УДК 517.54

С. Г. Амирханова, Л. Н. Журбенко

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ x ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

В работе обобщается рассмотренная в [1] обратная краевая задача с параметром x для многосвязной области на случай, когда функция $w(z)$, определяемая в искомой области D_z $(\infty \notin D_z)$, не аналитическая, а удовлетворяет уравнению $w_{\bar z} + q(w)\overline{w_{\bar z}} = 0$. Изучены вопросы существования, единственности и устойчивости решения такой задачи. Поставлена видоизмененная обратная краевая задача, в которой условий разрешимости не возникает.

Пусть на множестве $A^j \subset [a_1, b_1]$, полученном путем исключения из отрезка $[a_1, b_1]$ произвольных интервалов (a_{1l}^j, b_{1l}^j), $l = \overline{1, p}$,

$$a_1 < a_{11}^1 < b_{11}^1 < \ldots < a_{1p}^1 < b_{1p}^1 < b_1,$$

$$a_1 < b_{1p}^2 < a_{1p}^2 < \ldots < b_{11}^2 < a_{11}^2 < b_1,$$

задана двузначная непрерывная функция $f_1(x) = f_1^j(x) = u_1^j(x) + iv_1^j(x)$, $j = 1, 2$, а на отрезках $[a_k, b_k]$ — двузначные непрерывные функции $f_k(x) = f_k^j(x) = u_k^j(x) + iv_k^j(x)$, $k = \overline{2, m}$, $a_1 < a_k < b_k < b_1$.

Для них выполняются условия:

а) $f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, определяют в плоскости w m замкнутых жордановых кривых L_{wk}, причем контур L_{w1} охватывает остальные;

б) $f_k^j(x)$, $k = \overline{2, m}$, $j = 1, 2$, дифференцируемы на $[a_k, b_k]$, причем $f_k^j(x)$ непрерывны за исключением конечного числа точек x_{kl}^j, в которых $\lim\limits_{x \to x_{kl}^j} f_k^{j\prime}(x) = \infty$; и несобственный интеграл $\int\limits_{a_k}^{l_k} f_k^{j\prime}(x)\,dx$ сходится;

в) $f_k^{j\prime}(x) \neq 0$, $k = \overline{2, m}$, на $[a_k, b_k]$;

г) $\Lambda(w_{k1}, w_{k2}) \leqslant \varkappa_k |w_{k1} - w_{k2}|$, $k = \overline{2, m}$, где $\Lambda(w_{k1}, w_{k2})$ — длина наименьшей дуги между w_{k1}, $w_{k2} \in L_{wk}$, $\varkappa > 1$.

Считаем $f_k^1(x)$ тем значением $f_k(x)$, которое соответствует положительному обходу L_{wk} при движении от $f_k(a_k)$ к $f_k(b_k)$, $f_k^2(x)$ — значением при движении в обратном направлении.

Задача. *Найти m-связную область $D_z (\infty \notin D_z)$ так, чтобы определяемая в ней функция $w(z)$ являлась решением уравнения*

$$w_{\bar z} + q(w)\overline{w}_{\bar z} = 0, \tag{1}$$

где функция $q(w) \in C_\alpha(E)$, $|q(w)| \leqslant q_0 < 1$ ($C_\alpha(E)$ — множество ограниченных функций, гёльдеровых с показателем α), и удовлетворяла условию: вещественная часть обратной к ней однозначной в области $D_w \left(\partial D_w = L_w = \bigcup_{k=1}^{m} L_{wk}\right)$ функции $z = w^{-1}(w)$ непрерывна в $\bar D_w \setminus \{w_{11}^j, w_{12}^j, \ldots, w_{1p}^j\}$, $j = 1, 2$, $w_{1l}^j \in L_{w1}$, и ограничена в $\bar D_w$, по заданным граничным значениям:

$$w(z)|_{L_{zk}} = f_k^j(x),\ j = 1,\ 2,\quad x \in \begin{cases} A^j, & k = 1, \\ [a_k, b_k], & k = \overline{2, m}, \end{cases} \tag{2}$$

x — декартова координата плоскости z.

Исследуем решение задачи. Справедлива

Теорема 1. *Если функции $f_k^j(x)$, $k = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям а) — г), то при фиксировании $\operatorname{Im} w^{-1}(w) = y_0$, $w_0 \in D_w$, решение задачи является единственным в случае его существования.*

Доказательство. Функция $z = w^{-1}(w)$ удовлетворяет в области D_w уравнению Бельтрами [11, с. 212]

$$z_{\bar w} - q(w) z_w = 0. \tag{3}$$

Это уравнение допускает решение $\chi(w) = w + T(\omega)$, называемое основным, которое осуществляет полный гомеоморфизм плоскости на себя [2, с. 97].

