. Одномерное центральное расширение этих подалгебр задается 2-коциклом $r\psi$, где ψ определяется формулами (10), а $r = 1/2$ для B_∞ и D_∞ и $r = 1$ для C_∞ . Тогда естественно определить тригонометрические алгебры Ли серий \widehat{B}_h , \widehat{C}_h и \widehat{D}_h как одномерные центральные расширения при помощи коцикла $r\psi$ пересечений A_h с B_∞ , C_∞ и D_∞ . Прямые вычисления приводят к следующему списку результатов.

1. Серия \widehat{B}_h . Тригонометрический базис в \widehat{B}_h имеет вид

$$B_{\alpha, m} = A_{\alpha, m} - (-1)^m A_{-\alpha, m}, \quad (\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{12}$$

Подалгебру B_{\hbar} можно описать как множество неподвижных точек автоморфизма второго порядка алгебры Ли A_{\hbar} , определяемого формулой

$$\tau_B(A_{\alpha,m}) = -(-1)^m A_{-\alpha,m}, \quad (13)$$

т.е. $\tau_B(B_{\alpha,m}) = B_{\alpha,m}$.

Коммутационные соотношения для \widehat{B}_{\hbar} в тригонометрическом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} [B_{\alpha,m}, B_{\beta,n}] &= 2i \sin[m(\hbar, \beta) - n(\hbar, \alpha)] B_{\alpha+\beta, m+n} \\ &\quad + (-1)^n 2i \sin[m(\hbar, \beta) + n(\hbar, \alpha)] B_{\alpha-\beta, m+n} \\ &\quad + m(\delta_{\alpha+\beta,0} - (-1)^m \delta_{\alpha-\beta,0}) \delta_{m+n,0} \cdot c. \end{aligned} \quad (14)$$

Формула вложения \widehat{B}_{\hbar} в \widehat{B}_{∞} :

$$B_{\alpha,m} = q^{\alpha m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n\alpha} (E_{n, n+m} - (-1)^m E_{-n-m, -n}) + \delta_{m,0} b_{\alpha} c, \quad (15)$$

где $b_{\alpha} = (1/2)(q^{\alpha} + q^{-\alpha})/(q^{\alpha} - q^{-\alpha})$.

По аналогии со случаем \widehat{A}_{\hbar} мы можем построить представление вершинными операторами серии \widehat{B}_{\hbar} . Это построение проведено в следующем параграфе.

2. Серия \widehat{C}_{\hbar} . Тригонометрический базис в \widehat{C}_{\hbar} имеет вид

$$C_{\alpha,m} = A_{\alpha,m} - (-1)^m q^{2\alpha} A_{-\alpha,m}, \quad (\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (16)$$

Аutomорфизм второго порядка τ_C алгебры Ли \widehat{A}_{\hbar} такой, что $\tau_C(C_{\alpha,m}) = C_{\alpha,m}$, определяется формулой

$$\tau_C(A_{\alpha,m}) = -(-1)^m q^{2\alpha} A_{-\alpha,m}. \quad (17)$$

Коммутационные соотношения для \widehat{C}_{\hbar} в тригонометрическом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} [C_{\alpha,m}, C_{\beta,n}] &= 2i \sin[m(\hbar, \beta) - n(\hbar, \alpha)] C_{\alpha+\beta, m+n} \\ &\quad + (-1)^n q^{2\beta} 2i \sin[m(\hbar, \beta) + n(\hbar, \alpha)] C_{\alpha-\beta, m+n} \\ &\quad + 2m(\delta_{\alpha+\beta,0} - (-1)^m q^{2\alpha} \delta_{\alpha-\beta,0}) \delta_{m+n,0} \cdot c. \end{aligned} \quad (18)$$

Формула вложения \widehat{C}_{\hbar} в \widehat{C}_{∞} :

$$C_{\alpha,m} = q^{m\alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n\alpha} (E_{n, n+m} - (-1)^m E_{1-n-m, 1-n}) + 2\delta_{m,0} a_{\alpha} \cdot c.$$

3. Серия \widehat{D}_{\hbar} . Тригонометрический базис в \widehat{D}_{\hbar} :

$$D_{\alpha,m} = A_{\alpha,m} - q^{2\alpha} A_{-\alpha,m}, \quad (\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (19)$$

