I. E. Maksimenko, M. A. Skopina, Multidimensional periodic wavelets,
Algebra i Analiz, 2003, Volume 15, Issue 2, 1–39

Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 2

МНОГОМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ

© И. Е. Максименко, М. А. Скопина

Дается описание общей конструкции кратномасштабного анализа периодических функций с матричным коэффициентом растяжения и метод построения систем всплесков, образующих биортогональные базисы. Изучается сходимость разложений по этим базисам.

§1. Введение

Системы всплесков играют важную роль как в решении ряда прикладных задач, так и в качестве аппарата теории приближения функций. В конце 80-х годов в работах С. Малла [2] и И. Мейера [3] был предложен метод построения ортогональных систем всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, основанный на конструкции кратномасштабного анализа (далее КМА). Суть метода состоит в следующем. КМА порождается некоторой функцией (называемой масштабирующей), обладающей рядом специальных свойств. По масштабирующей функции строится другая функция (мы будем называть ее *всплеск-функцией*), сдвиги и растяжения которой и образуют базис в $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [1, гл. 5]). Для построения многомерных систем всплесков существуют различные подходы. Во-первых, можно взять тензорное произведение нескольких одномерных базисов. Такой путь прост, но полученный многомерный базис не наследует все достоинства породившего его одномерного. В частности, нарушается локализованность, представляющая большую ценность для прикладных задач. Это легко видеть на примере базиса Хаара. В одномерном случае базисная функция с большим номером имеет малый носитель. В тензорном произведении двух систем Хаара базисные функции (занумерованные естественным образом двумерными индексами) при сколь угодно большом по модулю номере могут иметь большой носитель по одному из направлений. Во-вторых, для построения d-мерной системы всплесков можно рассмотреть тензорное произведение d одномерных КМА — конструкцию,

---

Ключевые слова: кратномасштабный анализ, всплески, матричное растяжение.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №03-01-00373.

аналогичную одномерной и порожденную функцией, являющейся тензорным произведением одномерных масштабируюших функций. В этом случае естественным образом возникает несколько многомерных всплеск-функций, сдвиги и растяжения которых образуют базис в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Более общее определение многомерного кратномасштабного анализа данной И. Мейером в [3]. В соответствии с этим определением КМА в $L_2(\mathbb{R}^d)$ есть совокупность замкнутых подпространств V_j, $j \in \mathbb{Z}$, пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $V_j \subset V_{j+1}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$;

2) $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^d)$;

3) $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

4) $f(x_1, \ldots, x_d) \in V_0 \iff f(2^j x_1, \ldots, 2^j x_d) \in V_j$;

5) существует $\varphi \in V_0$ (масштабирующая функция), такая что функции $\varphi(\cdot + k)$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в пространстве V_0.

Задача нахождения всплеск-функций в многомерном случае оказалась существенно более сложной, чем в одномерном. При различных предположениях на масштабирующую функцию она рассматривалась в работах К. де Бора, Р. Девора, А. Рона [4], Р. К. Джиа, К. А. Митчелли [5, 6], С. Д. Рименшнейдера, З. Шена [7, 8]. В наиболее общем случае явное описание метода построения функций всплесков получено Р. К. Джиа, З. Шеном [11]. В определении КМА Мейера коэффициентом растяжения является диагональная матрица с двойками на диагонали, т.е. растяжение по всем направлениям одно и то же. Для некоторых прикладных задач представляют интерес и другие коэффициенты растяжения. Более общий подход к многомерному КМА дан, например, в книге П. Войтащика [18]. В качестве коэффициентов растяжения рассматриваются целочисленные матрицы, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям. Изложена общая схема построения всплеск-функций. Задача сводится к построению унитарной матрицы, элементами которой являются функции, по первой строке. Аналогично для нахождения биортогональной пары систем всплесков требуется построить две матрицы по паре ортогональных вектор-функций, являющихся их первыми строками. В случае, когда масштабирующие функции имеют компактный носитель, Х. Джи, С. Д. Рименшнейдер, З. Шен [9, 10] дали описание алгоритма построения систем всплесков, образующих биортогональные базисы, так что одна из этих систем тоже состоит из функций с компактным носителем.

Одномерные периодические всплески чаще всего определяются как периодизированные всплески в $L_2(\mathbb{R})$. Такой подход к периодическим объектам не очень естествен, тем более, что в литературе рассматривались периодические всплески (например, в работе Ч. К. Чуи, Х. Н. Маскара [12]), которые не подходят под такое определение. Определение кратномасштабного анализа периодических функций (далее ПКМА) предлагалось рядом авторов (Ч. К. Чуи, Ж. З. Ванг [13]; В. А. Желудев [14]; С. С. Гон, С. З. Ли, З. Шен, В. С. Танг [16]; А. П. Петухов [15] и др.). Наиболее общее определение ПКМА в пространствах L_p, $1 < p < \infty$, и C предложено М. А. Скопиной [19], где также дано описание базисов, составленных из периодических всплесков, и метод их построения, найдены некоторые условия сходимости ряда Фурье по системе всплесков. При этом все описания даны в терминах коэффициентов Фурье, что имеет преимущество по сравнению с непериодическим случаем в прикладном аспекте, так как задачи становятся дискретными.

Настоящая работа посвящена описанию многомерных ПКМА, построению систем всплесков, образующих ортогональные и биортогональные базисы, и разложениям по этим базисам. В качестве коэффициента растяжения будут рассматриваться матрицы размера $d \times d$, где d — размерность пространства. Пусть M — целочисленная матрица, такая что все ее собственные числа по модулю больше единицы. Отметим, что для такой матрицы при многократном действии оператора M осуществляется растяжение по всем направлениям, поскольку

$$\lim_{n\to+\infty} ||M^{-n}|| = 0. \qquad (1)$$

Это следует из того, что весь спектр оператора (в конечномерном пространстве спектр совпадает с набором собственных чисел) лежит внутри круга $|\lambda| \leqslant r(M^{-1})$, где $r(M^{-1}) := \lim_{n\to\infty} ||M^{-n}||^{1/n}$ — спектральный радиус M^{-1}, а на границе круга имеется по крайней мере одна точка спектра (см., например, [17, с. 267]). Поскольку у матрицы M^{-1} все собственные числа по модулю строго меньше единицы и их конечное число $r(M^{-1}) < 1$, откуда следует, что последовательность $||M^{-n}||$ убывает быстрее, чем геометрическая прогрессия.

§2. Обозначения и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d)$ — его элементы (векторы), $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$, $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}_+ = \{x \in Z^1 : x \geqslant 0\}$, $\mathbb{T}^d = [0,1)^d$ — d-мерный единичный тор, δ_{lk} — символ Кронекера. Под пространством X будем понимать либо $C(\mathbb{T}^d)$, либо $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$; $\widehat{f}(k) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t)e^{-2\pi i(k,t)}\,dt$ — k-й коэффициент Фурье функции $f \in X$; $\langle f, g \rangle = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f\overline{g}$. Функции, определенные на $\mathbb{T}^d = [0,1)^d$, мы будем отождествлять с их периодическими продолжениями, определенными на $\mathbb{R}^d$.

Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $||A||$ обозначает ее операторную норму из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, A^* — сопряженная с A матрица, $\det A$ — определитель матрицы A, E_d — единичная матрица размера $d \times d$. Будем говорить, что числа $k, n \in \mathbb{Z}^d$ сравнимы по модулю A и писать $k \equiv n \pmod A$, если $k - n = A\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Целочисленная решетка $\mathbb{Z}^d$ разбивается на классы смежности относительно введенного отношения сравнения, число классов смежности равно $|\det A|$ (см., например, [18, с. 107]). Возьмем по произвольному представителю из каждого класса смежности, назовем их цифрами и обозначим множество цифр через $D(A)$. Будем говорить, что множество K сравнимо с множеством L по модулю A (по модулю $\mathbb{Z}^d$ при $A = E_d$), если множество K можно разбить на конечное число непересекающихся подмножеств: $K = \bigcup\limits_{n=1}^{N} K_n$, и существуют целочисленные векторы $\ell_1, \dots, \ell_N$, такие что $L = \bigcup\limits_{n=1}^{N} (K_n + A\ell_n)$, причем множества $(K_n + A\ell_n)$ попарно дизъюнктны. Очевидно, что если множество K сравнимо с множеством L, то и L сравнимо с K. Сравнимость по модулю $\mathbb{Z}^d$ означает, что, сдвигая на целые векторы части множества K, мы можем „собрать“ из них множество L. Сравнимость по модулю A означает, что сдвигая части множества K на векторы вида $A\ell$, где ℓ — целый вектор, можно „собрать“ L. Очевидно, что если два измеримых множества сравнимы между собой, то у них одинаковая мера.

Лемма 1. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, тогда множество $K := \bigcup\limits_{r \in D(A)} (A^{-1}[0,1)^d + A^{-1}r)$ сравнимо с $[0,1)^d$ по модулю $\mathbb{Z}^d$, и для любой функции $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} f = \sum_{r \in D(A)} \int\limits_{A^{-1}[0,1)^d + A^{-1}r} f.$$

Доказательство. Положим $K_n := [n, \ n+1)^d \cap K$, $n \in \mathbb{Z}^d$, тогда ясно, что $K_n \cap K_{n_1} = \varnothing$ при $n \neq n_1$ и $K = \bigcup\limits_n K_n$. Так как множество K ограничено, то непустых множеств K_n конечное число. Покажем, что $K_n \cap (K_{n_1} - \ell) = \varnothing$ для любого $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Пусть $u \in K_n \subset K$, это значит, что $u = A^{-1}v + A^{-1}r$, где $v \in [0,1)^d$, $r \in D(A)$. Предположим, что существует вектор $u_1 \in K_{n_1}$, $n \neq n_1$, такой что $u = u_1 - \ell$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$, или, что то же самое, разность $u - u_1$ является целым вектором. Пусть $u_1 = A^{-1}v_1 + A^{-1}r_1$, $v_1 \in [0,1)^d$, $r_1 \in D(A)$, тогда $A^{-1}(v - v_1) + A^{-1}(r - r_1) = \ell$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Домножив это равенство на A справа, получим $v - v_1 + r - r_1 = A\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Так как векторы r, r_1 и $A\ell$

целые, а векторы v и v_1 из $[0,1)^d$, равенство возможно только при $v = v_1$. Но r, $r_1 \in D(A)$, значит, эти векторы не могут быть сравнимы между собой по модулю A, следовательно, $r = r_1$, т.е. мы получили $u = u_1$, что противоречит предположению $n \neq n_1$. Теперь покажем, что $[0,1)^d = \bigcup\limits_n (K_n - n)$. Заметим, что $K_n - n \subset [0,1)^d$ для любого n по определению множества K_n, и, кроме того, $(K_n - n) \cap (K_{n_1} - n_1) = \varnothing$. Проверим, что для любого $u \in [0,1)^d$ существуют $n \in \mathbb{Z}^d$ и $w \in K_n$, такие что $u = w - n$. Умножив вектор u слева на матрицу A, представим Au в виде $Au = p + v$, где $p \in \mathbb{Z}^d$, $v \in [0,1)^d$. Вектор p сравним с одной из цифр, т.е. существуют такие $r \in D(A)$ и $l \in \mathbb{Z}^d$, что $p = r + Al$. Выразив u, получим $u = A^{-1}r + l + A^{-1}v$, значит, $u - l \in K$ и, следовательно, $u - l \in K_n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}^d$, причем $n = -l$. Положив $w = u - l = u + n$, получим $w \in K_n$.

Второе утверждение леммы тривиально следует из 1-периодичности функции f. •

Лемма 2 [22]. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда*

$$\sum_{s \in D(A^*)} e^{2\pi i (A^{-1}r,\ s)} = \begin{cases} |\det A|, & \text{если } r \equiv \mathbf{0} \pmod{A}, \\ 0, & \text{если } r \not\equiv \mathbf{0} \pmod{A}. \end{cases} \tag{2}$$

Для полноты изложения приведем доказательство этой леммы.

Доказательство. Положим $m := |\det A| = |\det A^*|$. Классы смежности относительно A^* образуют группу по сложению, в которой m элементов. Если $r \equiv \mathbf{0} \pmod{A}$, т.е. $r = Al$, $l \in \mathbb{Z}^d$, то (2) очевидно. Если $r \not\equiv \mathbf{0} \pmod{A}$, то возьмем любой вектор $a \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $(A^{-1}r, a) \notin \mathbb{Z}$, тогда, в частности, $a \not\equiv \mathbf{0} \pmod{A^*}$. Рассмотрим векторы a, $2a$, $3a, \ldots$ Пусть m_1 — наименьшее натуральное число, такое что $m_1 a \equiv 0 \pmod{A^*}$, тогда $1 < m_1 \leqslant m$ (если все элементы ka, $k = 1, \ldots, m$ не сравнимы с нулем, то они попарно не сравнимы друг с другом, но в группе всего m элементов). Таким образом, векторы a, $2a, \ldots, m_1 a$ образуют подгруппу, состоящую из m_1 элементов, значит, по теореме Лагранжа m делится на m_1. Пусть $m = m_1 n$. Положим $a_1 = 0$; $a_2, \ldots, a_n$ — представители элементов из фактор-группы. Тогда $a_k + ja$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m_1$, пробегают все элементы группы, и

$$\sum_{k=1}^{m} e^{2\pi i (A^{-1}r, s_k)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_1} e^{2\pi i (A^{-1}r, a_k + ja)} = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i (A^{-1}r, a_k)} \sum_{j=1}^{m_1} e^{2\pi i (A^{-1}r, ja)}$$
$$= C \frac{1 - e^{2\pi i m_1 (A^{-1}r, a)}}{1 - e^{2\pi i (A^{-1}r, a)}}.$$

Так как $m_1 a = A^* l$, $l \in \mathbb{Z}^d$, а $(A^{-1}r, a) \notin \mathbb{Z}$ по предположению, то последняя дробь равна нулю. •

Следствие 3. *В условиях леммы 2 матрица* $\{e^{2\pi i(A^{-1}n,r)}\}_{n\in D(A),r\in D(A^*)}$ *унитарна с точностью до множителя* $\sqrt{|\det A|}$.