Здесь ω — функция, принадлежащая $C_\alpha(E)$ и удовлетворяющая уравнению $\omega - q\Pi\omega = q$, операторы

$$\Pi\omega = \frac{\partial T\omega}{\partial w},\quad T\omega = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_w} \frac{\omega(\zeta)\, d\xi d\eta}{\zeta - w}.$$

При условиях

$$\chi(\infty) = \infty,\quad w^{-1}\chi(w) \to 1 \text{ при } w \to \infty$$

полный гомеоморфизм определяется однозначно. Тогда область D_w с границей $L_w = \bigcup_{k=1}^{m} L_{wk}$ перейдет в область D_t с границей $L_t = \bigcup_{k=1}^{m} L_{tk}$ и точка w_0 — в точку t_0. Все остальные решения уравнения Бельтрами могут быть представлены через основное следующим соотношением:

$$z(w) = \Phi[\chi(w)], \tag{4}$$

где $\Phi(t)$ — произвольная аналитическая функция в области D_t[2, с. 109].

Допустим, что при одном начальном условии (2) существуют две области D_{z1} и D_{z2}, которые являются образами области D_w при решениях уравнения (3): $w_1^{-1}(w)$, $w_2^{-1}(w)$. Используя (4), можно записать

$$w_j^{-1}(w) = \Phi_j[\chi(w)],\ j = 1,\ 2. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь функцию $\operatorname{Re}[w_1^{-1}(w) - w_2^{-1}(w)]$. Она ограничена, непрерывна за исключением точек w_{1l}, $l = \overline{1,\ p}$, $j = 1, 2$, и

$$\lim_{w \to w_k^*} \operatorname{Re}[w_1^{-1}(w) - w_2^{-1}(w)] = 0,\ w_k^* \in L_{wk},\ k = 1,\ m,\ w_1^* \neq w_{1l}^j\ .$$

В силу (5) мы получаем условие для гармонической в D_t функции, следовательно, по принципу максимума [3, с. 260]:

$$\operatorname{Re}\Phi_1(t) = \operatorname{Re}\Phi_2(t),\ t \in D_t \text{ или } \operatorname{Re} w_1^{-1}(w) = \operatorname{Re} w_2^{-1}(w)$$

для $w \in D_w$. В силу нормировки $\operatorname{Im} w^{-1}(w) = y_0$ имеем $w_1^{-1}(w) = w_2^{-1}(w)$, следовательно, области D_{z1} и D_{z2} совпадают. Теорема доказана.

Перед тем, как перейти к вопросу существования решения, докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть m-связная область D_w имеет границу $L_w = \bigcup_{k=1}^{m} L_{wk}$, заданную двузначными функциями*

$$w = \overset{j}{f}_k(x),\quad x \in \begin{cases} \overset{j}{A} \subset [a_1,\ b_1],\ \underline{k = 1}, \\ [a_k,\ b_k],\ k = \overline{2,\ m}, \end{cases}\quad j = 1,\ 2,$$

со свойствами а) — г). *При ее отображении на область D_t с границей $L_t = \bigcup_{k=1}^{m} L_{tk}$ основным решением $\chi(w)$ уравнения Бельтрами* (3), *в котором* $q(w) \in C_\alpha(E)$, $|q(w)| \leqslant q_0 < 1$, *свойства* а) — г) *сохраняются для граничных контуров L_{tk} с уравнениями $w = \tilde{f}_k(x)$.*

Доказательство. Выполнение условия а) следует из того, что основное решение осуществляет гомеоморфное отображение.

Граница области D_t имеет уравнение $t = \chi[f_k(x)] = \tilde{f}_k(x)$. Свойство б) для $\tilde{f}_k(x)$ выполняется, так как

$$\tilde{f}'_k(x) = \chi'_w(w) f'_k(x) + \chi'_{\bar{w}}(w)\left(\overline{f_k(x)}\right)'$$

и

$$\chi'_w(w) \in C_\alpha(E)\ [2,\ \text{с. } 109].$$

Из оценки

$$|\tilde{f}'_k(x)| \geqslant |f'_k(x)|\,(|\chi'_w(w)| - |\chi'_{\bar{w}}(w)|) > 0, \ k = \overline{2, m},$$

так как якобиан преобразования $t = \chi(w) : I = |\chi_w|^2 - |\chi_{\bar{w}}|^2 > 0$ и $f_k(x)$, $k = \overline{2, m}$, удовлетворяет свойству в), следует справедливость условия в) для $\tilde{f}_k(x)$.