Аutomорфизм второго порядка τ_D алгебры Ли A_{\hbar} такой, что $\tau_D(D_{\alpha,m}) = D_{\alpha,m}$, определяется формулой

$$\tau_D(A_{\alpha,m}) = -q^{2\alpha} A_{-\alpha,m}, \quad (\alpha, m) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Коммутационные соотношения для \widehat{D}_{\hbar} в тригонометрическом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} [D_{\alpha,m}, D_{\beta,n}] &= 2i \sin[m(\hbar, \beta) - n(\hbar, \alpha)] D_{\alpha+\beta, m+n} \\ &\quad + 2iq^{2\beta} \sin[m(\hbar, \beta) + n(\hbar, \alpha)] D_{\alpha-\beta, m+n} \\ &\quad + m(\delta_{\alpha+\beta,0} - q^{2\alpha} \delta_{\alpha-\beta,0}) \delta_{m+n,0} \cdot c \end{aligned} \quad (20)$$

Формула вложения \widehat{D}_\hbar в \widehat{D}_∞ :

$$D_{\alpha,m} = q^{m\alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n\alpha} (E_{n,n+m} - E_{1-n-m,1-n}) + \delta_{m,0} a_\alpha \cdot c.$$

Отметим, что формула (3), задающая представление алгебры Ли A_\hbar дифференциальными операторами на окружности, а также формулы (12), (16) и (19), выражающие образующие алгебр Ли B_\hbar , C_\hbar и D_\hbar через образующие A_\hbar , позволяют построить представление алгебр Ли серий B_\hbar , C_\hbar и D_\hbar дифференциальными операторами на окружности.

Заметим, что все построенные алгебры Ли являются \mathbb{Z} -градуированными алгебрами Ли. Пусть $X = A, B, C$ или D ; тогда

$$\widehat{X}_\hbar = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} X_n,$$

где X_n — линейная оболочка образующих $X_{\alpha,n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^k$.

§5. Представление вершинными операторами серии \widehat{B}_\hbar

В этом параграфе мы в общих чертах опишем конструкцию представления серии \widehat{B}_\hbar вершинными операторами.

Зафиксируем бесконечномерную подалгебру Гейзенберга в \widehat{B}_\hbar :

$$S = \{p_m = B_{0,m}/2, q_m = B_{0,-m}/m, m > 0, m \text{ нечетно}\}.$$

Определим производящие функции генераторов $B_{\alpha,m}$ формулой

$$B_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_{\alpha,n} z^{-n}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\},$$

где z — комплексная переменная.

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} [p_m, B_\alpha(z)] &= 2iz^m \sin[m(\hbar, \alpha)] B_\alpha(z), \\ [q_m, B_\alpha(z)] &= -4iz^{-m} m^{-1} \sin[m(\hbar, \alpha)] B_\alpha(z). \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (21), в которых p_m и q_m ($m \geq 1, m$ нечетно) представлены соответственно операторами $\partial/\partial x_m$ и x_m , имеют единственное, с точностью до умножения на произвольные константы b_α , решение в классе дифференциальных операторов на пространстве $V = \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_\alpha(z) &= b_\alpha \exp \left\{ 2i \sum_{m \geq 1, m=2k+1} z^m \sin[m(\hbar, \alpha)] x_m \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{m \geq 1, m=2k+1} \frac{z^m}{m} \sin[m(\hbar, \alpha)] \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме из § 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\widehat{B}_{\alpha,n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma dz z^{n-1} \widehat{B}_\alpha(z),$$

где контур интегрирования Γ содержит внутри точку $0 \in \mathbb{C}$. Тогда

- (1) *Отображение π такое, что $\pi(B_{\alpha,n}) = \widehat{B}_{\alpha,n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^k \setminus 0$, $\pi(c) = 1$, $\pi(B_{0,m}/2) = \partial/\partial x_m$, $\pi(B_{0,-m}/m) = x_m$, $m \geq 1, m$ нечетно, задает неприводимое представление со старшим вектором алгебры Ли \widehat{B}_\hbar в*