Доказательство. Скалярное произведение столбцов с номерами n_1, n_2 равно

$$\sum_{r\in D(A^*)} e^{2\pi i(A^{-1}(n_1-n_2),r)}.$$

По лемме 2 эта сумма равна $|\det A|$ при $n_1 = n_2$, в противном случае она равна нулю, так как $n_1 \not\equiv n_2 \pmod A$. •

Лемма 4. *Пусть A — невырожденная целочисленная матрица размера $d \times d$, $|\det A| > 1$. Тогда множество $\{r+A^j p\}$ при всевозможных $r \in D(A^j)$ и $p \in D(A)$ является множеством цифр матрицы A^{j+1}.*

Доказательство. Количество всевозможных пар $(r,\ p)$ при $r \in D(A^j)$ и $p \in D(A)$ ровно $|\det A|^{j+1}$ штук. То есть достаточно доказать, что для разных пар не могут получаться сравнимые по модулю A^{j+1} векторы. Пусть $r,\ r_1 \in D(A^j)$, а $p,\ p_1 \in D(A)$. Предположим, что $r + A^j p$ и $r_1 + A^j p_1$ сравнимы между собой по модулю A^{j+1}, это значит, что $(r - r_1) + A^j(p - p_1) = A^{j+1}n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}^d$. Домножив обе части равенства слева на A^{-j}, получим, что $A^{-j}(r - r_1) = -(p - p_1) + An \in \mathbb{Z}^d$, т.е. $r \equiv r_1 \pmod{A^j}$, но r и r_1 принадлежат $D(A^j)$, а там ровно по одному представителю каждого класса смежности, значит, $r = r_1$. А из равенства $(p-p_1) = An$ следует, что $p = p_1$. Таким образом, $r + A^j p$ и $r_1 + A^j p_1$ могут быть сравнимы между собой по модулю A^{j+1} тогда и только тогда, когда $r = r_1$ и $p = p_1$. •

Далее, на протяжении всей статьи M обозначает фиксированную целочисленную матрицу размера $d \times d$, все собственные числа которой по модулю больше единицы, $m = |\det M|$. Для такой матрицы, очевидно, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$, и, как уже отмечалось выше,

$$\lim_{n\to\infty} |M^n x| = \infty \tag{3}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq \mathbf{0}$.

Определим на X оператор сдвига S_p^j, $p \in \mathbb{Z}^d$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$S_p^j f(x) := f(x + M^{-j}p). \tag{4}$$

§3. ПКМА и масштабирующая последовательность

Определение 5. Пусть $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что совокупность $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ является ПКМА в X, если выполнены следующие условия (аксиомы):

(MR1) $V_j \subset V_{j+1}$;

(MR2) $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = X$;

(MR3) $\dim V_j = m^j$;

(MR4) $\dim\{f \in V_j : S_n^j f = \lambda_n f, n \in \mathbb{Z}^d\} \leqslant 1$ при любых $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$;

(MR5) $f \in V_j \iff S_n^j f \in V_j$ при любых $n \in \mathbb{Z}^d$;

(MR6)

a) $f \in V_j \implies f(M\cdot) \in V_{j+1}$,

b) $f \in V_{j+1} \implies \sum\limits_{s\in D(M)} f(M^{-1}\cdot + M^{-1}s) \in V_j$.

Замечание. Из-за периодичности функции f в условиях MR4 и MR5 вместо всех $n \in \mathbb{Z}^d$ можно рассматривать только цифры матрицы M^j, т.е. эти условия могут быть заменены на следующие:

(MR4′) $\dim\{f \in V_j : S_r^j f = \lambda_r f, r \in D(M^j)\} \leqslant 1$ при любых $\{\lambda_r\}_{r\in D(M^j)}$;

(MR5′) $f \in V_j \iff S_r^j f \in V_j$ при любых $r \in D(M^j)$.

Определение 6. Пусть V_j — ПКМА в X. Последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\varphi \in V_j$, называется масштабирующей, если $\{S_n^j \varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ — базис пространства V_j.

Теорема 7. *Функции $\varphi_j \in X$, $j \in \mathbb{Z}_+$ образуют масштабирующую последовательность для некоторого ПКМА в X тогда и только тогда, когда*

(Φ1) $\widehat{\varphi}_0(k) = 0$ *при любых* $k \neq 0$;

(Φ2) $\forall j \in \mathbb{Z}_+ \forall n \in \mathbb{Z}^d \exists k \equiv n \pmod{M^{*j}}$: $\widehat{\varphi}_j(k) \neq 0$;

(Φ3) $\forall k \in \mathbb{Z}^d \exists j \in \mathbb{Z}_+ : \widehat{\varphi}_j(k) \neq 0$;

(Φ4) $\forall j \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{Z}^d \exists \mu_n^j : \widehat{\varphi}_{j-1}(k) = \mu_n^j \widehat{\varphi}_j(k)$ *при любых* $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$;

(Φ5) $\forall j \in \mathbb{Z}_+ \forall n \in \mathbb{Z}^d \exists \gamma_n^j \neq 0 : \gamma_n^j \widehat{\varphi}_j(k) = \widehat{\varphi}_{j+1}(M^*k)$ *при любых* $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 8. *Пусть $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$ и выполнены аксиомы* MR1, MR2, MR3, MR5, MR6 *определения 5. Тогда* $V_0 = \{\mathrm{const}\}$.

Доказательство. По MR3 пространство V_0 одномерное. Пусть $f \in V_0$, $\|f\| \neq 0$. Покажем, что $\widehat{f}(0) \neq 0$. Предположим, что $\widehat{f}(0) = 0$. Введем оператор A:

$Af = \sum\limits_{s\in D(M)} f(M^{-1}\cdot + M^{-1}s)$ и положим $g = Af$. По лемме 1

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\mathbf{0}) &= \sum_{s\in D(M)}\int_{\mathbb{T}^d} f(M^{-1}x + M^{-1}s)dx \\ &= m\sum_{s\in D(M)}\int_{M^{-1}\mathbb{T}^d+M^{-1}s} f(z)dz = m\int_{\mathbb{T}^d} f(z)dz \\ &= m\widehat{f}(0).\end{aligned}$$

Пусть $g_0 \in V_j$, тогда $g_1 := Ag_0 \in V_{j-1}, \dots, g_j := Ag_{j-1} \in V_0$. Если $\widehat{g}_j(\mathbf{0}) \neq 0$, то это противоречит одномерности пространства V_0, так как $\widehat{f}(\mathbf{0}) = 0$. А если $\widehat{g}_0(\mathbf{0}) = 0$, то любая функция из любого V_j имеет нулевое среднее, что противоречит аксиоме MR2.

Теперь предположим, что $\widehat{f}(n) \neq 0$ для некоторого $n \neq \mathbf{0}$. Положим $f_1 := Af$. Поскольку $f \in V_0$, $f \in V_1$ по MR1 и, значит, $f_1 \in V_0$ по MR6(b). Так как пространство V_0 одномерно, то $f_1 = \lambda f$, что влечет $\widehat{f}_1(n) = \lambda\widehat{f}(n)$, но $\lambda = m$, так как $\widehat{f}_1(0) = m\widehat{f}(0)$. С другой стороны, непосредственный подсчет с использованием леммы 1 дает

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1(n) &= \sum_{s\in D(M)}\int_{\mathbb{T}^d} f(M^{-1}x + M^{-1}s)e^{2\pi i(x,n)}dx \\ &= m\sum_{s\in D(M)}\int_{M^{-1}\mathbb{T}^d+M^{-1}s} f(z)e^{2\pi i(Mz-s,n)}dz = m\int_{\mathbb{T}^d} f(z)e^{2\pi i(Mz,n)}dz \\ &= m\widehat{f}(M^*n).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\widehat{f}(n) = \widehat{f}(M^*n) = \dots = \widehat{f}(M^{l*}n) = \cdots,$$

но так как коэффициенты Фурье функции $f \in X$ стремятся к нулю с ростом модуля их номера, принимая во внимание (3), получаем противоречие. •

Определим рекурсивно операторы ω_n^j, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}^d$, действующие на X:

$$\begin{aligned}\omega_n^0 f &:= f, \\ \omega_n^{j+1} f(x) &:= \frac{1}{m}\sum_{s\in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n)}\omega_n^j f(x + M^{-j-1}s).\end{aligned}$$

Лемма 9. *Пусть* $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$ *и выполнена аксиома* MR5 *определения* 5. *Если* $f \in V_{j_0}$, *то* $\omega_n^j f \in V_{j_0}$ *для всех* $j = 0, \ldots, j_0$, $n \in \mathbb{Z}^d$, *и*

$$\omega_n^j f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}m + n)e^{2\pi i(M^{*j}m+n,\cdot)}, \tag{5}$$

т.е. $\widehat{\omega_n^j f}(k) = \widehat{f}(k)$ *при* $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$ *и* $\widehat{\omega_n^j f}(k) = 0$ *при* $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$.

Доказательство. Проведем индукцию по j. База для $j = 0$ очевидна. Пусть $\omega_n^j f \in V_{j_0}$, $0 \leqslant j < j_0$, и выполнено (5) для всех $n \in \mathbb{Z}^d$. Тогда из MR5 следует $\omega_n^j f(\cdot + M^{-j-1}s) = \omega_n^j f(\cdot + M^{-j_0}(M^{j_0-j-1}s) \in V_{j_0}$, что влечет $\omega_n^{j+1} f \in V_{j_0}$. Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega_n^{j+1} f}(k) &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{s \in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n)} \omega_n^j f(x + M^{-j-1}s) e^{-2\pi i(x,k)} dx \\
&= \frac{1}{m} \sum_{s \in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n)} \int_{\mathbb{T}^d} \omega_n^j f(t) e^{-2\pi i(t-M^{-j-1}s,k)} dt \\
&= \frac{1}{m} \sum_{s \in D(M)} e^{-2\pi i(M^{-j-1}s,n-k)} \widehat{\omega_n^j f}(k).
\end{aligned}$$

Если $k \equiv n \pmod{M^{*j+1}}$, то сумма справа, очевидно, равна m, а значит, $\widehat{\omega_n^{j+1} f}(k) = \widehat{\omega_n^j f}(k)$. Если $k \not\equiv n \pmod{M^{*j+1}}$ и $n \equiv k \pmod{M^{*j}}$, т.е. $n - k = M^{*j}l$, где вектор l не сравним с нулем по модулю M^*, то по лемме 2 последняя сумма равна нулю. Наконец, если $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$, то по индукционному предположению $\widehat{\omega_n^j f}(k) = 0$, а значит, и $\widehat{\omega_n^{j+1} f}(k) = 0$. •

Лемма 10. *Пусть* V_j — *ПКМА в* X. *Тогда в каждом пространстве* V_j *существует базис* $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$, *удовлетворяющий условиям:*

($V1$) $\widehat{v}_n^j(k) = 0$ *при любых* $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$;

($V2$) *если* $\widehat{v}_n^j(k) \neq 0$, *то* $\widehat{v}_n^j(\ell) = \widehat{v}_n^{j+1}(\ell)$ *при любых* $\ell \equiv k \pmod{M^{*j+1}}$;

($V3$) $\widehat{v}_n^j(k) = \widehat{v}_{M^*n}^{j+1}(M^*k)$ *при любых* $k \in \mathbb{Z}^d$.

Для удобства положим $\widehat{v}_l^j := \widehat{v}_n^j$, если $l \equiv n \pmod{M^j}$.

Доказательство. Проведем индукцию по j. База для $j = 0$ очевидна, так как при $j = 0$ все целочисленные векторы сравнимы между собой. Предположим, что в пространствах V_j, $j = 0, \ldots, j_0$, существуют базисы, удовлетворяющие условиям V1, V2, V3. Введем пространства $V_j^{(n)} := \{f \in V_j : \widehat{f}(k) =$

0 при любых $k \not\equiv n \pmod{M^{*j}}\}$. Пусть $F \in V_j$, тогда

$$F = \sum_{n \in D(M^{*j})} \omega_n^j F = \sum_{n \in D(M^{*j})} F_n, \qquad F_n \in V_j^{(n)}.$$

Это означает, что $V_j = \sum\limits_{n \in D(M^{*j})} V_j^{(n)}$. Следовательно,

$$m^j = \dim V_j \leqslant \sum_{n \in D(M^{*j})} \dim V_j^{(n)}. \tag{6}$$

Найдем размерность $V_j^{(n)}$. Если $f \in V_j^{(n)}$, то

$$f(x) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}m + n) e^{2\pi i (M^{*j}m+n, x)}.$$

Применяя оператор сдвига, получим

$$(S_p^j f)(x) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(M^{*j}m + n) e^{2\pi i (M^{*j}m+n, x+M^{-j}p)} \sim e^{2\pi i (n, M^{-j}p)} f(x),$$

т.е. $S_p^j f(x) = e^{2\pi i (n, M^{-j}p)} f(x)$ для всех $p \in \mathbb{Z}^d$. Отсюда в силу MR4, принимая во внимание (6), получаем $\dim V_j^{(n)} = 1$.