Покажем, что $\tilde{f}_k(x)$ удовлетворяет свойству г) при $k = \overline{2, m}$, то есть

$$\Lambda(t_{k1}, t_{k2}) \leqslant \varkappa_k^* |t_{k1} - t_{k2}|, \ \varkappa_k^* > 1.$$

Дуговая абсцисса контура L_t дается равенствами $\tilde{\sigma}_k(x) = \int\limits_{a_k}^{x} |\overset{1}{\tilde{f}'_k}(x)|\,dx$, когда x изменяется от a_k до b_k,

$$\tilde{\sigma}_k(x) = \int\limits_{a_k}^{b_k} |\overset{1}{\tilde{f}'_k}(x)|\,dx - \int\limits_{b_k}^{x} |\overset{2}{\tilde{f}'_k}(x)|\,dx, \tag{6}$$

когда отрезок $[a_k, b_k]$ обходится в противоположном направлении. Для каждой из этих дуг имеет место

$$\Lambda(t_{k1}, t_{k2}) = \Lambda(\chi(w_{k1}), \chi(w_{k2})) = \int\limits_{x_{k1}}^{x_{k2}} |\chi'_w(w)\,[f'_k(x) + q(w)\,(\overline{f_k(x)})']\,|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x_{k1}}^{x_{k2}} |\chi'_w(w)|\,(1 + |q(w)|)\,|f'_k(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \max|\chi'_w(w)|\,(1 + q_0) \int\limits_{x_{k1}}^{x_{k2}} |f'_k(x)|\,dx = \max|\chi'_w(w)|\,(1 + q_0) \times$$

$$\times \Lambda(f_k(x_{k1}), f_k(x_{k2})) \leqslant \max|\chi'_w(w)|\,(1 + q_0)\,\varkappa_k\,|\chi^{-1}(t_2) - \chi^{-1}(t_1)|.$$

Используем формулу конечных приращений для функции 2-х переменных и связь $I \cdot \chi_t^{-1} = \bar{\chi}_{\bar{w}}$, $I \cdot \chi_{\bar{t}}^{-1} = -\chi_{\bar{w}}$:

$$\Lambda(t_{k1}, t_{k2}) \leqslant \frac{2\max|\chi_w|^2 (1 + q_0)^2 \varkappa_k}{\min(|\chi_w|^2 (1 - |q(w)|^2))} |t_2 - t_1| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\max|\chi_w|^2}{\min|\chi_w|^2} \frac{(1 + q_0)^2}{(1 - q_0^2)} \varkappa_k |t_2 - t_1| = \frac{\max|\chi_w|^2}{\min|\chi_w|^2} \frac{2\varkappa_k(1 + q_0)}{1 - q_0} |t_2 - t_1|.$$

Аналогично можно провести доказательство в случае, если

$$t_{k1} = \chi[\overset{1}{f}_k(x)], \ t_{k2} = \chi[\overset{2}{f}_k(x)],$$

рассматривая дугу $(\overset{\frown}{t_{k1}, t_{k2}})$ как сумму двух дуг $(\overset{\frown}{t_{k1}, t_{k0}})$ и $(\overset{\frown}{t_{k0}, t_{k2}})$, где $t_{k0} = \chi[f_k(a_k)]$.

Обозначим

$$\varkappa_k^* = \frac{\max |\chi_w^2|}{\min |\chi_w|^2} \frac{2\varkappa_k(1+q_0)}{1-q_0}.$$

Так как $\varkappa_k > 1$ и $0 < q_0 < 1$, то $\varkappa_k^* > 1$. Лемма доказана. Покажем существование решения задачи. Из теоремы о представлении решений [4, с. 471] следует возможность отображения произвольной многосвязной области D_w на круговую область D_ζ (круг $L_{\zeta 1} : |\zeta| < 1$ с $m-1$ круговыми вырезами $L_{\zeta j} : |\zeta - \xi_j| < R_j$, $j = \overline{2, m}$) гомеоморфным решением уравнения (3). Пусть это отображение осуществляет функция $\zeta = \varphi(w)$. При нормировке $\varphi(w_0) = 0$ и $\varphi[f_1(a)] = 1$ оно единственно.

Под решением задачи будем понимать регулярную функцию $z(\zeta)$, отображающую область D_ζ на искомую область D_z.

Пользуясь связью между двумя решениями уравнения Бельтрами [4, с. 471], запишем соотношение

$$w^{-1}(w) = z[\varphi(w)], \tag{7}$$

где $z(\zeta)$ — регулярная в области D_ζ функция. Для функции $z(\zeta)$ известна

$$\operatorname{Re} z(\zeta)|_{\zeta \in L_{\zeta k}} = x_k(\theta),$$

так как функции $x_k(\theta)$, $k = \overline{1, m}$, определяются из соотношений

$$\varphi[f_k(x)] = \xi_k + R_k e^{i\theta}, \tag{8}$$

$\theta \in [\beta_k, \beta_k + 2\pi]$, $x_k(\beta_k) = a_k$. Функции $x_k(\theta)$, $k = \overline{1, m}$, имеют два интервала монотонности $[\beta_k, \beta_k^*]$, $[\beta_k^*, \beta_k + 2\pi]$, $x_k(\beta_k^*) = b_k$. Функция $x_1(\theta)$ является кусочно-непрерывной на $[0, 2\pi]$ с конечным числом $\overset{j}{\gamma}_{1l}$ точек разрыва 1 рода, соответствующих точкам $\overset{j}{w}_{1l} \in L_{w1}$, $l = \overline{1, p}$, $j = 1, 2$; функции $x_k(\theta)$, $k = \overline{2, m}$, непрерывны на $[\beta_k, \beta_k + 2\pi]$.