пространстве $V = \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ при условии, что константы b_α в формуле (22) удовлетворяют уравнению

$$b_\alpha b_{\alpha'} = \frac{(q^\alpha + q^{-\alpha})(q^{\alpha'} + q^{-\alpha'})(q^{\alpha+\alpha'} - q^{-(\alpha+\alpha')})}{(q^\alpha - q^{-\alpha})(q^{\alpha'} - q^{-\alpha'})(q^{\alpha+\alpha'} + q^{-(\alpha+\alpha')})} b_{\alpha+\alpha'}. \quad (23)$$

(2) Уравнения (23) имеют единственное решение

$$b_\alpha = (q^\alpha + q^{-\alpha})/2(q^\alpha - q^{-\alpha})$$

с точностью до умножения на фазовый множитель $e^{i(\alpha, \lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}^k$.

(3) Вакуумный вектор задается $|0\rangle = 1 \in V$, а старший вес представления $\Lambda \in H^*$ определяется своими значениями $\Lambda(B_{\alpha,0}) = b_\alpha$, где $H = \{B_{\alpha,0}\}$ — максимальная коммутативная подалгебра в B_{\hbar} .

Заметим, что вершинный оператор (22) может быть получен при помощи редукции $u = q^\alpha z$, $v = -q^{-\alpha} z$ из вершинного оператора

$$\Gamma_B(u, v) = \frac{1}{2} \frac{u-v}{u+v} \exp \left\{ \sum_{m \geq 1, m \text{ нечетн.}} (u^m + v^m) x_m \right\} \\ \times \exp \left\{ -2 \sum_{m \geq 1, m \text{ нечетн.}} \frac{1}{m} (u^{-m} + v^{-m}) \frac{\partial}{\partial x_m} \right\},$$

реализующего базисное представление алгебры Ли \widehat{B}_∞ [9]:

$$\sum_{i, j \in \mathbb{Z}} ((-1)^j E_{ij} - (-1)^i E_{-j, -i}) u^i v^{-j} \mapsto \left(\Gamma_B(u, v) - \frac{1}{2} \frac{u-v}{u+v} \right).$$

Формула вложения \widehat{B}_{\hbar} в \widehat{B}_∞ (15) согласована с этой редукцией.

§6. Некоторые реализации и редукции алгебр Ли серий \widehat{A}_{\hbar} — \widehat{D}_{\hbar} при специальных значениях параметра \hbar

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые частные случаи алгебр Ли \widehat{A}_{\hbar} , \widehat{B}_{\hbar} , \widehat{C}_{\hbar} и \widehat{D}_{\hbar} для специальных значений вектора \hbar , а также некоторые факторы этих алгебр. Отметим, что эти частные случаи включают синус-алгебру, алгебры Каца–Мууди серий A — D , а также алгебры Ли, которые можно реализовать как \hbar -деформации основных серий алгебр Каца–Мууди.

1. B_{\hbar_1} -, C_{\hbar_1} -, D_{\hbar_1} -аналоги синус-алгебры. Пусть $\hbar = \hbar_1$ и $\hbar_1 \notin \pi\mathbb{Q}$, тогда, как уже отмечалось, алгебра A_{\hbar_1} изоморфна синус-алгебре (1). Если в формуле (1) правую часть поделить на $2i\hbar_1$ и перейти к пределу при $\hbar_1 \rightarrow 0$ (без центрального заряда), то получим соотношения, определяемые скобкой Пуассона на $T^2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \bmod 2\pi\}$ в базисе Фурье $T_{n_1 n_2} = e^{i(n_1 \varphi_1 + n_2 \varphi_2)}$:

$$[T_n, T_m] = (m \times n) T_{n+m}.$$

Подалгебры B_{\hbar_1} , C_{\hbar_1} и D_{\hbar_1} определяют при аналогичном предельном переходе пуассоновы подалгебры в $C^\infty(T^2)$. Алгебры B_{\hbar_1} и D_{\hbar_1} в классическом пределе «склеиваются» и задают в $C^\infty(T^2)$ подалгебру, состоящую из функций f на T^2 , обладающих дополнительной симметрией: $f(-\varphi_1, \varphi_2 + \pi) = -f(\varphi_1, \varphi_2)$. Алгебра D_{\hbar_1} является квантованием пуассоновой подалгебры в $C^\infty(T^2)$, выделяемой условием $f(-\varphi_1, \varphi_2) = -f(\varphi_1, \varphi_2)$.