Построим базис $\{v_n^{j_0+1}\}$. Если $\widehat{v}_k^{j_0}(k) \neq 0$, то положим $v_k^{j_0+1} := \omega_k^{j_0+1} v_k^{j_0}$, и свойства V1, V2 будут выполнены в силу леммы 9. Проверим V3. Пусть $k \equiv 0 \pmod{M^*}$, $n \equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$, тогда по индукционному предположению

$$\widehat{v}_k^{j_0+1}(n) = \widehat{v}_k^{j_0}(n) = \widehat{v}_{M^{*-1}k}^{j_0-1}(M^{*-1}n) = \widehat{v}_{M^{*-1}k}^{j_0}(M^{*-1}n).$$

Таким образом, определены базисные функции с номерами k, для которых существует такое $n \equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$, что $\widehat{v}_k^{j_0}(n) \neq 0$. Пусть теперь $\widehat{v}_k^{j_0}(n) = 0$

для всех $n \equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$ и $k \equiv 0 \pmod{M^*}$, тогда положим $v_k^{j_0+1}(x) := v_{M^{*-1}k}^{j_0}(Mx)$. Используя лемму 1, находим

$$\begin{aligned}\widehat{v}_k^{j_0+1}(n) &= \int_{\mathbb{T}^d} v_k^{j_0+1}(x)e^{-2\pi i(x,n)}dx = \int_{\mathbb{T}^d} v_{M^{*-1}k}^{j_0}(Mx)e^{-2\pi i(x,n)}dx \\ &= \sum_{s\in D(M)} \int_{M^{-1}\mathbb{T}^d+M^{-1}s} v_{M^{*-1}k}^{j_0}(Mx)e^{-2\pi i(x,n)}dx \\ &= \frac{1}{m}\sum_{s\in D(M)} \int_{\mathbb{T}^d+s} v_{M^{*-1}k}^{j_0}(t)e^{-2\pi i(t,M^{*-1}n)}dt \\ &= \widehat{v}_{M^{*-1}k}^{j_0}(M^{*-1}n).\end{aligned}$$

Ясно, что свойство V3 выполнено, V1 выполнено по индукционному предположению, V2 не требует проверки. Наконец, пусть $\widehat{v}_k^{j_0}(n) = 0$ для всех $n \equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$ и $k \not\equiv 0 \pmod{M^*}$. В этом случае в качестве $v_k^{j_0+1}$ берем любой ненулевой элемент пространства $V_{j_0+1}^{(k)}$. Свойство V1 следует из определения пространства $V_{j_0+1}^{(k)}$, V2 и V3 не требуют проверки. •

Замечание. Если для последовательности подпространств $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, выполнены только аксиомы MR1, MR3, MR4, MR5 определения 5, то в каждом пространстве V_j существует базис $\{v_n^j\}_{n\in D(M^{*j})}$, удовлетворяющий условиям V1, V2. Доказательство можно провести по той же схеме, взяв в качестве v_0^0 любой ненулевой элемент пространства V_0, а в качестве $v_k^{j_0+1}$ в случае, когда $\widehat{v}_k^{j_0}(n) = 0$ для всех $n \equiv k \pmod{M^{*j_0+1}}$ и $k \equiv 0 \pmod{M^*}$, любой ненулевой элемент пространства $V_{j_0+1}^{(k)}$.

Лемма 11. *Если в каждом пространстве $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, существует базис $\{v_n^j\}_{n\in D(M^{*j})}$, удовлетворяющий условию* V1 *леммы* 10, *то выполнена аксиома* MR4 *определения* 5.

Доказательство. Учитывая замечание к определению 5, достаточно проверить выполнение условия MR4′. Пусть $r \in D(M^j)$, f — собственный вектор оператора S_r^j, т.е. $S_r^j f = \lambda_r f$, и пусть $f = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j v_n^j$. Поскольку выполнено условие V1, оператор S_r^j действует на v_n^j как оператор умножения на $e^{2\pi i(M^{*-j}n,r)}$. Применив оператор S_r^j к функции f, получим

$$S_r^j f(x) = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j S_n^j v_n^j(x) = \sum_{n\in D(M^{*j})} \alpha_n^j e^{2\pi i(M^{*-j}n,r)} v_n^j(x).$$

Принимая во внимание, что функция f — собственный вектор оператора S_r^j, имеем

$$0 = S_r^j f(x) - \lambda_r f(x) = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j [e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} - \lambda_r] v_n^j(x).$$

Из линейной независимости функций v_n^j следует, что $\alpha_n^j [e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} - \lambda_r] = 0$ для всех $n \in D(M^{*j})$. Предположим, что $\alpha_{n_0}^j \neq 0$, $\alpha_{n_1}^j \neq 0$ для двух различных номеров $n_0 \neq n_1$. Тогда, вычитая, получим

$$(e^{2\pi i (M^{*-j} n_0, r)} - \lambda_r) - (e^{2\pi i (M^{*-j} n_1, r)} - \lambda_r) = 0$$

или $e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0 - n_1), r)} = 1$. Пусть теперь f — собственный вектор всех операторов S_r^j, $r \in D(M^j)$. Просуммировав эти равенства по всем r, находим

$$\sum_{r \in D(M^j)} e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0 - n_1), r)} = m^j. \tag{7}$$

С другой стороны, так как n_0 не сравнимо с n_1 по модулю M^{*j}, по лемме 2

$$\sum_{r \in D(M^{*j})} e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0 - n_1), r)} = 0, \tag{8}$$

что противоречит (7). Таким образом, α_n^j может быть отлично от нуля только при $n = n_0$, значит, вектор f пропорционален $v_{n_0}^j$. Кроме того, из приведенных рассуждений следует, что

$$\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j} n_0, r)}, \quad r \in D(M^j). \tag{9}$$

Пусть $g = \sum\limits_n \beta_n^j v_n^j$ — другой собственный вектор всех операторов S_r^j, $r \in D(M^j)$. Для него также единственное β_n^j отлично от нуля. Предположим, что $\beta_{n_1}^j \neq 0$, $n_1 \neq n_0$. Тогда аналогично (9) имеем $\lambda_r = e^{2\pi i (M^{*-j} n_1, r)}$, $r \in D(M^j)$. Отсюда и из (9) получаем $e^{2\pi i (M^{*-j}(n_0 - n_1), r)} = 1$ для любого $r \in D(M^j)$. Просуммировав эти равенства по всем r, получаем (7), что противоречит (8). Следовательно, вектор g тоже пропорционален $v_{n_0}^j$, и подпространство, состоящее из всех таких функций, будет иметь размерность не больше единицы. •

Предложение 12. *Пусть V_j — ПКМА в X. Для того чтобы последовательность $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset X$ была масштабирующей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_j = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j v_n^j, \quad \alpha_n^j \neq 0 \text{ при любых } n \in D(M^{*j}), \tag{10}$$

где $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$ — базис пространства V_j, определенный в лемме 10.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — масштабирующая последовательность и пусть α_n^j, $n \in D(M^{*j})$ — коэффициенты разложения функции φ_j по базису $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$. Применяя к φ_j оператор сдвига S_r^j, $r \in D(M^j)$, получаем

$$S_r^j \varphi_j = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} v_n^j. \tag{11}$$

Предположим, что $\alpha_{n_0}^j = 0$ при каком-то n_0 , тогда

$$V_j = \operatorname{span}\{S_r^j \varphi_j, r \in D(M^j)\} = \operatorname{span}\{v_n^j, n \in D(M^{*j}), n \neq n_0\},$$

что противоречит минимальности базиса $\{v_n^j\}_{n \in D(M^{*j})}$.

Достаточность. Пусть функции φ_j определены по формуле (10). Как и выше,

$$S_r^j \varphi_j = \sum_{n \in D(M^{*j})} \alpha_n^j e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} v_n^j, \quad r \in D(M^j).$$

Посмотрим на эти равенства как на систему уравнений с неизвестными $\alpha_n^j v_n^j$. По следствию 3 матрица такой системы унитарна (с точностью до множителя). Так как функции $\alpha_n^j v_n^j$ образуют базис, а базис переходит в базис при унитарном преобразовании, функции $S_r^j \varphi_j$, $r \in D(M^j)$ образуют базис пространства V_j. •

Следствие 13. *Если $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — масштабирующая последовательность, то $\omega_n^j \varphi_j = \alpha_n^j v_n^j$, где $\alpha_n^j \neq 0$.*

Утверждение следует из того, что $\dim V_j^{(n)} = 1$ ($V_j^{(n)}$ — пространства, определенные в лемме 10), и из (5). •

Следствие 14. *В любом ПКМА существует масштабирующая последовательность.*

Для доказательства достаточно положить $\alpha_n^j = 1$ в (10). •

Доказательство теоремы 7. Необходимость. Свойство Ф1 следует из леммы 8. Для доказательства свойства Ф2 воспользуемся следствием 13. Из равенства $\omega_n^j \varphi_j = \alpha_n^j v_n^j$ имеем $\widehat{\varphi}_j(k) = \widehat{\omega_k^j \varphi_j}(k) = \alpha_n^j \widehat{v}_n^j(k)$ для любого $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$. Существование индекса k, сравнимого с $n \pmod{M^{*j}}$, для которого $\widehat{v}_n^j(k) \neq 0$, следует из того, что $v_n^j \not\equiv 0$ (так как v_n^j — базисный вектор) и $\widehat{v}_n^j(\ell) = 0$ для всех $\ell \not\equiv n \pmod{M^{*j}}$. Принимая во внимание, что $\alpha_n^j \neq 0$, получаем $\widehat{\varphi}_j(k) \neq 0$. Свойство Ф3 докажем от противного. Предположим, что $\widehat{\varphi}_j(k) = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$. Это означает, что у всех функций φ_j отсутствует гармоника $e^{2\pi i(k,x)}$. Тогда ее нет и во всех сдвигах $S_k^j \varphi_j$, т.е. для любой функции $f \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} V_j$ скалярное произведение $\langle f, e^{2\pi i(k,x)} \rangle$ равно нулю, а это противоречит полноте объединения пространств V_j (аксиома MR4). Для доказательства свойства Ф4 возьмем произвольный элемент $n \in \mathbb{Z}^d$. Рассмотрим сначала случай, когда существует такой элемент $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$, что $\widehat{\varphi}_{j-1}(k) \neq 0$. По следствию 13 $\omega_n^j \varphi_j = \alpha_n^j v_n^j$, $\omega_n^j \varphi_{j-1} = \omega_n^j \omega_n^{j-1} \varphi_{j-1} = \alpha_n^{j-1} \omega_n^j v_n^{j-1}$, $\alpha_n^j, \alpha_n^{j-1} \neq 0$. Отсюда, принимая во внимание свойство V2 из леммы 10, получаем, что

$$\widehat{\varphi}_{j-1}(\ell) = \frac{\alpha_n^{j-1}}{\alpha_n^j} \widehat{\varphi}_j(\ell)$$

для всех $\ell \equiv n \pmod{M^{*j}}$. Осталось положить $\mu_n^j = \alpha_n^{j-1}/\alpha_n^j$. Если $\widehat{\varphi}_{j-1}(k) = 0$ для любого $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$, то положим $\mu_n^j = 0$. Для доказательства свойства Ф5 опять воспользуемся следствием 13. Для $k \equiv n \pmod{M^{*j}}$ имеем

$$\widehat{\varphi}_{j+1}(M^*k) = \widehat{\omega_{M^*n}^{j+1} \varphi_{j+1}}(M^*k) = \alpha_{M^*n}^{j+1} \widehat{v}_{M^*n}^{j+1}(M^*k),$$

где $\alpha_{M^*n}^{j+1} \neq 0$. С другой стороны, $\widehat{\varphi}_j(n) = \alpha_k^j \widehat{v}_n^j(k)$, $\alpha_n^j \neq 0$. Отсюда, принимая во внимание свойство V3 из леммы 10, получаем

$$\widehat{\varphi}_{j+1}(M^*k) = \frac{\alpha_{M^*n}^{j+1}}{\alpha_n^j} \widehat{\varphi}_j(k).$$

Осталось положить $\gamma_n^j = \alpha_{M^*n}^{j+1}/\alpha_n^j$.