Введем, согласно [5], функции $F_k(\zeta, \zeta_k)$, $\zeta_k = \xi_k + R_k e^{i\theta}$, $k = \overline{1, m}$, при фиксированном ζ_k однолистно отображающие D_ζ на области $D_{\tau k}$, которые представляют собой каждый раз полуплоскость $\operatorname{Re}\tau > 0$ с $m-1$ конечными прямолинейными разрезами, параллельными $\operatorname{Re}\tau = 0$ так, что $|\zeta - \xi_k| = R_k$ переходит в $\operatorname{Re}\tau = 0$. Кроме того в области $(1-\varepsilon)^{-q+1} R_k < |\zeta - \xi_k| < R_k(1+\varepsilon)^q$ с $q = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ 1, & k = \overline{2, m}, \end{cases}$ и достаточно малым ε имеем разложение

$$F_k(\zeta,\ \xi_k + R_k e^{i\theta}) = (-1)^q \frac{\zeta + R_k e^{i\theta} - \xi_k}{R_k e^{i\theta} - \zeta + \xi_k} + \Psi_k(\zeta,\ \xi_k + R_k e^{i\theta}). \qquad (9)$$

Функции $\Psi_k(\zeta,\ \zeta_k)$, $\zeta_k = \xi_k + R_k e^{i\theta}$ — однозначные, непрерывные по ζ_k и регулярные в кольце $R_k(1-\varepsilon) < |\zeta - \xi_k| < R_k(1+\varepsilon)$, причем при $\zeta \in L_{\zeta k}$ они принимают чисто мнимые значения и нормированы разложением [6]

$$\Psi_k(\zeta,\ \zeta_k) = \ldots + c_{-1}(\zeta_k)(\zeta - \xi_k)^{-1} + c_1(\zeta_k)(\zeta - \xi_k) + \ldots$$

Функция $z(\zeta)$ имеет вид [5]:

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} x_k(\theta_k) F_k(\zeta,\ \xi_k + R_k e^{i\theta_k})\, d\theta_k - \mu + i\alpha, \qquad (10)$$

постоянная α находится из условия $\operatorname{Im} w^{-1}(w_0) = y_0$, а постоянная μ определяется как

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k=j}}^{m} \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} x_k(\theta_k) \operatorname{Re} F_k(\xi_j + R_j e^{i\theta_j},\ \xi_k + R_k e^{i\theta_k})\, d\theta_k\,. \qquad (11)$$

Равенства (11) дают $m-1$ условий разрешимости задачи. Функция $w(z)$ определяется теперь по формуле:

$$w(z) = \varphi^{-1}[\zeta(z)],$$

где $\zeta(z)$ — обратная к $z(\zeta)$ функция.

Покажем, что найденное решение удовлетворяет всем условиям, содержащимся в постановке задачи. Функция $w^{-1}(w)$, обратная $w(z)$, удовлетворяет равенству (7) и является решением уравнения (3), т. е. $w(z)$ — решение уравнения (1). Функция $w^{-1}(w)$ однозначна в D_w в силу регулярности $z(\zeta)$ и гомеоморфности функций $\zeta = \varphi(w)$. Для установления поведения $\operatorname{Re} w^{-1}(w)$ на границе рассмотрим свойства функции $z(\zeta)$ на границе L_ζ. В силу представления $z(\zeta)$ в $1 - \varepsilon < |\zeta| < 1$ в виде

$$z(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\theta - \mu + i\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1(\theta)\, \psi_1(\zeta,\ e^{i\theta})\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{m} \int_{\beta_j}^{\beta_j + 2\pi} x_j(\theta_j) F_j(\zeta,\ \xi_j + R_j e^{i\theta_j})\, d\theta_j$$

делаем вывод, что $\operatorname{Re} z(\zeta)$ непрерывна в $1 - \varepsilon \leqslant \zeta \leqslant 1$ за исключением точек $e^{i\overset{j}{\theta}_{1l}}$, соответствующих $\overset{j}{w}_{1l}$, и ограничена в $1 - \varepsilon \leqslant$

$\leqslant |\zeta| \leqslant 1$, а контур L_{z1}, аналогично односвязному случаю [7], будет проходить через бесконечно удаленную точку не менее p раз.