2. Определение и реализация алгебры Ли \widehat{A}_{N, \hbar_1} . Пусть $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$, $\hbar_1 \notin \pi\mathbb{Q}$. Рассмотрим сначала серию \widehat{A}_{\hbar} . В силу формулы (11) образующие $A_{\alpha, m}$, $\alpha = (n_1, n_2)$, удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$A_{n_1+rN, n_2, m} = (-1)^{mr} A_{n_1, n_2, m}, \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Обозначим через \widehat{A}_{N, \hbar_1} фактор-алгебру по этим соотношениям. Покажем, что алгебру Ли \widehat{A}_{N, \hbar_1} можно реализовать как скрещенное произведение алгебры Каца–Мууди $A_{N-1}^{(1)} \simeq \widehat{sl}(N)$ и оператора сдвига $U_2 = e^{2\hbar_1 \partial / \partial \varphi_1}$.

В алгебре Ли $\widehat{sl}(N)$ можно выбрать тригонометрический базис

$$A_{n, m} = \omega^{nm/2} Q^n P^m \otimes U_1^m,$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^N \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = e^{2\pi i/N}, \quad U_1 = e^{i\varphi_1}. \quad (25)$$

Здесь мы используем «главную реализацию» серии $A_{N-1}^{(1)}$ (см. [9]), т.е. градуировку по высоте корня или, что то же самое, степенью при P . Тогда в скрещенном произведении $\sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} A_{N-1}^{(1)} \otimes U_2^{n_2}$ можно выбрать базис вида

$$A_{n_1, n_2, m} = \omega^{n_1 m/2} q^{n_2 m} Q^{n_1} P^m \otimes U_1^m U_2^{-n_2}, \quad q = e^{i\hbar_1}. \quad (26)$$

Образующие $A_{n_1, n_2, m}$, определяемые формулой (26), удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры A_{\hbar} при $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$ (формула (2) при $c = 0$) и дополнительным соотношениям (24).

Приведем другой подход к определению алгебры \widehat{A}_{N, \hbar_1} , использующий идеи некоммутативной геометрии. Отметим, что алгебры с генераторами $A_{n, n, m}$ появлялись уже в работе [11]. Рассмотрим алгебру $\text{Mat}(N) \otimes A_{\hbar_1}$ отображений квантового тора в полную матричную алгебру $\text{Mat}(N)$. Алгебра $\text{Mat}(N) \otimes A_{\hbar_1}$ имеет структуру C^* -алгебры с операцией умножения $*$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — инвариантная билинейная форма (форма Киллинга) на алгебре $\text{Mat}(N)$: $\langle A, B \rangle = (1/N) \text{tr} AB$. Тогда в алгебре $\text{Mat}(N) \otimes A_{\hbar_1}$ определим билинейную форму

$$\langle A(U_1, U_2), B(U_1, U_2) \rangle_{\hbar_1} = (1/N) \tau \text{tr} (A(U_1, U_2) * B(U_1, U_2)),$$

которая позволяет построить центральное расширение алгебры Ли $\text{Mat}(N) \otimes A_{\hbar_1}$ при помощи 2-коцикла

$$\omega(A(U_1, U_2), B(U_1, U_2)) = \langle \delta_2 A(U_1, U_2), B(U_1, U_2) \rangle_{\hbar_1}.$$

Здесь U_1, U_2 — образующие некоммутативного тора, τ — инвариантный след на A_{\hbar_1} , а δ_2 — дифференцирование в A_{\hbar_1} (см. § 1). Определим в $\text{Mat}(N) \otimes A_{\hbar_1} \oplus \mathbb{C} \cdot c$ подалгебру условием

$$\tau \text{tr} (A(U_1, U_2)) = 0.$$

Ввиду того, что $\tau \text{tr} [A(U_1, U_2), B(U_1, U_2)] = 0$, это условие действительно выделяет подалгебру. Представляя $U_1 = e^{i\varphi_1}$, $U_2 = e^{2\hbar_1 \partial / \partial \varphi}$, несложно доказать, что полученная алгебра изоморфна \widehat{A}_{N, \hbar_1} . Доказательство основывается на изоморфизме различных реализаций (градуировок) для алгебры $A_{N-1}^{(1)}$ (см. [9]).