Достаточность. Пусть функции φ_j из пространства X удовлетворяют свойствам Ф1–Ф5. Положим $V_j = \mathrm{span}\{S_n^j \varphi_j, n \in D(M^j)\}$ и покажем, что $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$

— ПКМА в X, а $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ — масштабирующая последовательность. Сначала проверим MR5. Пусть $f \in V_j$, тогда $f = \sum_{k\in D(M^j)} \alpha_k S_k^j \varphi_j$. Применив к этому равенству оператор сдвига S_p^j, $p \in D(M^j)$, приходим к равенству

$$S_p^j f = \sum_{k\in D(M^j)} \alpha_k S_p^j S_k^j \varphi_j . \tag{12}$$

Из периодичности функции f следует, что $S_p^j S_n^j f = S_r^j f$, где $r \in D(M^j)$, $r \equiv (p+n) \pmod{M^j}$. Подставляя эти равенства в (12), по определению пространства V_j получаем $S_p^j f \in V_j$. Если теперь $S_p^j f \in V_j$, то по уже доказанному $f = S_{-p}^j S_p^j f \in V_j$. Теперь докажем условие MR3. Аналогично формуле (11), принимая во внимание лемму 9, находим

$$S_r^j \varphi_j = \sum_{n\in D(M^{*j})} e^{2\pi i (M^{*-j} n, r)} \omega_n^j \varphi_j . \tag{13}$$

Отсюда следует, что $V_j = \operatorname{span}\{\omega_n^j \varphi_j, n \in D(M^{*j})\}$. Покажем, что функции $\omega_n^j \varphi_j$, $n \in D(M^{*j})$, образуют базис пространства V_j. Предположим, что они линейно-зависимы, тогда существуют такие числа α_k, $k \in D(M^{*j})$, $\alpha_{k_0} \neq 0$, что $\sum_{k\in D(M^{*j})} \alpha_k \omega_k^j \varphi_j = 0$. По лемме 9 отсюда получаем $\widehat{\omega_n^j \varphi_j}(k) = \widehat{\varphi}_j(k) = 0$ для всех $k \equiv k_0 \pmod{M^{*j}}$, что противоречит условию Ф2. Для доказательства условия MR3 осталось заметить, что количество функций $\omega_n^j \varphi_j$ равно m^j. Поскольку функций $S_n^j \varphi_j, n \in D(M^j)$, тоже ровно m^j штук, мы также установили, что $\{S_n^j \varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ — базис пространства V_j. Для доказательства условия MR1 надо проверить, что соотношение $f \in V_j$ влечет соотношение $f \in V_{j+1}$. Достаточно ограничиться рассмотрением базисных функций $\omega_n^j \varphi_j, n \in D(M^{*j})$. Из лемм 9 и 4 следует равенство

$$\omega_n^j \varphi_j = \sum_{p\in D(M^*)} \omega_{n+M^{*j}p}^{j+1} \omega_n^j \varphi_j . \tag{14}$$

Используя лемму 9 и условие Ф4, принимая во внимание M^{*j+1}-

периодичность последовательности μ_n^{j+1} по нижнему индексу, получаем

$$\begin{aligned}
&\omega^{j+1}_{n+M^{*j}p}\omega^j_n\varphi_j \\
&\quad\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\omega^j_n\varphi_j}(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} \\
&\quad= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\varphi}_j(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} \\
&\quad= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\mu^{j+1}_{M^{*j+1}k+n+M^{*j}p}\widehat{\varphi}_{j+1}(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} \\
&\quad= \mu^{j+1}_{n+M^{*j}p}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{\varphi}_{j+1}(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p)e^{2\pi i(M^{*j+1}k+n+M^{*j}p,x)} \\
&\quad\sim \mu^{j+1}_{n+M^{*j}p}\omega^{j+1}_{n+M^{*j}p}\varphi_{j+1}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\omega^j_n\varphi_j = \sum_{p\in D(M^*)}\mu^{j+1}_{n+M^{*j}p}\omega^{j+1}_{n+M^{*j}p}\varphi_{j+1}. \tag{15}$$

Осталось заметить, что $\omega^{j+1}_{n+M^{*j}p}\varphi_{j+1}\in V_{j+1}$ по лемме 9.

Прежде чем переходить к доказательству остальных свойств, покажем, что в V_j существует базис, удовлетворяющий свойствам леммы 10. Определим числа α^j_n, $j\in\mathbb{Z}_+$, $n\in D(M^{*j})$, рекурсивно по j: $\alpha^0_0 := 1$;

если $\mu^j_n\neq 0$, то $\alpha^j_n := \alpha^{j-1}_n/\mu^j_n$;

если $\mu^j_n = 0$, $n\equiv 0 \pmod{M^*}$, то $\alpha^j_n := \alpha^{j-1}_{M^{*-1}n}\gamma^{j-1}_{M^{*-1}n}$;

если $\mu^j_n = 0$, $n\not\equiv 0 \pmod{M^*}$, то $\alpha^j_n := 1$.

Из построения ясно, что $\alpha^j_n\neq 0$. Положим $v^j_n = \omega^j_n\varphi_j/\alpha^j_n$. Как уже показано, функции $\omega^j_n\varphi_j$ образуют базис пространства V_j, поэтому $\{v^j_n\}_{n\in D(M^{*j})}$ — тоже базис, и нетрудно проверить, что выполнены свойства V1–V3 леммы 10. Из леммы 11 следует свойство MR4. Для доказательства свойства MR6 достаточно установить, что оно выполняется для функций $\{v^j_n\}_{n\in D(M^{*j})}$. Используя лемму 9 и V3, получаем

$$\begin{aligned}
&v^j_n(Mx) \\
&\quad\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{v}^j_n(k)e^{2\pi i(k,Mx)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\widehat{v}^{j+1}_{M^*n}(M^*k)e^{2\pi i(M^*k,x)} \\
&\quad= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d,\ l\equiv 0 \pmod{M^*}}\widehat{v}^{j+1}_{M^*n}(l)e^{2\pi i(l,x)} \\
&\quad\sim v^{j+1}_{M^*n}(x).
\end{aligned}$$

Для доказательства свойства MR6(a) осталось заметить, что $v_{M^*n}^{j+1} \in V_{j+1}$. Проверим выполнение свойства MR6(b). Рассмотрим сначала случай $n \equiv 0 \pmod{M^*}$. Используя V3, получаем

$$\sum_{k\in D(M)} v_n^{j+1}(M^{-1}x + M^{-1}k) = \sum_{k\in D(M)} v_{M^{*-1}n}^{j}(x+k) \in V_j.$$

Пусть теперь $n \not\equiv 0 \pmod{M^*}$, тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in D(M)} v_n^{j+1}(M^{-1}x + M^{-1}k)\\
&\quad\sim \sum_{l\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k\in D(M)} \widehat{v}_n^{j+1}(M^{*j+1}l+n)e^{2\pi i(M^{*j+1}l+n,M^{-1}x+M^{-1}k)}\\
&\quad= \sum_{l\in\mathbb{Z}^d} \widehat{v}_n^{j+1}(M^{*j+1}l+n)e^{2\pi i(M^{*j+1}l+n,M^{-1}x)} \sum_{k\in D(M)} e^{2\pi i(M^{*j}l+M^{*-1}n,k)},
\end{aligned}$$

но последняя сумма равна нулю по лемме 2, т.е. свойство MR6(b) тоже выполнено. Осталось доказать свойство MR2. Поскольку тригонометрические полиномы плотны в X, достаточно проверить, что любой тригонометрический полином можно приблизить функциями из $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} V_j$. Это, в свою очередь, достаточно проверить для одной гармоники. Положим $f_r(x) = e^{2\pi i(r,x)}$, $r \neq 0$. Из свойства Ф3 следует существование такого j_0, что $\widehat{\varphi}_{j_0}(r) \neq 0$ и в силу Ф4 $\widehat{\varphi}_j(r) \neq 0$, а следовательно, и $\widehat{v}_r^j(r) \neq 0$ для всех $j \geqslant j_0$. Введем функции h_j для $j \geqslant j_0$:

$$h_j(x) := 1 - \frac{v_r^j(x)}{\widehat{v}_r^j(r)} e^{-2\pi i(r,x)},$$

тогда

$$\widehat{h}_j(n) = \delta_{n0} - \frac{\widehat{v}_r^j(r-n)}{\widehat{v}_r^j(r)}, \qquad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Таким образом, $\widehat{h}_j(n) \neq 0$ только, когда $n \equiv 0 \pmod{M^{*j}}$, $n \neq 0$, значит, $\widehat{h}_j(n) = 0$ для всех целых n из $M^{*j}(-1,1)^d$. Выделим подпоследовательность вложенных параллелепипедов $M^{*j_k}(-1,1)^d$. Из (1) следует, что существует такое n_0, что $\|M^{*-n_0}\| \leqslant 1/2$. Положив $j_{k+1} = j_k + n_0$, будем иметь $\|M^{*j_{k+1}}x\| \geqslant 2\|M^{*j_k}x\|$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$. При достаточно больших k в каждый косоугольный параллелепипед $M^{*j_k}(-1,1)^d$ можно вписать куб K_{j_k} с центром в начале координат и ребрами, параллельными координатным осям и с длинами a_k так, чтобы a_k были целыми четными числами и монотонно неограниченно возрастали с ростом k. Для удобства дальше будем писать K_j уже для подпоследовательности. Как было отмечено выше, $\widehat{h}_j(n) = 0$ для всех целых n из K_j, значит, частные суммы ряда Фурье по K_j для функции h_j равны нулю, а значит, и соответствующие средние Фейера $\sigma_{K_j}(h_j)$ по тем кубам тоже будут равны нулю. Далее, нам понадобится следующее равенство при $j \geqslant j_0$:

$$h_j(x) = m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} h_{j_0}(x + M^{-j}n). \tag{16}$$

Для доказательства, применяя лемму 9, преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned}
&m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} h_{j_0}(x + M^{-j}n)\\
&= m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} \left[1 - \frac{v_r^{j_0}(x+M^{-j}n)}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} e^{-2\pi i(r,x+M^{-j}n)}\right]\\
&\sim -\frac{m^{j_0-j}}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} e^{-2\pi i(r,x+M^{-j}n)} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d,\\ l\neq 0}} \widehat{v}_r^{j_0}(M^{*j_0}l + r) e^{2\pi i(M^{*j_0}l+r,x+M^{-j}n)}\\
&= -\frac{m^{j_0-j}}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^d,\\ l\neq 0}} \widehat{v}_r^{j_0}(M^{*j_0}l + r) e^{2\pi i(M^{*j_0}l,x)} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} e^{-2\pi i(M^{*(j_0-j)}l,n)}.
\end{aligned}$$

По лемме 2 внутренняя сумма в правой части равна m^{j-j_0} при $l \equiv 0 \pmod{M^{j-j_0}}$ и равна нулю в противном случае. Это означает, что во внешней сумме отличными от нуля будут только слагаемые с номерами $l \equiv 0 \pmod{M^{j-j_0}}$, и ее можно переписать в виде

$$-\frac{m^{j_0-j}}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d,\ k\neq 0} \widehat{v}_r^{j_0}(M^{*j}k + r) e^{2\pi i(M^{*j}k+r,\ x)} e^{-2\pi i(r,\ x)} \sim 1 - \frac{v_r^j(x)}{\widehat{v}_r^{j_0}(r)} e^{-2\pi i(r,\ x)}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что по свойству V2 верно равенство $\widehat{v}_r^{j_0}(r) = \widehat{v}_r^j(r)$ при $j \geqslant j_0$ и $\widehat{v}_r^{j_0}(r) \neq 0$, получаем (16). Из этого равенства и линейности средних Фейера следует, что

$$\begin{aligned}
\|h_j\| &= \|h_j - \sigma_{K_j}(h_j)\| \\
&= \Big\| m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} [h_{j_0}(x+M^{-j}n) - \sigma_{K_j}(h_{j_0})(x+M^{-j}n)] \Big\| \\
&\leqslant m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} \|h_{j_0}(x+M^{-j}n) - \sigma_{K_j}(h_{j_0})(x+M^{-j}n)\| \\
&= m^{j_0-j} \sum_{n\in D(M^{j-j_0})} \|h_{j_0} - \sigma_{K_j}(h_{j_0})\|.
\end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $j\to\infty$, так как средние Фейера функции из X сходятся к ней по норме (см., например, [23, гл. 17, §1]). Таким образом, мы установили, что

$$\lim_{j\to\infty} \left\| f_r(x) - \frac{v_r^j(x)}{\widehat{v}_r^j(r)} \right\| = \lim_{j\to\infty} \|h_j(x)\| = 0,$$

т.е. f_r аппроксимируется функциями $v_r^j(x)/\widehat{v}_r^j(r) \in V_j$. •

Из доказательства теоремы и из замечания к лемме 10 ясно, что если из определения ПКМА исключить аксиому MR6, то масштабирующая последовательность будет характеризоваться свойствами Ф2–Ф4. То есть имеет место следующее утверждение

Теорема 15. *Пусть* $\varphi_j \in X$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $V_j = \operatorname{span}\{S_n^j\varphi_j, n \in D(M^{*j})\}$. *Для совокупности пространств* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *выполнены аксиомы* MR1–MR5 *определения* 5 *тогда и только тогда, когда функции* φ_j *удовлетворяют условиям* Ф2–Ф4 *теоремы* 7.

Широкий класс ПКМА в $L_2(\mathbb{T}^d)$ можно построить по стандартной схеме: масштабирующая последовательность получается периодизацией некоторой функции $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ по формулам

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(M^j x + M^j k) \tag{17}$$

(будем говорить, что такой ПКМА порожден функцией φ). Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ — масштабирующая функция непериодического КМА, т.е. выполнены условия:

(i) существуют такие положительные постоянные A, B, что

$$A \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\xi+m)|^2 < B \quad \text{для п. в.} \quad \xi \in \mathbb{R}^d;$$

(ii) существует такая функция $m_0 \in L_2(\mathbb{T}^d)$, что

$$\widehat{\varphi}(M^*\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{для п. в.} \quad \xi \in \mathbb{R}^d;$$

(iii) функция $\widehat{\varphi}$ непрерывна в нуле и $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.

Если дополнительно предположить, что φ достаточно быстро убывает на бесконечности, например,

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{(1+|x|)^{d+\epsilon}}\right), \qquad \epsilon > 0$$

(что обычно выполнено для известных КМА), то $\varphi_j \in L_2(\mathbb{T}^d)$, и по формуле суммирования Пуассона

$$\varphi_j(x) = m^{-j} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(M^{*-j}m)e^{2\pi i(m,x)}.$$

Проверим, что функции φ_j удовлетворяют условиям Ф1 – Ф5 теоремы 7. Для доказательства условия Ф1 заметим, что ввиду (ii) и (iii) имеем $m_0(n) = m_0(0) = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}^d$. Поэтому, если $\widehat{\varphi}_j(k) = m^{-j}\widehat{\varphi}(M^{*-j}k) \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}^d, k \neq 0$, то $\widehat{\varphi}_j(M^{*\ell}k) = \widehat{\varphi}_j(k) \neq 0$ для всех $\ell \in \mathbb{Z}_+$, что не может иметь места для функции из $L_2(\mathbb{T}^d)$. Свойства Ф2 и Ф3 следуют соответственно из (i) и (iii). Нетрудно убедиться в справедливости свойств Ф4, Ф5, положив $\mu_k^j = m_0(M^{*-j-1}k)$, $\gamma_k^j = m$.