Далее покажем выполнение условий задачи на внутренних контурах, т. е. непрерывность и ограниченность $\mathrm{Re}\, w^{-1}(w)$ на L_{wk}, $k=\overline{2, m}$. Используя (9), запишем $z(\zeta)$ в области

$$R_k(1-\varepsilon) < |\zeta - \xi_k| < R_k, \ k=\overline{2, m},$$

в виде

$$z(\zeta) = \overset{1}{I}_k(\zeta) + \overset{2}{I}_k(\zeta) + \overset{3}{I}_k(\zeta),$$

$$\overset{1}{I}_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} x_k(\theta_k) \frac{R_k e^{i\theta_k} + \zeta - \xi_k}{R_k e^{i\theta_k} - \zeta + \xi_k} d\theta_k - \mu + i\alpha, \tag{12}$$

$$\overset{2}{I}_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} x_k(\theta_k) \Psi_k(\zeta, \ \xi_k + R_k e^{i\theta_k})\, d\theta_k,$$

$$\overset{3}{I}_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \int\limits_{\beta_j}^{\beta_j+2\pi} x_j(\theta_j) F_j(\zeta, \ \xi_j + R_j e^{i\theta_j})\, d\theta_j.$$

Представим функцию $\zeta=\varphi(w)$ в виде $\zeta = \mu^{-1}[\chi(w)]$, где регулярная функция $\zeta=\mu^{-1}(t)$ однолистно отображает область $D_t = \chi(D_w)$ на D_ζ. Тогда в силу выполнимости по лемме 1 для L_{tk} условия г) для функции $\mu^{-1}(t)$ справедливо обобщение на многосвязный случай леммы Варшавского [8], приведенное в [1]. Имеем:

$$\tilde{\sigma}_k(\theta) \in H(A_k, \lambda_k), \ \lambda_k = 2/(1+\varkappa_k^*)^2, \ k=\overline{2, m}, \tag{13}$$

где $\tilde{\sigma}_k(\theta)$ определяются равенствами (6). Функции $x_k(\theta)$ могут быть представлены в виде $x_k(\theta) = x_k[\tilde{\sigma}_k(\theta)]$. Производная $x'_k(\tilde{\sigma}_k) = 1/\tilde{\sigma}'(x)$ непрерывна и ограничена в силу леммы 1, следовательно, удовлетворяет условию Липшица, а, учитывая (13),

$$x_k(\theta) \in H_{\lambda_k}. \tag{14}$$

В силу представимости $\overset{1}{I}_k(\zeta) + \mu$ интегралом Шварца в $|\zeta - \xi_k| = R_k$ [9, с. 63] и (14) имеем $\overset{1}{I}_k(\zeta) \in H_{\lambda_k}$. Функции $\Psi_k(\zeta, \zeta_k)$, $F_k(\zeta, \zeta_k)$ регулярны на $|\zeta - \xi_k| = R_k$, первая—по построению, регулярность второй показана в [3, с. 214], следовательно, $\overset{2}{I}_k(\zeta)$, $\overset{3}{I}_k(\zeta)$ удовлетворяют условию Липшица, а $z(\zeta)\in H_{\lambda_k}$ на $L_{\zeta k}$, $k=\overline{2, m}$.

Из равенства (7) следует в этом случае выполнение условий задачи для $\operatorname{Re} w^{-1}(w)$, так как $\zeta=\varphi(w)$ — гомеоморфизм.

Приведем лемму, необходимую для доказательства теоремы об устойчивости.

Лемма 2. *Пусть для уравнений* $w_{kn}=\overset{j}{f}_{kn}(x)$, $w_k=\overset{j}{f}_k(x)$, $k=\overline{1, m}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, *границ m-связных областей* D_{wn}, D_w, *содержащих точку* w_0, *выполняется условие* а) *и*

$$\lim_{n\to\infty} \| \overset{j}{f}_{kn}(x)-\overset{j}{f}_k(x)\|_C=0,\ x\in[a_k,\ b_k]. \tag{15}$$

Функция $\zeta=\varphi(w)$ *и* $\zeta=\varphi_n(w)$ — *гомеоморфизмы уравнений*

$$\zeta_{\bar w}-q(w)\zeta_w=0,\ \zeta_{\bar w}-q_n(w)\zeta_w=0 \tag{16}$$

($q(w)$, $q_n(w)$ — *измеримы на* E, $|q(w)|\leqslant q_0<1$, $|q_n(w)|\leqslant q_0<1$), *отображающие области* D_w, D_{wn} *на круговые области* D_ζ, $D_{\zeta n}$ (*круг* $|\zeta|<1$ *с* $m-1$ *круговыми вырезами* $|\zeta-\xi_k|<R_k$, $|\zeta-\xi_{kn}|<R_{kn}$) *так, что* $\varphi(w_0)=\varphi_n(w_0)=0$, $\varphi[f_1(a_1)]=1$, $\varphi_n[f_{1n}(a_1)]=1$ *и*

$$q_n(w)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. вс.}} q(w),\ w\in E. \tag{17}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n^{-1}(\zeta)-\varphi^{-1}(\zeta)\|_C=0,\ \zeta\in D_\zeta^*\subset D_\zeta, \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty}\xi_{kn}=\xi_k,\ \lim_{n\to\infty}R_{kn}=R_k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n^{-1}(\xi_{kn}+R_{kn}e^{i\theta})-\varphi^{-1}(\xi_k+R_ke^{i\theta})\|_C=0,\ \theta\in[0,\ 2\pi]. \tag{19}$$