Очевидно, что если в (26) перейти к пределу при $\hbar_1 \rightarrow 0$ ($U_2 \rightarrow 1$), то получим базис (25) в алгебре Ли $A_{N-1}^{(1)}$, а коммутационные соотношения для \widehat{A}_{N, \hbar_1}

перейдут в коммутационные соотношения для $A_{N-1}^{(1)}$. Поэтому \widehat{A}_{N, \hbar_1} можно рассматривать как квантовую деформацию $A_{N-1}^{(1)}$. Вообще говоря, любую \widehat{A}_{\hbar} для $\hbar = (\pi/N, \hbar_1, \dots, \hbar_k)$ можно рассматривать как k -параметрическую деформацию $A_{N-1}^{(1)}$.

3. Определение и реализация алгебр Ли \widehat{B}_{N, \hbar_1} , \widehat{C}_{N, \hbar_1} и \widehat{D}_{N, \hbar_1} . При реализации коммутационных соотношений для серии \widehat{A}_{N, \hbar_1} мы существенно пользовались «тригонометрическим» базисом в классической алгебре Ли $sl(N) \simeq A_{N-1}$, построенным из матриц P и Q . В классических алгебрах Ли серий B , C и D также можно построить тригонометрические базисы из матриц P и Q . Пусть $A_{n, m} = \omega^{nm/2} Q^n P^m$, $\omega = e^{2\pi i/N}$ — тригонометрический базис в $sl(N)$, $0 \leq n, m \leq N-1$, $(n, m) \neq (0, 0)$. Тогда в B_{ℓ} существует тригонометрический базис вида

$$B_{n, m} = A_{n, m} - \omega^n A_{-n, m}, \quad 0 \leq n \leq \ell, \quad 0 \leq m \leq 2\ell,$$

где $A_{n, m} \in sl(2\ell + 1)$. Матриц $B_{n, m}$, отличных от нуля, $\ell(2\ell + 1)$ штук; они линейно независимы и удовлетворяют условию $sB^t s = -B$, где $s = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. являются кососимметричными относительно второй диагонали и, стало быть, образуют базис в B_{ℓ} .

В C_{ℓ} существует тригонометрический базис вида

$$C_{n, m} = A_{n, m} - (-1)^m \omega^n A_{-n, m}, \quad 0 \leq n \leq \ell, \quad 0 \leq m \leq 2\ell - 1,$$

где $A_{n, m} \in sl(2\ell)$. Алгебра Ли с базисом $\{C_{n, m}\}$ состоит из комплексных $2\ell \times 2\ell$ -матриц, кососимметричных относительно билинейной формы (sx, y) , где $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. совпадает с C_{ℓ} .

В D_{ℓ} можно выбрать тригонометрический базис вида

$$D_{n, m} = A_{n, m} - \omega^n A_{-n, m}, \quad 0 < n \leq \ell, \quad 0 \leq m \leq 2\ell - 1,$$

а также вида

$$D'_{n, m} = A_{n, m} - (-1)^m A_{-n, m}, \quad 0 \leq n \leq \ell - 1, \quad 0 \leq m \leq 2\ell - 1,$$

где $A_{n, m} \in sl(2\ell)$. Матрицы $D_{n, m}$ являются кососимметричными относительно второй диагонали, а матрицы $D'_{n, m}$ кососимметричны относительно билинейной

невырожденной формы с матрицей $s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. образуют базис

в D_{ℓ} .