В [19] найдено условие, при котором ПКМА в $L_p(\mathbb{T}^1)$ или в $C(\mathbb{T}^1)$ порождается некоторой суммируемой функцией. Однако ПКМА может быть порожден и не суммируемой функцией. Например, функция

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \tag{18}$$

является масштабирующей, и, хотя $\varphi \notin L(\mathbb{R})$, ее периодизация возможна, так как ряд (17) сходится в смысле главного значения. А. Петухов [24] построил ПКМА, который не порожден никакой функцией в таком смысле. По-настоящему вопрос порождаемости ПКМА пока не изучен даже в одномерном случае.

§4. Пространства всплесков

В этом параграфе, следуя стандартной идее построения систем всплесков, мы определим пространства всплесков и функции, сдвиги которых образуют базисы в этих пространствах. В ортогональном случае (он может иметь место только при $X = L_2(\mathbb{T}^d)$) пространство всплесков есть ортогональная относительно V_j проекция пространства V_{j+1}. В биортогональном случае мы имеем дело с двумя кратномасштабными анализами, и пространство V_{j+1} одного анализа проектируется ортогонально относительно соответствующей компоненты $\widetilde{V}_j$ другого анализа.

Будем рассматривать пары ПКМА с первой компонентой $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ в $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($C(\mathbb{T}^d)$ для $p = \infty$) и второй компонентой $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ в $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1/p + 1/q = 1$ ($C(\mathbb{T}^d)$ для $p = 1$). Их будем называть (p,q)-парами.

Предложение 16. *Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют (p,q)-пару, $\varphi \in V_j$, $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{V}_j$. Для того чтобы системы функций $\{S_n^j\varphi\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}\}_{k\in D(M^j)}$ были биортонормированными, необходимо и достаточно, чтобы для всех $r \in \mathbb{Z}^d$ выполнялись равенства*

$$\langle \omega_r^j\varphi,\ \omega_r^j\widetilde{\varphi}\rangle = m^{-j}. \tag{19}$$

Доказательство. По лемме 9 имеем

$$\begin{aligned}\langle S_n^j\varphi,\ S_k^j\widetilde{\varphi}\rangle &= \left\langle \sum_{r\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}r,\ n)}\omega_r^j\varphi,\ \sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}s,\ k)}\omega_s^j\widetilde{\varphi}\right\rangle \\ &= \sum_{r\in D(M^{*j})}\ \sum_{s\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}r,\ n)}e^{-2\pi i(M^{*-j}s,\ k)}\langle \omega_r^j\varphi,\ \omega_s^j\widetilde{\varphi}\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку спектры функций $\omega_r^j\varphi$, $\omega_s^j\widetilde{\varphi}$ дизъюнктны при $r \neq s$, соответствующие слагаемые в последней сумме равны нулю. Таким образом,

$$\langle S_n^j\varphi,\ S_k^j\widetilde{\varphi}\rangle = \sum_{r\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}r,\ n-k)}c_r, \tag{20}$$

где $c_r := \langle \omega_r^j\varphi,\ \omega_r^j\widetilde{\varphi}\rangle$. Отсюда и из леммы 2 следует достаточность. Предположим теперь, что $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ и $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{k\in D(M^j)}$ — биортонормированные системы. Рассмотрим равенства (20) при каком-то фиксированном $n \in D(M^j)$ и всех $k \in D(M^j)$ как систему уравнений относительно неизвестных c_r. В силу следствия 3 решение $c_p = m^{-j}$, $p \in D(M^{*j})$, единственно. Осталось заметить, что $c_p = c_{p+M^{*j}}$, т.е. $c_p = m^{-j}$ при всех $p \in \mathbb{Z}^d$, что и доказывает необходимость. •

Следствие 17. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *образуют* (p,q)*-пару с масштабирующими последовательностями соответственно* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *и пусть* μ_n^j *и* $\widetilde{\mu}_k^j$ *— множители из свойства Ф4 теоремы 7. Если системы* $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ *и* $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ *являются биортонормированными, то*

$$\sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}k}} = m \tag{21}$$

для всех $p\in\mathbb{Z}^d$ *и всех* $j\in\mathbb{Z}_+$

Доказательство. Аналогично равенству (15) имеем

$$\begin{aligned} m^{-j+1} &= \langle \omega_p^{j-1}\varphi_{j-1},\ \omega_p^{j-1}\widetilde{\varphi}_{j-1}\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\omega^j_{p+M^{*j-1}k}\varphi_{j-1},\ \sum_{l\in D(M^*)} \widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}l}\omega^j_{p+M^{*j-1}l}\widetilde{\varphi}_{j-1}\Big\rangle \\ &= \sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}k}}\langle \omega^j_{p+M^{*j-1}k}\varphi_j,\ \omega^j_{p+M^{*j-1}k}\widetilde{\varphi}_j\rangle \\ &= m^{-j}\sum_{k\in D(M^*)} \mu^j_{p+M^{*j-1}k}\overline{\widetilde{\mu}^j_{p+M^{*j-1}k}}, \end{aligned}$$

и остается домножить обе части равенства на m^j. •

Приступаем к построению пространств всплесков и базисов в них. Сначала рассмотрим ортогональный случай. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ — ПКМА в $L_2(\mathbb{T}^d)$ с масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, порождающей ортонормированные базисы из сдвигов $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ в пространствах V_j. Ограничимся рассмотрением случая, когда все μ_k^j (множители из свойства Ф4 теоремы 7) вещественные. Наша цель — найти в пространстве V_{j+1} такие функции $\psi^{(\nu)}$, $\nu=1,\dots,m-1$, что соответствующие системы $\{S_n^j\psi_j^{(\nu)}\}_{n\in D(M^j)}$ являются ортонормированными, ортогональны V_j и дополняют $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ до базиса пространства V_{j+1}. Для этого нам потребуется достраивать матрицу до унитарной по ее первой строке. Пусть вещественные числа $a_{00},\dots,a_{0m}$ (первая строка будущей унитарной матрицы A) удовлетворяют условию

$$\sum_{r=1}^{m} a_{0r}^2 = 1. \tag{22}$$

Если $a_{00} = 1$, то $a_{01}, \dots, a_{0m} = 0$, и в качестве A берем единичную матрицу. Если $a_{00} \neq 1$, то остальные элементы матрицы A дает преобразование Холсхолдера:

$$a_{lk} = a_{kl} = -\frac{a_{0k}a_{0l}}{1-a_{00}}, \quad k \neq l, \quad a_{kk} = 1 - \frac{a_{0k}^2}{1-a_{00}}. \tag{23}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in D(M^{*j})$. Пусть s_k, $k = 0, \dots, m-1$, — перенумерованные элементы множества $D(M^*)$. Положим $a_{0k} = \mu^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}/\sqrt{m}$, $k = 0, \dots, m-1$. По следствию 17 эти числа удовлетворяют условию (22), поэтому мы можем достроить эту строку до унитарной матрицы A. Положим $\alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} = \sqrt{m}a_{\nu k}$. Если n пробегает все множество $D(M^{*j})$, то по лемме 4 векторы $n + M^{*j}s_k$, $k = 0, \dots, m-1$, будут пробегать все $D(M^{*j+1})$, т.е. мы определили числа $\alpha^{\nu,j}_s$ для всех $s \in D(M^{*j+1})$. Распространим эту последовательность (по нижнему индексу) на $\mathbb{Z}^d$, положив $\alpha^{\nu,j}_l = \alpha^{\nu,j}_s$ для всех $l \equiv s$ $(\mathrm{mod}\ M^{*j+1})$. Определим теперь для каждого $\nu = 1, \dots, m-1$ *всплеск-функции* $\psi^{(\nu)}$, задав их коэффициенты Фурье по формулам $\widehat{\psi}^{(\nu)}_j(l) = \alpha^{\nu,j}_s \widehat{\varphi}_{j+1}(l)$, $l \in \mathbb{Z}^d$, и *пространства всплесков*

$$W^{(\nu)}_j := \mathrm{span}\{S^j_n \psi^{(\nu)}_j, n \in D(M^j)\}.$$

Теорема 18. *Пусть $\{V_j\}$ — ПКМА в $L^2(\mathbb{T}^d)$ с масштабирующей последовательностью $\{\varphi_j\}$ и пусть $S^j_n\varphi_j$, $n \in D(M^j)$, — ортонормированная система для любого $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$V_{j+1} = V_j \oplus W^{(1)}_j \oplus \dots \oplus W^{(m-1)}_j, \qquad j \in \mathbb{Z}_+,$$

а $\{S^j_n\psi^{(\nu)}_j\}_{n\in D(M^j)}$ — ортонормированный базис пространства $W^{(\nu)}_j$, $\nu = 1, \dots, m-1$.

Доказательство этой теоремы мы проведем в более общей ситуации (см. теорему 19).

Рассмотрим теперь биортогональный случай. Пусть дана (p, q)-пара, удовлетворяющая условиям следствия 17. Для построения всплеск-функций нам потребуется достраивать две подходящих строки до двух взаимно-обратных матриц. Пусть даны числа $a_{00}, \cdots, a_{0m-1}$ и $\widetilde{a}_{00}, \cdots, \widetilde{a}_{0m-1}$ (соответственно первые строки будущих матриц A и $\widetilde{A}$) такие, что

$$\sum_{r=0}^{m-1} a_{0r}\overline{\widetilde{a}_{0r}} = 1. \tag{24}$$

Предположим сначала, что $a_{00} = \overline{\widetilde{a}_{00}} \neq 1$. Тогда для $k, l = 1, \dots, m-1$ остальные элементы определим по формулам

$$a_{l0} = \overline{\widetilde{a}_{0l}}, \qquad a_{lk} = \delta_{lk} - \frac{\overline{\widetilde{a}_{0l}} a_{0k}}{1 - a_{00}}, \tag{25}$$

$$\widetilde{a}_{l0} = \overline{a_{0l}}, \qquad \widetilde{a}_{lk} = \delta_{lk} - \frac{\overline{a_{0l}} \widetilde{a}_{0k}}{1 - \overline{a_{00}}}. \tag{26}$$

Нетрудно проверить, что

$$A\widetilde{A}^* = E_m. \tag{27}$$

Теперь предположим, что $a_{00}\widetilde{a}_{00} \neq 0$. Рассмотрим числа $a'_{0k} = Ca_{0k}$, $\widetilde{a}'_{0k} = \widetilde{a}_{0k}/\overline{C}$, $k = 0, \dots, m-1$, выбрав число C из условия $a'_{00} = \overline{\widetilde{a}'_{00}} \neq 1$. Это нетрудно сделать, положив $C = \sqrt{\overline{\widetilde{a}_{00}}/a_{00}}$ и взяв при этом то комплексное значение корня, при котором $a'_{00} \neq 1$. Новые строки удовлетворяют всем требованиям предыдущего случая, и мы можем их достроить до матриц A', $\widetilde{A}'$ таких, что $A'\widetilde{A}'^* = E_m$. Заменив в этих матрицах первые строки на исходные, получим требуемые матрицы A, $\widetilde{A}$. Наконец, предположим, что $a_{00}\widetilde{a}_{00} = 0$. Из (24) следует, что существует такой индекс r_0, что $a_{0r_0}\widetilde{a}_{0r_0} \neq 0$. Поменяв местами a_{0r_0} с a_{00} и $\widetilde{a}_{0r_0}$ с $\widetilde{a}_{00}$, сведем задачу к предыдущему случаю. Достроив новые строки до взаимно-обратных матриц и поменяв в этих матрицах столбцы с номерами 0 и r_0, получим требуемые матрицы A, $\widetilde{A}$.

Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in D(M^{*j})$. Как и выше, s_k, $k = 0, \dots, m-1$ — перенумерованные элементы множества $D(M^*)$. Положим $a_{0k} = \mu^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}/\sqrt{m}$, $\widetilde{a}_{0k} = \widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}/\sqrt{m}$, $k = 0, \dots, m-1$. По следствию 17 эти числа удовлетворяют условию (24), поэтому мы можем достроить эти строки до матриц A, $\widetilde{A}$, удовлетворяющих условию (27). Положим $\alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} = \sqrt{m}a_{\nu k}$, $\widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} = \sqrt{m}\widetilde{a}_{\nu k}$. Из (27) следует, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} \overline{\widetilde{\mu}^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \widetilde{\alpha}^{\nu,j}_{n+M^{*j}s_k} \overline{\mu^{j+1}_{n+M^{*j}s_k}} = 0, \qquad \nu = 1, \dots, m-1, \tag{28}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{l,j}_{n+M^{*j}s_k} \overline{\widetilde{\alpha}^{p,j}_{n+M^{*j}s_k}} = m\delta_{\nu l} \quad l, \nu = 1, \dots, m-1. \tag{29}$$

Если n пробегает все множество $D(M^{*j})$, то по лемме 4 векторы $n + M^{*j}s_k$, $k = 0, \dots, m-1$, будут пробегать все множество $D(M^{*j+1})$, т.е. мы определили числа $\alpha_s^{\nu,j}$, $\widetilde{\alpha}_s^{\nu,j}$ для всех $s \in D(M^{*j+1})$. Распространим эти последовательности (по нижнему индексу) на $\mathbb{Z}^d$, положив $\alpha_l^{\nu,j} = \alpha_s^{\nu,j}$, $\widetilde{\alpha}_l^{\nu,j} = \widetilde{\alpha}_s^{\nu,j}$ для всех $l \equiv s \pmod{M^{*j+1}}$. Определим теперь для каждого $\nu = 1, \ldots, m-1$ всплеск-функции $\psi^{(\nu)}$, $\widetilde{\psi}^{(\nu)}$, задав их коэффициенты Фурье по формулам $\widehat{\psi}_j^{(\nu)}(l) = \alpha_s^{\nu,j}\widehat{\varphi}_{j+1}(l)$, $\widehat{\widetilde{\psi}}_j^{(\nu)}(l) = \widetilde{\alpha}_s^{\nu,j}\widehat{\widetilde{\varphi}}_{j+1}(l)$, $l \in \mathbb{Z}^d$, и пространства всплесков

$$W_j^{(\nu)} := \mathrm{span}\{S_n^j \psi_j^{(\nu)}, n \in D(M^j)\},$$

$$\widetilde{W}_j^{(\nu)} := \mathrm{span}\{S_n^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}, n \in D(M^j)\}.$$

Заметим, что ортогональные всплески можно строить по общей схеме, но это будет более громоздко.

