П. В. Дегтярь, Асимптотическое поведение характеристической функции голоморфного отображения,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 717–726

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

П. В. Дегтярь

Характеристическая функция голоморфного отображения определяется по формуле

$$T_f(r)=\int_0^r \frac{dt}{t}\int_{B_t} dd^c \ln(1+|f(z)|^2)\wedge\omega_0^{m-1}, \qquad (1)$$

где $d=\partial+\bar\partial$ и $d^c=\frac{1}{4\pi i}(\partial-\bar\partial)$ — операторы дифференцирования, форма $\omega_0=dd^c\ln|z|$ и $B_t=\{z\in\mathbf{C}^m: |z|\leqslant t\}$ — шар с центром в точке 0 радиуса t; $|z|$, $|f(z)|$ — евклидовы модули соответственно в $\mathbf{C}^m$ и $\mathbf{C}^n$ (см. [1, стр. 388]).

В работе [2] Л. Альфорс доказал, что у экспоненциальной кривой f: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}^n$, определяемой для $z\in\mathbf{C}$ по формуле

$$f(z)=(e^{\lambda_1 z}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n z}), \quad \lambda_i\in\mathbf{C}, \quad i\in\overline{1, n},$$

характеристическая функция имеет следующую асимптотику:

$$T_f(r)=r\,p/(2\pi)+O(1),$$

где p — периметр выпуклой оболочки точек $(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ниже этот результат обобщается на некоторые голоморфные отображения f: $\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^n$.

Порядок ρ_f голоморфного отображения f: $\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^n$ определяется равенством

$$\rho_f=\varlimsup_{r\to\infty}\ln\ln^+ M_f(r)/r,$$

где $M_f(r) = \max\limits_{|z|\leqslant r} |f(z)|$. Типом σ_f голоморфного отображения f порядка $\rho = \rho_f$ называется число

$$\sigma_f = \overline{\lim_{r\to\infty}} \ln^+ M_f(r)/r^\rho.$$

Рост голоморфного отображения порядка $\rho = \rho_f$ по различным направлениям характеризует радиальный индикатор h_f, который определяется по формуле

$$h_f(z) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \ln|f(r\cdot z)|/r^\rho,$$

где z принадлежит сфере S_1 единичного радиуса в пространстве $\mathbf{C}^m$. Для голоморфного отображения $\hat{f} = (1, f) = (1, f_1, \ldots, f_n)$ радиальный индикатор будем обозначать через H_f.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть f: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ — голоморфное отображение порядка $\rho = \rho_f < \infty$ и типа $\sigma_f < \infty$. Тогда величина $\mu_f = \int_{S_1} H_f(z)\,\sigma$ ограничена сверху типом σ_f и*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^\rho} T_f(r) \leqslant \mu_f, \tag{2}$$

где $\sigma = d^c \ln|z| \wedge \omega_0^{m-1}$ — однородная форма объема вещественных гиперповерхностей в $\mathbf{C}^m$.

Доказательство. Форма σ определяет на единичной сфере меру, которую будем также обозначать через σ

$$\sigma(A) = \int_A \sigma, \qquad A \subset S_1.$$

Радиальный индикатор H_f, как верхний предел измеримых в смысле меры σ функций $\ln(1+|f|^2)/2r^\rho$, является измеримой функцией на сфере S_1. Легко проверяется, что $H_f(z) \leqslant \sigma_f$. Поэтому

$$\mu_f = \int_{S_1} H_f(z)\,\sigma \leqslant \sigma_f \int_{S_1} \sigma = \sigma_f.$$

Покажем теперь, что функция $\ln(1+|f|^2)/r^\rho$ ограничена сверху некоторым положительным числом M. Воспользовавшись определением типа σ_f, найдем положительное число R такое, что при всех $r \geqslant R$ выполняется неравенство $\ln M_{\hat{f}}(r)/r^\rho \leqslant \sigma_f + 1$. Искомое число $M = 2\max(M_{\hat{f}}(R),$

$\sigma_f + 1$). Поэтому из теоремы Фату следует, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \int_{S_1} \frac{\ln(1+|f(r\cdot z)|^2)}{r^\rho}\,\sigma \leqslant \int_{S_1} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln(1+|f(r\cdot z)|^2)}{r^\rho}\,\sigma = 2\int_{S_1} H_f(z)\,\sigma = 2\mu_f.$$

Применив известную формулу для характеристических функций

$$T_f(r) = \frac{1}{2}\int_{S_r} \ln(1+|f(z)|^2)\,\sigma, \tag{3}$$

получаем требуемый результат

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r^\rho} T_f(r) \leqslant \mu_f.$$