Доказательство. Для функций $\zeta=\varphi(w)$, $\zeta=\varphi_n(w)$ имеем

$$\varphi^{-1}(\zeta)=\chi^{-1}[\mu(\zeta)],\ \varphi_n^{-1}(\zeta)=\chi_n^{-1}[\mu_n(\zeta)], \tag{20}$$

$\zeta=\chi(w)$, $\zeta=\chi_n(w)$ — полные гомеоморфизмы уравнений (16), регулярные функции $t=\mu(\zeta)$, $t=\mu_n(\zeta)$ однолистно переводят области D_ζ, $D_{\zeta n}$ на области $D_t=\chi(D_w)$, $D_{tn}=\chi(D_{wn})$.

По доказанному Боярским [4, с. 464] имеем для полных гомеоморфизмов уравнений (16) при условии (17):

$$\chi_n(w)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\chi(w),\ w\in E;\ \chi_n^{-1}(t)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\chi^{-1}(t),\ t\in E. \tag{21}$$

Тогда для границ $L_t: t=\chi[f_k(x)]$, $L_{tn}: t=\chi_n[f_{kn}(x)]$, $k=\overline{1, m}$, областей D_t, D_{tn} при условии (15) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\|\chi_n[f_{kn}(x)]-\chi[f_k(x)]\|_C=\lim_{n\to\infty}\|\chi_n[f_{kn}(x)]-$$

$$-\chi[f_{kn}(x)]+\chi[f_{kn}(x)]-\chi[f_k(x)]\|_C=0.$$

Для функций $\mu_n(\zeta)$, $\mu(\zeta)$ с нормировкой

$$t_{0n}=\mu_n(0),\ \chi_n[f_{1n}(a_1)]=\mu_n(1),\ t_0=\mu(0),$$

$\chi[f_1(a_1)]=\mu(1)$, где $t_{0n}=\chi_n(w_0)$, $t_0=\chi(w_0)$, получим по [3, с. 230], [10] равенства

$$\lim_{n\to\infty}\xi_{kn}=\xi_k,\ \lim_{n\to\infty}R_{kn}=R_k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu_n(\zeta)-\mu(\zeta)\|_C=0,\ \zeta\in D_\zeta^*\subset D_\zeta,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\mu_n(\xi_{kn}+R_{kn}e^{i\theta})-\mu(\xi_k+R_ke^{i\theta})\|_C=0,$$

$$\theta\in[0, 2\pi],\ k=\overline{1, m}.$$

Тогда из формул (20), (21) получаем (18), (19).

Перейдем к исследованию устойчивости решения задачи. Для этого в постановку задачи введем функции $f_{kn}^j(x)$, $k=\overline{1, m}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, $j=1, 2$, $x\in A^j\ (k=1)$, $x\in[a_k, b_k]\ (k=\overline{2, m})$, $w_n(z)$, $q_n(w)$, $|q_n(w)|\leqslant q_0<1$, и области D_{wn}, D_{zn} с границами $L_{wn}=\bigcup_{k=1}^{m}L_{wkn}$, $L_{zn}=\bigcup_{k=1}^{m}L_{zkn}$ с такими же свойствами, как и без номера n. Формулы (10), (11) примут вид

$$z_n(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi}x_{kn}(\theta_{kn})F_{kn}(\zeta, \zeta_{kn})\,d\theta_{kn}-\mu_n+i\alpha, \tag{22}$$

$$\mu_n=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}\int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi}x_{kn}(\theta_{kn})\operatorname{Re}F_{kn}(\xi_{jn}+R_{jn}e^{i\theta_{jn}},\ \xi_{kn}+R_{kn}e^{i\theta_{kn}})\,d\theta_{kn}, \tag{23}$$

функции $x_{kn}(\theta)$ определяются из соотношений, аналогичных (8)

$$\varphi_n[f_{kn}(x)]=\xi_{kn}+R_{kn}e^{i\theta}, \tag{24}$$

$\zeta=\varphi_n(w)$ — гомеоморфизмы уравнений Бельтрами $z_{\bar w}-q_n(w)z_w=0$, отображающие области D_{wn} на $D_{\zeta n}$.