Теорема 19. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *образуют* (p,q)*-пару с масштабирующими последовательностями соответственно* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *такими, что* $\{S_n^j \varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ *и* $\{S_k^j \widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ *— биортонормированные системы. Тогда*

1) $W_j^{(\nu)} \subset V_{j+1}$ *при* $\nu = 1, \ldots, m-1$;

2) *если* $f \in V_{j+1}$, *то* $f = f_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{m-1} f_\nu$, *где* $f_0 \in V_j$, $f_\nu \in W_j^{(\nu)}$;

3) $W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j^{(\nu)} \perp V_j$ *при* $\nu = 1, \ldots, m-1$;

4) $W_j^{(\nu)} \perp \widetilde{W}_j^{(\kappa)}$, $\nu \neq \kappa$, $\nu,\ \kappa = 1, \ldots, m-1$;

5) $(S_n^j \psi_j^{(\nu)},\ S_k^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}) = \delta_{nk}$ *при* $\nu = 1, \ldots, m-1$ *и* $n,\ k \in D(M^j)$.

Доказательство. При фиксированных n и j из (15) имеем

$$\omega_n^j \varphi_j(x) = \sum_{l\in D(M^*)} \mu_{n+M^{*j}l}^{j+1} \omega_{n+M^{*j}l}^{j+1} \varphi_{j+1}(x). \tag{30}$$

Аналогично

$$\omega_n^j \psi_j^{(\nu)}(x) = \sum_{l\in D(M^*)} \alpha_{n+M^{*j}l}^{\nu,j} \omega_{n+M^{*j}l}^{j+1} \varphi_{j+1}(x), \qquad \nu = 1, \ldots, m-1. \tag{31}$$

Рассмотрим равенства (30), (31) как систему m уравнений относительно m неизвестных $\{\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1} \varphi_{j+1}\}$, $l \in D(M^*)$. По построению чисел $\{a_{\nu k}\}$ матрица этой системы имеет обратную, а значит, ее определитель не равен нулю. Поэтому неизвестные $\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1} \varphi_{j+1}$ могут быть выражены через $\omega_n^j \varphi_j \in V_j$ и

$\omega_n^j\psi_j^{(\nu)} \in W_j^{(\nu)}$, что влечет 1. С другой стороны, аналогично равенству (13) имеем

$$S_r^j\psi_j^{(\nu)} = \sum_{n\in D(M^{*j})} e^{2\pi i(M^{*-j}n,r)}\omega_n^j\psi_j^{(\nu)}, \qquad \nu = 1,\dots,m-1.$$

Принимая во внимание следствие 3, видим, что каждую функцию $\omega_n^j\psi_j^{(\nu)}$ можно выразить через $S_r^j\psi_j^{(\nu)}$, $r \in D(M^j)$. Для доказательства утверждения 2 осталось отметить, что $\{\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}\}$ — базис пространства V_{j+1}. Кроме того, поскольку функции $\omega_n^j\psi_j^{(\nu)}$, $n \in D((M^{*j})$, линейно-независимы, из этих рассуждений и свойства MR3 определения 5 следует, что $\dim W_j^{(\nu)} = m^j$, т.е. обе системы $\{\omega_n^j\psi_j^{(\nu)}\}_{n\in D(M^{*j})}$ и $\{S_r^j\psi_j^{(\nu)}\}_{r\in D(M^j)}$ являются базисами в $W_j^{(\nu)}$. Для доказательства утверждения 3 достаточно проверить, что базисные функции пространства $\widetilde{V}_j$ ортогональны базисным функциям пространств $W_j^{(\nu)}$, $\nu = 1,\dots,m-1$. Используя равенство (28) и предложение 16, находим

$$\begin{aligned}
&\langle \omega_n^j\psi_j^{(\nu)}, \omega_k^j\widetilde{\varphi}_j \rangle \\
&= \left\langle \sum_{l\in D(M^*)} \alpha_{n+M^{*j}l}^{\nu,j}\omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}, \sum_{k\in D(M^*)} \widetilde{\mu}_{n+M^{*j}k}^{j+1}\omega_{n+M^{*j}k}^{j+1}\widetilde{\varphi}_{j+1} \right\rangle \\
&= \sum_{l\in D(M^*)} \alpha_{n+M^{*j}l}^{\nu,j}\overline{\widetilde{\mu}_{n+M^{*j}l}^{j+1}}\langle \omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\varphi_{j+1}, \omega_{n+M^{*j}l}^{j+1}\widetilde{\varphi}_{j+1} \rangle \\
&= m^{-j-1} \sum_{l\in D(M^*)} \alpha_{n+M^{*j}l}^{\nu,j}\overline{\widetilde{\mu}_{n+M^{*j}l}^{j+1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Аналогично на основании равенства (29) получаем

$$\langle \omega_n^j\psi_j^{(\nu)}, \omega_n^j\widetilde{\psi}_j^{(\kappa)} \rangle = m^{-j-1} \sum_{l\in D(M^*)} \alpha_{n+M^{*j}l}^{\nu,j}\overline{\widetilde{\alpha}_{n+M^{*j}l}^{\kappa,j}} = m^{-j}\delta_{\nu\kappa}.$$

Отсюда сразу следует утверждение 4 и, принимая во внимание предложение 16, получаем утверждение 5. •

§5. Всплески Котельникова–Шеннона

Построим пример ПКМА в $L^2(\mathbb{T}^2)$ с масштабирующей последовательностью, состоящей из тригонометрических полиномов с минимально возможными симметричными спектрами. Одномерным аналогом является ПКМА Котельникова–Шеннона, для которого последовательность ядер Дирихле является масштабирующей, а функция (18) — порождающей. Разложения по одномерной системе Котельникова–Шеннона впервые были использованы для передачи непрерывных сообщений по каналу связи.

В качестве коэффициента растяжения возьмем матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Отметим, что $m = 4$, $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{*-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, и зафиксируем множество $D(M^*)$, состоящее из векторов $s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Пусть Ω_j обозначает параллелограмм $M^{*j}[-1,1]^2$, из которого исключены вершины. Положим $a_j := M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_j := M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, и определим функции φ_j, задав их коэффициенты Фурье: $\widehat{\varphi}_0(k) := \delta_{k0}$ для всех $k \in \mathbb{Z}^2$, для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $k \in \mathbb{Z}^2$

$$\widehat{\varphi}_j(k) := \begin{cases} 2^{-j}, & k \in \Omega_{j-1} \setminus \{a_{j-1}, b_{j-1}\}, \\ 2^{-j-1/2}, & k = a_{j-1} \text{ или } k = b_{j-1}, \\ 0, & k \notin \Omega_{j-1} \end{cases} \tag{32}$$

Чтобы показать, что эта последовательность является масштабирующей, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 20. *Количество целых точек в Ω_j равно $4^{j+1}+1$, и все целые точки из Ω_j, за исключением точки a_j, принадлежат разным классам смежности матрицы M^{*j+1}, а точка a_j сравнима с b_j по модулю M^{*j+1}.*

Доказательство. Покажем сначала, что на средних линиях параллелограмма Ω_j нет целых точек, за исключением граничных точек и нуля. Средние линии — это отрезки, соединяющие точку $M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ с $M^{*j}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и точку $M^{*j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ с $M^{*j}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Эти отрезки проходят через начало координат и симметричны относительно него, поэтому достаточно доказать утверждение для половин отрезков. Проведем рассуждения для одного полуотрезка (для второго аналогично), т.е. покажем, что на интервале $\left(0,\ M^{*j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ нет целых точек. Положим $\begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} := M^{*j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^*\begin{pmatrix} x_{j-1} \\ y_{j-1} \end{pmatrix}$. Для всех $j > 0$ первая координата этого вектора будет четной, а вторая — нечетной, значит, у x_j и y_j не может быть общих делителей, кратных 2. Из формул

$$x_{j-1} = \frac{x_j - 2y_j}{4}, \qquad y_{j-1} = \frac{x_j + 2y_j}{4}$$

видно, что если бы x_j и y_j имели общий делитель, не кратный 2, то x_{j-1} и y_{j-1} имели бы тот же общий делитель. Но $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$ не имеют общих делителей, значит, по индукции, общих делителей нет и у x_j и y_j для любого $j \in \mathbb{Z}_+$. Зафиксируем j и запишем отрезок $\left(\mathbf{0},\ M^{*j}\binom{1}{0}\right)$ в параметрической форме: $\begin{cases} x=tx_j \\ y=ty_j \end{cases}$, где $t \in (0,1)$. Предположим, что существует целая точка $(x^0,\ y^0)$, принадлежащая этому отрезку, т.е. существует число $t^0 \in (0,1)$ такое, что $x^0 = t^0 x_j,\ \ y^0 = t^0 y_j$, причем $x^0,\ y^0,\ x_j,\ y_j \in \mathbb{Z}$. Значит, t^0 не может быть иррациональным числом. Но рациональным t^0 тоже не может быть, так как если предположить, что $t^0 = p/q$, то x_j и y_j делятся на q, т.е. у них есть общий делитель, что невозможно.

Отметим, что множество целых точек, попавших в $M^{*j}\mathbb{T}^2$, можно взять в качестве $D(M^{*j})$, так как для любых двух элементов из $M^{*j}\mathbb{T}^2 \cap \mathbb{Z}^2$, их разность $M^{*j}r_1 - M^{*j}r_2$, где $r_1,\ \ r_2 \in \mathbb{T}^2$, может быть сравнима с нулем по модулю M^{*j}, только если r_1 и r_2 совпадают. А количество целых векторов, попавших в $M^{*j}\mathbb{T}^2$, равно m^j, т.е. их столько, сколько и в множестве $D(M^{*j})$. Но на средних линиях Ω_j нет целых точек, за исключением граничных и нуля; значит, число целых точек в Ω_j складывается из целых внутренних точек множества $M^{*j}\mathbb{T}^2$ (а их 4^j-1, так как из множества $M^{*j}[0,1)^2$ исключена одна цифра, соответствующая нулевому классу смежности), взятых по 4 раза, нуля и граничных точек. Количество граничных точек равно 4, потому что границы средних линий целые, вершины не входят в Ω_j, а других целых точек на границе нет, так как каждое ребро получается из соответствующей средней линии сдвигом на целый вектор. Таким образом, количество целых точек, попавших в Ω_j, равно $4(4^j-1)+1+4 = 4^{j+1}+1$.

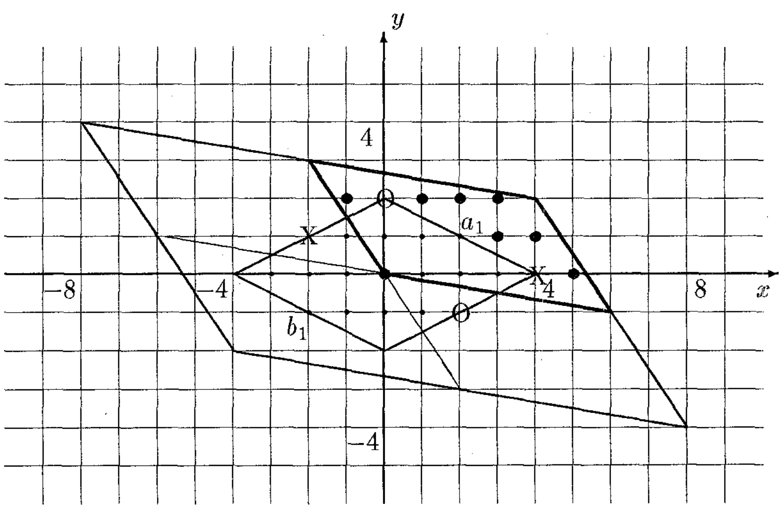

Рис. 1. Внутренний параллелограмм соответствует Ω_1, внешний — Ω_2.

Проверим, что все точки из Ω_j, кроме a_j, принадлежат разным классам смежности матрицы M^{*j+1}, и $a_j \equiv b_j \pmod{M^{*j+1}}$. По лемме 1 множество $\bigcup\limits_{k=0}^{3}\left(M^{*-1}[0,1)^2 + M^{*-1}s_k\right)$ сравнимо с $[0,1)^2$ по модулю $\mathbb{Z}^2$. Но поскольку

$$\bigcup_{k=0}^{3}(M^{*-1}[0,1)^2 + M^{*-1}s_k) = \bigcup_{k=0}^{3}\left(M^{*-1}([0,1)^2 + s_k)\right) = M^{*-1}[-1,1)^2,$$

получаем, что $M^{*-1}[-1,1)^2$ сравнимо с $[0,1)^2$ по модулю $\mathbb{Z}^2$. Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$, и подействуем на каждое множество оператором M^{*j+1}. Таким образом, множество $M^{*j}[-1,1)^2$ сравнимо с множеством $M^{*j+1}[0,1)^2$ по модулю M^{*j+1}. Из того, что в множестве $M^{*j+1}[0,1)^2$ все целые точки принадлежат разным классам смежности матрицы M^{*j+1}, следует, что все целые точки из $M^{*j}[-1,1)^2$ также принадлежат разным классам смежности матрицы M^{*j+1}.