Голоморфное отображение $f\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ порядка $\rho = \rho_f$ называется отображением почти регулярного роста, если для почти всех $z \in S_1$ (в смысле меры σ) существует

$$\lim_{r\to\infty} \ln|f(r\cdot z)|/r^\rho = h_f(z).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ — голоморфное отображение порядка $\rho = \rho_f < \infty$, типа $\sigma_f < \infty$ и почти регулярного роста. Тогда*

$$T_f(r) = r^\rho \mu_f + o(r^\rho). \tag{4}$$

Доказательство. В теореме 1 было показано, что семейство функции $\ln(1+|f(r\cdot z)|^2)/r^\rho$ равномерно ограничено сверху положительным числом M. Так как все функции семейства положительны, то получаем равномерную ограниченность модулей функций

$$|\ln(1+|f(r\cdot z)|^2)|/r^\rho \leqslant M.$$

Каждая функция семейства $\ln(1+|f(r\cdot z)|^2)/r^\rho$ является измеримой функцией на сфере S_1. Поэтому можно применить теорему Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\rho}\int_{S_1} \ln(1+|f(r\cdot z)|^2)\,\sigma = \int_{S_1} \lim_{r\to\infty} \frac{\ln(1+|f(r\cdot z)|^2)}{r^\rho}\,\sigma = 2\int_{S_1} H_f(z)\,\sigma = 2\mu_f.$$

Воспользовавшись формулой (3) для характеристических функций, получаем требуемую асимптотическую формулу (4).

Для голоморфного отображения $f\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ с выпуклым радиальным индикатором h_f величине μ_f можно дать следующие геометрические интерпретации:

1) H_f как выпуклая функция является опорной функцией выпуклого множества

$$I_f = \bigcap_{\zeta \in S_1} \{z \in \mathbf{C}^m\colon \langle \zeta, z\rangle \leqslant H_f(\zeta)\},$$

где $\langle \zeta, z\rangle = \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{m} \zeta_\nu \bar{z}_\nu$. Длина проекции этого выпуклого множества I_f на действительную прямую $\{z \in \mathbf{C}^m\colon z = t\zeta,\ t \in R,\ \zeta \in S_1\}$ равна $H_f(\zeta) + H_f(-\zeta)$ и называется поперечной мерой I_f в направлении $\pm\zeta$. Величина μ_f есть средняя поперечная мера выпуклого множества L_f, т. е. усреднение поперечных мер по всем направлениям. Она совпадает с точностью до постоянного множителя со смешанным объемом по Минковскому $V_1(B_1, I_f)$ единичного шара B_1 и выпуклого множества I_f (см. [3]), а также с линейной вариацией выпуклого множества I_f (см. [4]).

2) Рассмотрим проекции выпуклого множества I_f на комплексные прямые $l_\zeta = \{z \in \mathbf{C}^m\colon z = \zeta\cdot\lambda,\ \zeta \in S_1,\ \lambda \in \mathbf{C}\}$. Обозначим их через I_ζ. Как известно (см. [3, стр. 62]), удвоенный смешанный объем по Минковскому множества I_ζ и единичного круга $U_1 = B_1 \cap l_\zeta$, равный длине μ_ζ границы ∂I_ζ, выражается формулой

$$\mu_\zeta = \int_0^{2\pi} H_\zeta(\theta)\, d\theta, \tag{5}$$

где $\theta = \arg\lambda$, $H_\zeta(\theta)$ — сужение функции $H_f(\zeta)$ на комплексную прямую l_ζ. Назовем длину μ_ζ кривой ∂I_ζ комплексной поперечной мерой выпуклого множества I_f в направлении $\pm\zeta$. По обобщенной формуле Крофтона (см. [8, следствие 3.5])

$$\mu_f = \int_{S_1} H_f(z)\,\sigma = \int_{CP^{m-1}} d\nu(l_\zeta) \int_{S_1 \cap l_\zeta} H_\zeta(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{CP^{m-1}} \mu_\zeta\, d\nu(l_\zeta), \tag{6}$$

где ν — мера на CP^{m-1}, инвариантная относительно действия унитарной группы U_m на CP^{m-1} и нормализованная так, что $\nu(CP^{m-1}) = 1$. Поэтому μ_f есть комплексная средняя поперечная мера выпуклого множества I_f, т. е.

усреднение комплексных поперечных мер μ_ζ по всем комплексным прямым l_ζ из CP^{m-1}.