Функции $f_{kn}(x)$, $f_k(x)$ будем выбирать из класса $\mathfrak{M}$ таких наборов двузначных функций $f_k(x)$, $k=\overline{1, m}$, $x\in A^j\ (k=1)$, $x\in[a_k, b_k]\ (k=\overline{2, m})$, для которых выполняются свойства а) — г) и решение задачи существует и единственно.

Определение. *Решение задачи называется устойчивым, если из равенств*

$$\lim_{n\to\infty} \| f^j_{1n}(x) - f^j_1(x) \|_C = 0, \ x \in A^j, \tag{25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| f^j_{kn}(x) - f^j_k(x) \|_D = 0, \ x \in [a_k, b_k], \ k = \overline{2, m}, \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} w_n^{-1}(w_0) = \operatorname{Im} w^{-1}(w_0), \ w_0 \in D_w,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| q_n(w) - q(w) \|_{W^1_p(E)} = 0 \tag{27}$$

следуют равенства

$$\lim_{n\to\infty} \| z_n(\zeta) - z(\zeta) \|_C = 0, \ \zeta \in \bar{D}^*_\zeta \subset D_\zeta, \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| z_n(e^{i\theta}) - z(e^{i\theta}) \|_{L_p} = 0, \ 0 < p < 1, \ \theta \in [0, 2\pi], \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| z_n(\xi_{kn} + R_{kn} e^{i(\beta_{kn} - \beta_k)} e^{i\theta}) - z(\xi_k + R_k e^{i\theta}) \|_C = 0, \tag{30}$$

$$\theta \in [\beta_k, \beta_k + 2\pi], \ k = \overline{2, m}.$$

В данном определении C — класс непрерывных на соответствующих множествах функций, D — класс абсолютно-непрерывных функций, L_p — класс функций, суммируемых с p-й степенью, $W^1_p(E)$ — пространство Соболева функций, обладающих в E обобщенными частными производными, принадлежащими пространству $L_p(E)$.

Теорема 2. *Если функции* $f^j_k(x)$, $j = 1, 2$, $x \in A^j$ $(k = 1)$, $x \in [a_k, b_k]$ $(k = \overline{2, m})$, *из класса* $\mathfrak{M}$ *принадлежат подклассу* $\mathfrak{M}(M, \varkappa)$, *характеризующемуся условиями*:

α) $|f^{j\prime}_k(x)| \geqslant M > 0$, *$M$ фиксирована для всего подкласса;*

β) *постоянная* $\varkappa_k \leqslant \varkappa$ *в условии* г), $\varkappa$ *фиксирована для всего подкласса, то решение задачи устойчиво в смысле данного определения.*

Доказательство. Из условий (25), (26), (27) следует выполнимость всех условий леммы 2, т. е. для функций $\varphi_n^{-1}(\zeta)$, $\varphi^{-1}(\zeta)$ в формулах (8), (24) справедливы равенства (18), (19), это обеспечивает, как в [1], [10], выполнение равенств (28), (30) при использовании формул (10), (11), (22), (23).

Для доказательства (30) покажем, что функция $x_{kn}(\theta) \in H(A^*, \lambda)$ на $[\beta_{kn}, \beta_{kn} + 2\pi]$, $k = \overline{2, m}$, где коэффициент A^* и показатель λ не зависят от n. Используем формулу

$$x_{kn}(\theta) = x_{kn}[\tilde{\sigma}_{kn}(\theta)], \tag{31}$$

где $\widetilde{\sigma}_{kn}$ — длина дуги контура L_{tn} ($L_{tn}=\bigcup\limits_{k=1}^{m} L_{tkn}$ — границы областей D_{tn}, в которые переводятся области $D_{\zeta n}$ с помощью полных гомеоморфизмов $t=\chi_n(w)$).

Функции $x_{kn}(\widetilde{\sigma}_{kn})$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной, не зависящей от n. Действительно, в силу равенства (27) по [11, с. 217] справедливо

$$\chi'_{nw}(w) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \chi'_{w}(w) \text{ на } E, \tag{32}$$

следовательно, используя условие α), имеем неравенство

$$\widetilde{\sigma}'_{kn}(x) \geqslant |f'_{kn}(x)|\,(|H'_{nw}[f_{kn}(x)]| - |H'_{n\bar{w}}[f_{kn}(x)]|) \geqslant K > 0$$

с независящей от n постоянной K, $x \in [a_k, b_k]$, $k=\overline{2, m}$.