На рис. 1 изображены следующие области: $M^*[-1,1]^2$ — внутренний параллелограмм, $M^{*2}[-1,1]^2$ — внешний, выделенный параллелограмм — множество $M^{*2}[0,1]^2$. Целые точки из множества Ω_1 выделены нежирно, а жирно выделены точки из множества $M^{*2}[0,1]^2$, которые не попали в Ω_1, т.е. для которых существуют точки из $M^{*1}[-1,1]^2$, сравнимые с ними по модулю M^{*2}. Разбивая, как показано на рисунке, большой параллелограмм на 4 маленьких и накладывая каждый из них на правый верхний, получим, что те точки, которые совпадут при таком перемещении, и будут сравнимы между собой по модулю M^{*4}. Видно, что точки a_3 и b_3 сравнимы между собой по модулю M^{*4}, а также соответственно сравнимы точки, обозначенные крестиками и ноликами. Множество целых точек, попавших в $M^{*j}[-1,1)^2$, отличается от множества целых точек из Ω_j тем, что в Ω_j нет точки $M^{*j}\binom{-1}{-1}$, но есть точки $M^{*j}\binom{1}{0}$ и $a_j = M^{*j}\binom{0}{1}$. Осталось заметить, что $M^{*j}\binom{-1}{-1} \equiv M^{*j}\binom{1}{0}$ $\pmod{M^{*j+1}}$. и $a_j \equiv b_j \pmod{M^{*j+1}}$. •

Проверим, что последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, определенная в (32), удовлетворяет условиям теоремы 7. Пункт Ф1 следует из определения, Ф2 — из леммы 20, Ф3 — из того, что модуль собственных чисел матрицы M равен 2, значит, оператор, соответствующий этой матрице, при многократном действии осуществляет растяжение по всем направлениям (см. Введение). Для того чтобы проверить Ф4, найдем коэффициенты μ_k^j из условия $\widehat{\varphi}_j(k) = \mu_k^{j+1}\widehat{\varphi}_{j+1}(k)$. Отметим, что Ω_j строго содержится в Ω_{j+1} для любого $j \in \mathbb{Z}_+$, причем все точки границы области Ω_j являются внутренними для Ω_{j+1}. Для $j = 0$ вложение очевидно, а далее, применив оператор M^{*j} к $\Omega_0 \subset \Omega_1$, воспользуемся тем, что отображение M^{*j} невырожденное, и значит, сохраняется характер вложения.

Взяв в качестве $D(M^{*j+1})$ все целые точки из Ω_j, кроме точки a_j, для $k \in D(M^{*j+1})$ имеем $\mu_k^{j+1} = 2$, если $k \in \Omega_{j-1} \setminus \{a_{j-1}, b_{j-1}\}$; $\mu_k^{j+1} = \sqrt{2}$, если $k = a_{j-1}$ или $k = b_{j-1}$; $\mu_k^{j+1} = 0$, если $k \notin \Omega_{j-1}$. Нетрудно видеть, что M^{*j+1}-периодическое продолжение последовательности μ_k^{j+1} по нижнему индексу является последовательностью, удовлетворяющей условию Ф4. В качестве чисел γ_k^j из условия Ф5 теоремы 7 возьмем $\gamma_k^j = 1/2$. Ясно, что $\gamma_k^j \widehat{\varphi}_j(n) = \widehat{\varphi}_{j+1}(M^* n)$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}^2$ и $n \equiv k \pmod{M^{*j}}$. Таким образом, последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ удовлетворяет всем пунктам теоремы 7, значит, эта последовательность является масштабирующей, причем функции φ_j являются тригонометрическими полиномами с минимально возможными симметричными спектрами. Далее, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \|\omega_r^j \varphi_j\|^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}_j(M^{*j} l + r)|^2 \\ &= 4^{-j}, \end{aligned} \tag{33}$$

а значит, по предложению 16 системы функций $\{S_n^j \varphi\}_{n \in D(M^j)}$ ортонормированные.

Теперь перейдем к определению последовательности всплесков. Зафиксируем $j \in \mathbb{Z}_+$ и множество цифр $D(M^{*j})$, совпадающее с множеством $\Omega_{j-1} \setminus \{a_{j-1}\}$. Как и выше, множество $D(M^*)$ состоит из s_0, s_1, s_2 и s_3. Пусть $n \in D(M^{*j})$. Если $n \neq b_{j-1}$, то $\mu_{n+M^{*j}s_0}^{j+1} = 2$, а $\mu_{n+M^{*j}s_k}^{j+1} = 0$ для $k = 1, 2, 3$, так как векторы $n + M^{*j} s_k$ не содержатся в Ω_{j-1} и, более того, не сравнимы ни с одной целой точкой из Ω_{j-1} по модулю M^{*j+1}. Соответствующая унитарная матрица размера 4×4 будет диагональной с двойками на диагонали. Если $n = b_{j-1}$, то $\mu_{n+M^{*j}s_k}^{j+1} = \sqrt{2}$ при $k = 0$ и $k = 3$ (вектор $b_{j-1} + M^{*j} s_3$ сравним с a_{j-1} по модулю M^{*j+1}, что проверяется непосредственно), и $\mu_{n+M^{*j}s_k}^{j+1} = 0$ при $k = 1$ и $k = 2$, так как векторы $n + M^{*j} s_k$, $k = 1, 2$, не содержатся в Ω_{j-1} и не сравнимы ни с одной целой точкой из Ω_{j-1} по модулю M^{*j+1}. Соответствующая унитарная матрица будет следующей:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

По лемме 4 векторы вида $n + M^{*j}s_k$, где $s_k \in D(M^*)$, а $n \in D(M^{*j})$, пробегают множество $D(M^{*j+1})$, поэтому достаточно определить коэффициенты Фурье всплеск-функций для всех целых векторов l, сравнимых с векторами вида $n + M^{*j}s_k$ по модулю M^{*j+1}:

$$\widehat{\psi}_j^{(1)}(l) := \begin{cases} 2^{-j}, & l \equiv n + M^{*j}s_1 \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad n \in D(M^{*j}), \\ & \quad l \in \Omega_j \backslash \{a_j, b_j\}; \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv n + M^{*j}s_1 \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad n \in D(M^{*j}),\ l = a_j,\ l = b_j; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{34}$$

$$\widehat{\psi}_j^{(2)}(l) := \begin{cases} 2^{-j}, & l \equiv n + M^{*j}s_2 \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad n \in D(M^{*j}), \\ & \quad l \in \Omega_j \backslash \{a_j, b_j\}; \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv n + M^{*j}s_2 \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad n \in D(M^{*j}),\ l = a_j,\ l = b_j; \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \tag{35}$$

$$\widehat{\psi}_j^{(3)}(l) := \begin{cases} 2^{-j}, & l \equiv n + M^{*j}s_3 \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad n \in D(M^{*j}),\ n \neq b_{j-1}, \\ & \quad l \in \Omega_j \backslash \{a_j, b_j\}; \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv n + M^{*j}s_3 \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad n \in D(M^{*j}),\ n \neq b_{j-1},\ l = a_j,\ l = b_j; \\ 2^{-j-1/2}, & l \equiv b_{j-1} \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad l \in \Omega_j \backslash \{a_j, b_j\}; \\ -2^{-j-1/2}, & l \equiv a_{j-1} \pmod{M^{*j+1}}, \\ & \quad l \in \Omega_j \backslash \{a_j, b_j\} \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{36}$$

На рис. 2 изображены области: Ω_2 — большой параллелограмм, сдвинутая на M^*s_1 область Ω_1 — малый параллелограмм. Весь спектр функции $\psi^{(1)}$ заключен в трех выделенных областях внутри большого параллелограмма, которые представляют собой множество, сравнимое с малым параллелограммом по модулю M^{*2}. Аналогично на рис. 3 и 4 соответственно изображены спектры функций $\psi^{(2)}$ и $\psi^{(3)}$.

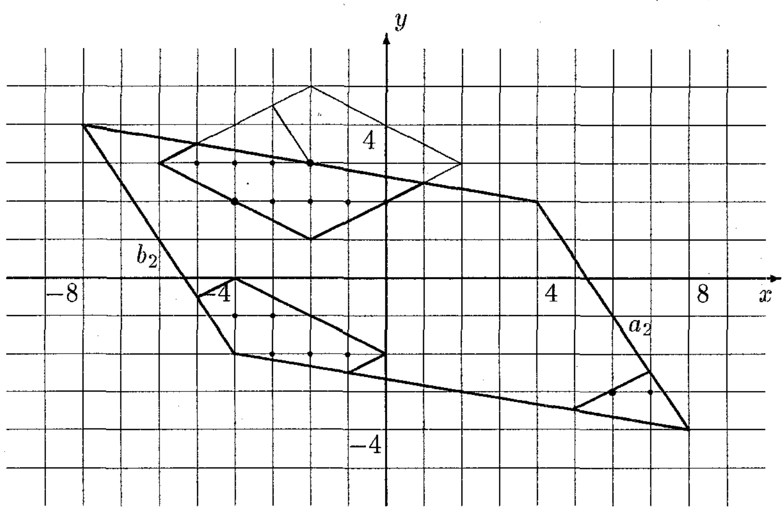

Рис. 2. *Точками* обозначен спектр функции $\psi_2^{(1)}$, причем во всех выделенных точках значение $\hat{\psi}_2^{(1)}$ равно 2^{-2}.

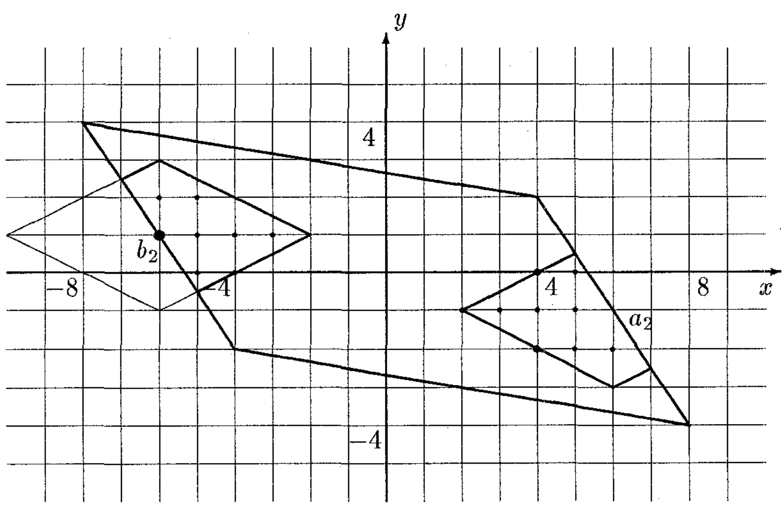

Рис. 3. *Точками* обозначен спектр функции $\psi_2^{(2)}$, причем во всех выделенных точках, кроме точки $b_2 = (-6, 1)$, значение $\hat{\psi}_2^{(2)}$ равно 2^{-2}, а $\hat{\psi}_2^{(2)}(b_2) = 2^{-5/2}$.

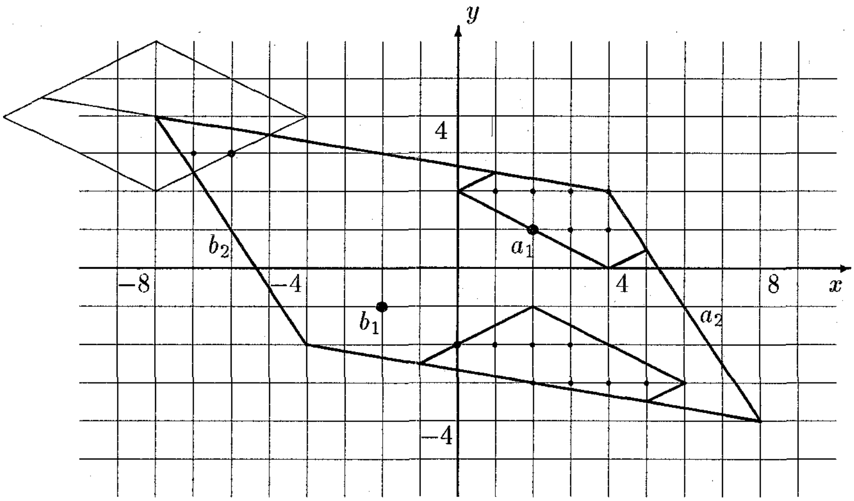

Рис. 4. *Точками* обозначен спектр функции $\psi_2^{(3)}$, причем во всех выделенных точках, кроме точек $a_1 = (2,1)$ и $b_1 = (-2,-1)$, значение $\hat{\psi}_2^{(3)}$ равно 2^{-2}, а $\hat{\psi}_2^{(3)}(a_1) = -2^{-5/2}$ и $\hat{\psi}_2^{(3)}(b_1) = 2^{-5/2}$.