Разберем отдельно случай голоморфного отображения $f=(f_1, \ldots, f_n)$ экспоненциального типа $\rho_f=1$, $0<\sigma_f<\infty$. Для такого отображения найдется по крайней мере одна координатная функция f_j экспоненциального типа $\rho_{f_j}=1$, $0<\sigma_{f_j}<\infty$. Остальные координатные функции f_i либо порядка $\rho_{f_i}=1$ и конечного типа $\sigma_{f_i}<\infty$, либо порядка $\rho_{f_i}<1$ и произвольного типа. Без ограничения общности можно считать, что первые s координатных функций f_k и только они являются функциями экспоненциального типа. Введем следующие обозначения: $\rho_k=\rho_{f_k}$, $\sigma_k=\sigma_{f_k}$, $\rho_{k\zeta}$, $\sigma_{k\zeta}$ — порядок и тип сужения функции f_k на комплексную прямую l_ζ; $V_k=\{l_\zeta \in CP^{m-1}\colon \rho_{k\zeta}<\rho_k\}$. В работе [5] отмечено, что множество V_k является полярным и поэтому имеет лебегову меру нуль. По теореме 3.2, 4 из [6] сужение $f_{k\zeta}$ функции f_k порядка ρ_f и конечного типа на комплексную прямую l_ζ для всех $l_\zeta \in CP^{m-1}$, за исключением, быть может, некоторого множества W_k нулевой Г-емкости и, следовательно, лебеговой меры нуль, имеет один и тот же тип $\sigma_{k\zeta}$ (минимальный или нормальный).

Для голоморфного отображения $f=(f_1, \ldots, f_n)$ экспоненциального типа фиксируем комплексную прямую $l_\zeta \subset CP^{m-1} \setminus E_f$, где

$$E_f=\bigcup_{k=1}^{s}(W_k \cup V_k).$$

На этой комплексной прямой сужения $f_{k\zeta}$, $k \in \overline{1, s}$, являются функциями экспоненциального типа. Для них определены сопряженные диаграммы $I_{k\zeta}$ — выпуклые оболочки множества особых точек ассоциированных функций (см. [2]). Наименьшую выпуклую оболочку объединения множеств $I_{k\zeta}$, $k \in \overline{1, s}$, и точки 0 при фиксированном ζ, $l_\zeta \in CP^{m-1} \setminus E_f$, обозначим через I_ζ.

По теореме Пойа (см. [8]) индикатор $h_{k\zeta}$ целой функции $f_{k\zeta}$ экспоненциального типа равен опорной функции $H_{k\zeta}(-\theta)$ сопряженной диаграммы $I_{k\zeta}$. Функция

$$H_\zeta(\theta)=\max_{k\in\overline{1,s}}(0, H_{k\zeta}(\theta))=\max_{k\in\overline{1,s}}(0, h_{k\zeta}(-\theta))$$

является опорной функцией выпуклого множества I_ζ.

Как упоминалось, интеграл

$$\mu_\zeta = \int_0^{2\pi} H_\zeta(\theta)\, d\theta$$

есть удвоенный смешанный объем по Минковскому множества I_ζ и единичного круга U_1 и поэтому равен длине кривой ∂I_ζ. Теперь нам понадобится следующая

ЛЕММА. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — голоморфное отображение порядка $\rho = \rho_f < \infty$ и типа $\sigma_f < \infty$, h_f — радиальный индикатор отображения f, h_i — радиальные индикаторы координатных функций f_i, $i \in \overline{1, n}$. Справедливы следующие два утверждения:*

1) *если все координатные функции f_i порядка ρ, то*

$$h_f(z) = \max_{i \in \overline{1,n}} (h_i(z));$$

2) *если первые s $(s < n)$ координатных функций f_k порядка ρ, а остальные f_j, $j \in \overline{s+1, n}$, порядка $\rho_j < \rho$, то*

$$h_f(z) = \max_{k \in \overline{1,s}} (0, h_k(z)).$$

Замечание. Из леммы вытекает следующее условие почти регулярности голоморфных отображения: для того чтобы голоморфное отображение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ порядка $\rho = \rho_f$ было почти регулярного роста, достаточно, чтобы каждая координатная функция f_k порядка ρ была почти регулярного роста.

Доказательство леммы. Зафиксируем $z \in S_1$ и положим

$$E(r \cdot z) = \ln (e^{-r^\rho h(z)} \,|\, f(r \cdot z)\,|,$$

где $h(z) = \max\limits_{i \in \overline{1,n}} (h_i(z))$ в случае 1), когда все координатные функции f_i порядка ρ, и

$$h(z) = \max_{k \in \overline{1,s}} (0, h_k(z))$$

в случае 2), когда только первые s $(s < n)$ координатные функции f_k порядка ρ.