Остается показать, что в условии Гёльдера (13) для $\widetilde{\sigma}_{kn}(\theta)$ показатель λ_k и коэффициент A_k не зависят от n, тогда из формулы (31) аналогичный факт будет иметь место и для $x_{kn}(\theta)$. Для контуров L_{tkn} с уравнениями $\widetilde{f}_{kn}(x)$ по лемме 1 имеет место условие г), причем из доказательства этой леммы следует, что при выполнении (32) и условия β) постоянная $\varkappa_k^* \leqslant \varkappa^*$, $\varkappa^*$ не зависит от n. Тогда в (13) для $\widetilde{\sigma}_{kn}(\theta)$ показатель Гёльдера $\lambda=2/(1+\varkappa^*)^2$ не зависит от n. Постоянная A_k, как следует из доказательства леммы Варшавского [8], зависит от $\varkappa^*$, площади области D_{tn} и постоянной α, которая должна быть выбрана так, чтобы образ дуги $\{\zeta : |\zeta-\zeta^*_{kn}| < a,\ |\zeta-\xi_{kn}| = R_{kn}\}$ равномерно для всех $\zeta^*_{kn} \in L_{\zeta kn}$ был меньше половины всей длины дуги L_{tkn}. Площади областей D_{tn} в силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widetilde{f}_{kn}(x) - \widetilde{f}_k(x)\|_C = 0$, приведенного в доказательстве леммы 2, ограничены постоянной, не зависящей от n. Постоянную a можно взять не зависящей от n, так как из неравенства

$$\int\limits_{a_k}^{b_k} (|\widetilde{f}'_{kn}(x)| - |\widetilde{f}'_k(x)|)\,dx \leqslant \int\limits_{a_k}^{b_k} |(\chi_n[f_{kn}(x)])' - (\chi[f_k(x)])'|\,dx$$

и справедливости (26), (27), (32) следует сходимость всей длины дуги L_{tkn} к длине дуги L_{tk}. Таким образом, A_k не зависит от n.

Далее, представление $z_n(\zeta) = \overset{1}{I}_{kn}(\zeta) + \overset{2}{I}_{kn}(\zeta) + \overset{3}{I}_{kn}(\zeta)$ с интегралами, аналогичными интегралам (12) в соответствующем представлении $z(\zeta)$, обеспечивает, как и в [1], выполнение (30). Теорема доказана.

Постановку задачи можно видоизменить аналогично [12, с. 110], чтобы избавиться от условий разрешимости (11).

Видоизмененная задача. *Найти m-связную область $D_z (\infty \notin D_z)$ при выполнении для определенной в ней функции $w(z)$ всех условий, указанных в постановке вышеприведенной задачи, по заданным граничным значениям*

$$w(z)|_{L_{zk}} = f_k^*(x^*), \ x^* \in \overset{J}{A^*} (k=1), \quad x^* \in [a_k^*, \ b_k^*] \ (k = \overline{2, \ m}),$$

декартова координата x связана с x^* равенством $x = x^* + c_k$, c_k — постоянные, $k = \overline{1, \ m}$, причем $c_1 = 0$.

Функция $z(\zeta)$ имеет вид (10) с $x_k(\theta) = x_k^*(\theta) + c_k$, $x_k^*(\theta)$ определяется из зависимости

$$f_k^*(x^*) = \varphi^{-1}(\xi_k + R_k e^{i\theta}),$$

а постоянные c_k—из системы (11).

Устойчивость решения такой задачи получается в смысле того же определения при ограничениях α), β) на $f_k^*(x^*)$, так как аналогично [10] получается сходимость постоянных c_{kn} к c_k, $n \to \infty$.

Авторы выражают благодарность профессору Л. А. Аксентьеву за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбенко Л. Н. Обратные краевые задачи с особенностями на границах для многосвязных областей.— Труды семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982, вып. 18, с. 68—79.

2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции.— М.: ГИФМЛ, 1959.— 628 с.

3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.— 628 с.

4. Боярский В. В. Обобщенные решения систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами.— Матем. сборник, 1957, вып. I, т. 43 (85), № 4, с. 451—503.

5. Зморович В. А. Об обобщении интегральной формулы Шварца на n-связные круговые области.— ДАН УРСР, 1958, № 5, с. 489—492.

6. Дундученко Л. О. Интеграл Шварца для одного класса функций, регулярных в счетно-связной круговой δ-области.— Матем. заметки, 1972, т. 12, № 4, с. 349—354.

7. Авхадиев Р. Г., Журбенко Л. Н. Некоторое обобщение обратной краевой задачи по x и устойчивость ее решения.— Труды семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977, вып. 14, с. 5—19.

8. Warschawski S. E. On differentiablity at the boundary in conformal mapping.— Amer. Math. Soc. Procceding3, 1961, 12, p. 614—620.

9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: ГИФМЛ, 1963.—639 с.

10. Журбенко Л. Н. Об устойчивости решений обратных краевых задач для многосвязных областей в случае параметра x.— Изв. вузов. Математика, 1979, № 2, с. 31—41.

11. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.— Новосибирск: Наука, 1977.— 420 с.

12. Салимов Р. Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости.— Казань: Изд-во Казан. высш. командно-инженерн. училища, 1970. — 364 с.

Доложено на семинаре 27 января 1984 года.