§6. Разложение функций по системам всплесков

Зафиксируем (p,q)-пару, удовлетворяющую условиям теоремы 19. Тогда по этой теореме системы всплеск-функций

$$\{S_r^j \psi_j^{(\nu)},\ j \in \mathbb{Z}_+,\ r \in D(M^j), \nu = 1,\dots,m-1\},$$
$$\{S_r^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)},\ j \in \mathbb{Z}_+,\ r \in D(M^j), \nu = 1,\dots,m-1\}$$

являются биортонормированными. Для функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ мы можем рассматривать разложения в соответствующий ряд Фурье

$$\langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r \in D(M^j)} \langle f, S_r^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)} \rangle S_r^j \psi_j^{(\nu)}. \tag{37}$$

Перенумеровав произвольным образом множества цифр $D(M^j) = \{r_l\}_{l=0}^{m^j-1}$, обозначим частичные суммы этого ряда через $s_n(f)$ и будем понимать под сходимостью ряда сходимость последовательности $s_n(f)$.

Теорема 21. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *образуют* $(\infty, 1)$*-пару с масштабирующими последовательностями* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *такими, что* $\{S_n^j\varphi_j\}_{n\in D(M^j)}$ *и* $\{S_k^j\widetilde{\varphi}_j\}_{n\in D(M^j)}$ *— биортонормированные системы, и пусть* $\{\psi_j^{(\nu)}\}_{j=0}^{\infty}, \{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j=0}^{\infty}$, $\nu = 1, \dots, m-1$, *— соответствующие последовательности всплеск-функций. Если*

$$\sup_j \|\widetilde{\varphi}_j\|_1, \quad \sup_{j,\nu} \|\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\|_1 < \infty, \tag{38}$$

и существует монотонно убывающая на $[0, \infty)$ *функция* K *такая, что*

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(|x|)\, dx < \infty \tag{39}$$

и

$$|\varphi_j(x)|, |\psi_j^{(\nu)}(x)| \leqslant K(|M^j x|) \tag{40}$$

для всех $x \in \mathbb{T}^d$, *то для каждой функции* $f \in C(\mathbb{T}^d)$ *ряд* (37) *равномерно сходится к* f *и для каждой функции* $g \in L(\mathbb{T}^d)$ *ряд*

$$\langle f, \varphi_0 \rangle \widetilde{\varphi}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in D(M^j)} \langle f, S_r^j \psi_j^{(\nu)} \rangle S_r^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)} \tag{41}$$

сходится к g *по норме в* $L(\mathbb{T}^d)$.

Доказательство. Пусть $N = \kappa m^j + n$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $\kappa = 1, \dots, m-2$, $n = 0, \dots, m^j - 1$, тогда частичная сумма $s_N(f, x)$ ряда (37) представима в виде

$$\begin{aligned} s_N(f) &= \langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{r\in D(M^i)} \langle f, S_r^i \widetilde{\psi}_i^{(\nu)} \rangle S_r^i \psi_i^{(\nu)} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\kappa} \sum_{r\in D(M^j)} \langle f, S_r^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)} \rangle S_r^j \psi_j^{(\nu)} + \sum_{l=0}^{n} \langle f, S_{r_l}^j \widetilde{\psi}_j^{\kappa+1} \rangle S_{r_l}^j \psi_j^{\kappa+1} \\ &= s_N^{(0)}(f) + \sum_{\nu=1}^{\kappa} s_N^{(\nu)}(f) + s_N^{(\kappa+1)}(f). \end{aligned} \tag{42}$$

Поскольку s_N^1 — проекционный оператор на пространство V_j, сумму $s_N^{(0)}(f)$ в правой части можно переразложить по сдвигам функции φ_j:

$$s_N^{(0)}(f) = \sum_{r\in D(M^j)} \langle f, S_r^j \widetilde{\varphi}_j \rangle S_r^j \varphi_j. \tag{43}$$

Используя (38), получаем

$$
\begin{aligned}
|s_N^{(0)}(f,x)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) \sum_{l=0}^{m^j-1} \widetilde{\varphi}_j(t+M^{-j}r_l)\varphi_j(x+M^{-j}r_l)\,dt \right| \\
&\leqslant \|f\|_\infty \|\widetilde{\varphi}_j\|_1 \sum_{l=0}^{m^j-1} |\varphi_j(x+M^{-j}r_l)|.
\end{aligned}
$$

Положим

$$
g_j(t) = \begin{cases} \varphi_j(M^{-j}t), & t \in M^j\mathbb{T}^d, \\ 0, & t \notin M^j\mathbb{T}^d. \end{cases}
$$

Ясно, что

$$
|g_j(x)| \leqslant K(|x|) \tag{44}
$$

и

$$
\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} g_j(M^jx + M^jk) \tag{45}
$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$. Соотношения (44), (45) дают

$$
\sum_{l=0}^{m^j-1} |\varphi_j(x+M^{-j}r_l)| \leqslant \sum_{l=0}^{m^j-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} K(|M^jx + M^jk + r_l|) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} K(|M^jx+k|).
$$

Из монотонности K и формулы (39) следует равномерная ограниченность этой суммы. Таким образом, доказано, что при $\nu = 0$ операторы $s_N^{(\nu)}$, действующие из $C(\mathbb{T}^d)$ в $C(\mathbb{T}^d)$, равномерно ограничены по норме. Аналогично доказывается равномерная ограниченность операторов $s_N^{(\nu)}$ для $\nu = 1, \ldots, m-1$. Следовательно,

$$
\|s_N(f)\| \leqslant C, \tag{46}
$$

где C — абсолютная постоянная.

Зададим $\epsilon > 0$. По свойству MR2 определения 5 существует функция $F \in V_{j_0}$ такая, что

$$
\|f - F\|_\infty < \epsilon.
$$

На основании теоремы 19 $s_N(F) = F$ для $N \geqslant m^{j_0}$. Следовательно, по (46) мы имеем

$$|f - s_N(f)| = |f - F - s_N(f - F)| \leqslant (C+1)\|f - F\| \leqslant (C+1)\epsilon.$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично, при этом в оценках сумм $s_N^{(\nu)}(f)$ функции φ_j, $\psi_j^{(\nu)}$ и переменная x соответственно меняются ролями с функциями $\widetilde{\varphi}_j$, $\widetilde{\psi}_j$ и переменной t. •

Теорема 22. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ *образуют* (p,q)-*пару с масштабирующими последовательностями* $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ *такими, что* $\{S_n^j \varphi_j\}_{n \in D(M^j)}$ *и* $\{S_k^j \widetilde{\varphi}_j\}_{n \in D(M^j)}$ — *биортонормированные системы, и пусть* $\{\psi_j^{(\nu)}\}_{j=0}^\infty$, $\{\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}\}_{j=0}^\infty$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, — *соответствующие последовательности всплеск-функций. Если существует монотонно убывающая на* $[0,\infty)$ *функция* K, *удовлетворяющая неравенству* (39), *и такая, что*

$$|\varphi_j(x)|,\ |\psi_j^{(\nu)}(x)|,\ |m^{-j}\widetilde{\varphi}_j(x)|,\ |m^{-j}\widetilde{\psi}_j^{(\nu)}(x)| \leqslant K(|M^j x|) \tag{47}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^d$, *то для каждой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ *ряд (37) сходится к* f *в каждой ее точке Лебега.*

Лемма 23 [20, лемма 2.7]. *Пусть* K — *неотрицательная монотонно убывающая на* $[0,\infty)$ *функция, удовлетворяющая неравенству* (39), *тогда существует такая постоянная* C, *зависящая только от размерности пространства* d, *что*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} K(|x+k|)K(|y+k|) \leqslant CK\left(\frac{|x-y|}{5}\right) \tag{48}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство теоремы 22. Пусть x — точка Лебега функции f, $N = \kappa m^j + n$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $\kappa = 1, \ldots, m-2$, $n = 0, \ldots, m^j - 1$. Поскольку пространство V_0 состоит только из констант, $s_N(h,x) = h$ для всех $h \equiv \mathrm{const}$. Отсюда, используя (42), (43), получаем

$$\begin{aligned}
&f(x) - s_N(f,x) \\
&\quad = \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f(x) - f(x+t)) \sum_{r\in D(M^j)} S_r^j \widetilde{\varphi}_j(x+t)\,\rangle\, S_r^j \varphi_j(x)\,dt \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{\kappa} \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f(x) - f(x+t)) \sum_{r\in D(M^j)} S_r^j \widetilde{\psi}_j^{(\nu)}(x+t) S_r^j \psi_j^{(\nu)}(x)\,dt \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f(x) - f(x+t)) \sum_{l=0}^{n} S_{r_l}^j \widetilde{\psi}_j^{\kappa+1}(x+t) S_{r_l}^j \psi_j^{\kappa+1}(x)\,dt \\
&\quad = I_0 + \sum_{\nu=1}^{\kappa} I_\nu + I_{\kappa+1}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Применяя (45), (44) и аналогичные соотношения для $\widetilde{\varphi}_j$, получаем

$$\begin{aligned}
I_0 &\leqslant m^j \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x) - f(x+t)| \\
&\qquad \times \sum_{r\in D(M^j)} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} K\left(M^j(x+t) + M^j\ell + r\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} K\left(M^j x + M^j k + r\right)\,dt \\
&= m^j \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x+t)| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} K(M^j(x+t) + k) K\left(M^j x + k\right)\,dt.
\end{aligned}$$

Из леммы 23 вытекает оценка

$$I_0 \leqslant C m^j \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x+t)| K\left(\frac{M^j t}{5}\right)\,dt.$$

Отсюда и из незначительной модификации теоремы 1.8 в [25] следует, что $I_0 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для $\nu = 1, \dots, m-1$ соотношение $I_2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ доказываются аналогично. Сопоставляя эти соотношения с (49), приходим к равенству

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f,x) = f(x). \quad \bullet$$

Список литературы

[1] Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., vol. 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[2] Mallat S., *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(R)$, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 69–87.

[3] Meyer Y., *Ondelettes et opérateurs.* I. *Ondelettes*, Herman, Paris, 1990.

[4] de Boor C., DeVore R., Ron A., *On the construction of multivariate (pre) wavelets*, Constr. Approx. **9** (1993), 123–166.

[5] Jia R. Q., Micchelli C. A., *Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets.* II. *Powers of two*, Curves and Surfaces (Chamonix-Mont-Blanc, 1990) (P. J. Laurent, A. Le Mhauté and L. L. Schumaker, eds.), Academic Press, Boston, MA, 1991, pp. 209–246.

[6] Jia R. Q., Micchelli C. A., *Using the refinement equation for the construction of pre-wavelets.* V. *Extensibility of trigonometric polynomials*, Computing **48** (1992), no. 1, 61–72.

[7] Riemenschneider S. D., Shen Z. W., *Box splines, cardinal series and wavelets*, Approximation Theory and Functional Analysis (College Station, TX, 1990) (C. K. Chui, ed.), Academic Press, Boston, MA, 1991, pp. 133–149.

[8] Riemenschneider S. D., Shen Z. W., *Wavelets and pre-wavelets in low dimensions*, J. Approx. Theory **71** (1992), no. 1, 18–38.

[9] Riemenschneider S. D., Shen Z. W., *Construction of compactly supported biorthogonal wavelets in* $L_2(\mathbb{R}^s)$, Preprint, 1997.

[10] Ji H., Riemenschneider S. D., Shen Z. W., *Multivariate compactly supported fundamental refinable functions and biorthogonal wavelets*, Preprint.

[11] Jia R. Q., Shen Z., *Multiresolution and wavelets*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **37** (1994), no. 2, 271–300.

[12] Chui C. K., Mhaskar H. N., *On trigonometric wavelets*, Constr. Approx. **9** (1993), no. 2–3, 167–190.

[13] Chui C. K., Wang J., *A general framework of compactly supported splines and wavelets*, J. Approx. Theory **71** (1992), no. 3, 263–304.

[14] Zheludev V. A., *Periodic splines and wavelets*, Mathematical Analysis, Wavelets, and Signal Processing (Cairo, 1994), Contemp. Math., vol. 190, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 339–354.

[15] Петухов А. П., *Периодические всплески*, Мат. сб. **188** (1997), №10, 69–94.

[16] Goh S. S., Lee S. L., Shen Z., Tang W. S., *Construction of Schauder decomposition on Banach spaces of periodic functions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **41** (1998), no. 1, 61–91.

[17] Садовничий В. А., *Теория операторов*, Высш. шк., М., 1999.

[18] Wojtaszczyk P., *A mathematical introduction to wavelets*, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[19] Skopina M., *Multiresolution analysis of periodic functions*, East J. Approx. **3** (1997), no. 2, 203–224.

[20] Kelly S. E., Kon M. A., Raphael L. A., *Local convergence for wavelet expansions*, Preprint.

[21] Максименко И. Е., *Биортогональность масштабирующих функций многих переменных*, Современные проблемы теории аппроксимации, 2002 (в печати).

[22] Максименко И. Е., *Достаточные условия биортогональности масштабирующих функций многих переменных*, Optimization of Finite Element Approximations, Splines and Wavelets (2nd Internat. Conf. OFEA'2001, St. Petersburg, Russia, 2001). Vol. 2, S.-Peterburg Univ., St. Petersburg, 2002, pp. 80–91.

[23] Зигмунд А., *Тригонометрические ряды.* Т. 2, Мир, М., 1965.

[24] Petukhov A., *Trigonometric rational wavelet bases*, Self-Similar Systems (Internat. Workshop July 30 - August 7, 1998, Dubna, Russia), JINR, Dubna, 1999, pp. 116-119 (JINR, E5-99-38).

[25] Стейн И., Вейс. Г., *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

С.-Петербургский государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Университетский пр., 28
E-mail: irene@ir4558.spb.edu

Поступило 10 июля 2002 г.

С.-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики–процессов управления
E-mail: skopina@sk.usr.lgu.spb.su