В классической алгебре Ли $A_{2\ell} \simeq sl(2\ell + 1)$ помимо тригонометрического базиса $A_{n, m}$ можно выбрать тригонометрический базис вида

$$A'_{n, m} = A_{n, m} - (-1)^m A_{-n, m}, \quad 0 \leq n \leq \ell, \quad 0 \leq m \leq 4\ell + 1,$$

а также вида

$$A''_{n, m} = A_{n, m} - (-1)^m \omega^n A_{-n, m}, \quad 0 \leq n \leq \ell, \quad 0 \leq m \leq 4\ell + 1.$$

Во всех рассмотренных случаях второй индекс m задает $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -градуировку соответствующей алгебры Ли. Пусть \mathfrak{g} — классическая алгебра Ли типа A , B , C или D . Имея конечную $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -градуировку

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

или, что то же самое, автоморфизм σ конечного порядка, $\sigma^N = 1$, алгебры Ли \mathfrak{g} , мы можем определить в $\mathfrak{g}[U_1, U_1^{-1}] \oplus \mathbb{C} \cdot c$ подалгебру

$$L(\mathfrak{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{j \bmod N} \otimes U_1^j.$$

Автоморфизм σ состоит в умножении элементов из \mathfrak{g}_j на ω^j , где $\omega = e^{2\pi i/N}$. Элемент центра c принадлежит \mathfrak{g}_0 . Известно [9], что алгебра Ли $L(\mathfrak{g}, \sigma)$ в зависимости от свойств автоморфизма σ изоморфна $A_\ell^{(k)}$, $B_\ell^{(1)}$, $C_\ell^{(1)}$, $D_\ell^{(k)}$, где $k = 1, 2$ (в случае D_4 $k = 1, 2, 3$), если \mathfrak{g} — соответственно алгебра типа A , B , C , D . Тогда в алгебрах Каца–Мууди можно выбрать тригонометрический базис вида

$$\begin{aligned} B_{nm} \otimes U_1^m \text{ в } B_\ell^{(1)}, \quad C_{nm} \otimes U_1^m \text{ в } C_\ell^{(1)}, \quad D_{nm} \otimes U_1^m \text{ в } D_\ell^{(1)}, \\ D'_{nm} \otimes U_1^m \text{ в } D_{(\ell-1)+1}^{(2)}, \quad A'_{nm} \otimes U_1^m \text{ либо } A''_{nm} \otimes U_1^m \text{ в } A_{2\ell}^{(2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Теперь вернемся к алгебрам Ли \widehat{B}_{\hbar} , \widehat{C}_{\hbar} , \widehat{D}_{\hbar} , $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$. Образующие этих алгебр нумеруются тремя целочисленными индексами (n_1, n_2, m) , кроме того, выполняются дополнительные соотношения

$$T_{n_1+rN, n_2, m} = (-1)^{rm} T_{n_1, n_2, m}, \quad \text{где } T = A, B, C \text{ или } D.$$

Определим алгебры Ли \widehat{B}_{N, \hbar_1} , \widehat{C}_{N, \hbar_1} и \widehat{D}_{N, \hbar_1} как алгебры, получаемые факторизацией \widehat{B}_{\hbar} , \widehat{C}_{\hbar} , \widehat{D}_{\hbar} , $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$, по этим соотношениям. Представляя $A_{n_1, n_2, m} = \omega^{n_1 m/2} q^{n_2 m} Q^{n_1} P^m \otimes U_1^m U_2^{-n_2}$ в формулах (12), (16), (19) при $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$, получим реализацию для алгебр Ли \widehat{B}_{N, \hbar_1} , \widehat{C}_{N, \hbar_1} , \widehat{D}_{N, \hbar_1} .

Заметим, что поскольку данные алгебры не обладают структурой C^* -алгебр, их нельзя реализовать как скрещенное произведение соответствующих алгебр Каца–Мууди и оператора сдвига.

Сравнивая явные выражения для тригонометрических базисов в алгебрах Каца–Мууди (формулы (27)) и явные выражения для тригонометрических базисов в алгебрах Ли \widehat{B}_{N, \hbar_1} , \widehat{C}_{N, \hbar_1} и \widehat{D}_{N, \hbar_1} (формулы (12), (16), (19)), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Алгебры Ли \widehat{B}_{N, \hbar_1} , \widehat{C}_{N, \hbar_1} и \widehat{D}_{N, \hbar_1} имеют следующие пределы при $\hbar_1 \rightarrow 0$:*

- 1) \widehat{B}_{N, \hbar_1} при $N = 2\ell + 1$ переходит в $A_{2\ell}^{(2)}$, а при $N = 2\ell + 2$ — в $D_{\ell+1}^{(2)}$,
- 2) \widehat{C}_{N, \hbar_1} при $N = 2\ell + 1$ переходит в $A_{2\ell}^{(2)}$, а при $N = 2\ell$ — в $C_\ell^{(1)}$,
- 3) \widehat{D}_{N, \hbar_1} при $N = 2\ell + 1$ переходит в $B_\ell^{(1)}$, а при $N = 2\ell$ — в $D_\ell^{(1)}$,

т.е. они могут рассматриваться как \hbar_1 -деформации соответствующих алгебр Каца–Мууди (при соответствующих значениях N).

В теореме 4 можно заменить \hbar_1 на вектор $(\hbar_1, \dots, \hbar_k)$; тогда мы получим k -параметрические деформации соответствующих алгебр Каца–Мууди.

Отметим что происходит с вершинными операторами, например с (6), при подстановке $\hbar = (\pi/N, \hbar_1)$. Очевидно, что вершинные операторы автоматически до-

пускают редукцию (24), т.е. представление вершинными операторами факторизуется и задает представление \widehat{A}_{N, \hbar_1} . Если положить затем $\hbar_1 = 0$, то мы получим в точности вершинные операторы из [10], задающие представление $A_N^{(1)}$. То же самое справедливо и для представления вершинными операторами серии \widehat{B}_{\hbar} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Fairlie D., Fletcher P., Zachos C. Trigonometric structure constants for new infinite-dimensional algebras // Phys. Lett. B – 1989. – V. 218, No. 2. – P. 203–206.
2. Saveliev M. V., Vershik A. M. Continual analogs of contragredient Lie algebras // Comm. Math. Phys. – V. 126, No. 2 – P. 367–378.
3. Saveliev M. V., Vershik A. M. New examples of continuum graded Lie algebras // Phys. Lett. A – 1990. – V. 143. – P. 121–128.
4. Lebedev D., Orlov A., Pakuliak S., Zabrodin A. Nonlocal integrable equations of the Toda hierarchy // Phys. Lett. A – 1991. – V. 160. – P. 166–172.
5. Lebedev D., Pakuliak S. Zakharov–Shabat technique with quantized spectral parameter in the theory of integrable models // Phys. Lett. A – 1991. – V. 160. – P. 173–178.
6. Hoppe J., Olshanetsky M., Theisen S. Dynamical system on trigonometrical algebras. – Preprint KA–THEP–10/91.
7. Floratos E. G. Spin wedge and vertex operators representations of trigonometric algebras and their central extensions // Phys. Lett. B – 1989. – V. 232. – P. 467–474.
8. Голенищева-Кутузова М., Лебедев Д. Представление вершинными операторами синус-алгебры Вейля–Мойала–Ферли // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 52, №10. – С. 1164–1167.
9. Кас V. Infinite-dimensional Lie algebras. – Cambridge Univ. Press, 1991.
10. Кас V., Kazhdan D., Lepowsky J., Wilson R. Realization of the basic representation of the Euclidean Lie algebras // Adv. in Math. – 1981. – V. 42. – P. 83–112.
11. Connes A., Rieffel M. Yang–Mills for non-commutative two tori // Contemp. Math. – 1978. – V. 62. – P. 237–266.
12. Connes A. Non-commutative differential geometry // Publ. Math. – Paris, 1985. – No. 62. – P. 41–144.
13. Frenkel I. V., Jing N. Vertex representations of quantum affine algebras // Proc. Natl. Acad. Sci. USA – 1988. – V. 85. – P. 9373–9377.
14. Голенищева-Кутузова М., Лебедев Д. Тригонометрические подалгебры Ли в $\overline{X}_{\infty} = \overline{A}_{\infty}$ (соотв. \overline{B}_{∞} , \overline{C}_{∞} , \overline{D}_{∞}) и их представления вершинными операторами // Письма в ЖЭТФ. – 1991. – Т. 52, №8. – С. 473–476.
15. Hoppe J. $\text{Diff}_A T^2$ and the curvature of some infinite dimensional manifolds // Phys. Lett. B – 1988. – V. 215. – P. 706–710.
16. Vershik A. M. Continuum roots system Lie algebras // in preparation

Международный институт нелинейных исследований при институте теоретической физики РАН
Институт теоретической и экспериментальной физики

Поступило в редакцию
29 октября 1991 г.