Докажем утверждение леммы в случае 1). Без ограничения общности можно считать, что первые p радиальные индикаторы h_k в точке $z \in S_1$ принимают значение

$h(z)$, а остальные $h_j(z) < h(z)$, $j \in \overline{p+1,\ n}$. Поэтому

$$\max_{k \in \overline{1,\ p}} |f_k(r \cdot z)| = \max |f_i(r \cdot z)|, \text{ при } r \geqslant R_0.$$

При фиксированном $k \in \overline{1,\ p}$ из определения верхнего предела получаем:

а) существует последовательность $\{r_{km}\}$ такая, что

$$\lim_{m \to \infty} \ln |f_k(r_{km} z)| / r_{km}^{\rho} = h(z);$$

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число R_k, что

$$\frac{1}{r^{\rho}} \ln |f_k(r \cdot z)| \leqslant h(z) + \varepsilon \text{ при } r \geqslant R_k.$$

Обозначим $R = \max\limits_{k \in \overline{0,\ p}} R_k$. Тогда функция $E(r \cdot z)/r^{\rho}$ оценивается сверху следующим образом:

$$E(r \cdot z) \leqslant (\ln \max_{i \in \overline{1,n}} |f_i(r \cdot z)| - r^{\rho} h(z) + \ln n) =$$

$$= (\ln \max_{k \in \overline{1,\ p}} |f_k(r \cdot z)| - r^{\rho} h(z) + \ln n) \leqslant r^{\rho} \varepsilon + \ln n$$

при $r \geqslant R$. Начиная с достаточно большого номера N, функцию $E(r_{1m} \cdot z)/r_{1m}^{\rho}$ можно оценить снизу

$$E(r_{1m} \cdot z) \geqslant \ln |f_1(r_{1m} \cdot z)| - h(z) \geqslant \varepsilon \text{ при } m \geqslant N.$$

Следовательно:

а) $\lim\limits_{m \to \infty} \ln |f(r_{1m} \cdot z)| / r_{1m}^{\rho} = h(z) + \lim\limits_{m \to \infty} E(r_{1m} \cdot z)/r_{1m}^{\rho} = h(z)$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > 0$, что

$$\ln |f(r \cdot z)| / r^{\rho} - h(z) = E(r \cdot z)/r^{\rho} < \varepsilon \text{ при } r \geqslant R.$$

Отсюда

$$h_f(z) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \ln |f(r \cdot z)| / r^{\rho} = h(z) = \max_{i \in \overline{1,n}} (h_i(z)).$$

Докажем утверждение 2). Предположим сначала, что $h(z) = \max\limits_{i \in \overline{1,\ n}} (0,\ h_i(z)) = 0$. Выделим набор координатных функций f_{ik}, $k \in \overline{1,\ \varkappa}$, в который входят либо функция f_k, $k \in \overline{1,\ s}$, с индикаторами $h_k(z) = 0$, либо функции

f_j, $j \in \overline{s+1, n}$, порядка $\rho_j < \rho$. Имеем

$$\max_{k \in \overline{1, \varkappa}} |f_{i_k}(r \cdot z)| = \max_{j \in \overline{1, n}} |f_j(r \cdot z)|$$

при $r \geqslant R_0$, так как $h_j(z) < 0$, $j \in \overline{1, s}$, $j \neq i_k$, и

$$\lim_{r \to \infty} \ln |f_j(r \cdot z)| / r^\rho = 0, \quad j \in \overline{s+1, n}.$$

Поэтому

$$\ln |f(r \cdot z)| \leqslant \ln \max_{k \in \overline{1, \varkappa}} |f_{i_k}(r \cdot z)| + \ln n.$$

Кроме того,

$$\ln |f(r \cdot z)| \geqslant \ln |f_{i_1}(r \cdot z)|.$$

Из этих двух неравенств получаем требуемое равенство

$$h_f(z) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \ln |f(r \cdot z)| / r^\rho = 0.$$

Предположим теперь, что $h(z) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что радиальные индикаторы h_k первых p $(p \leqslant s)$ координатных функций f_k в точке $z \in S_1$ принимают значение $h(z)$. Так как $h_k(z) < h(z)$ при $k \in \overline{p+1, s}$ и $\lim\limits_{r \to \infty} \ln |f_j(r \cdot z)| / r^\rho = 0$ при $i \in \overline{s+1, n}$, то найдется такое положительное число R_0, что при $r \geqslant R_0$

$$\max_{k \in \overline{1, p}} |f_k(r \cdot z)| = \max_{i \in \overline{1, n}} |f_i(r \cdot z)|.$$

Проведя дальнейшее доказательство по аналогии с доказательством утверждения 1), получим окончательный результат

$$h_f(z) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \ln |f(r \cdot z)| / r^\rho = h(z) = \max_{k \in \overline{1, s}} (0, h_k(z)).$$

Лемма доказана.

Для голоморфного отображения f экспоненциального типа мы обозначим через $H_\zeta(\theta)$ опорную функцию сопряженной диаграммы I_ζ, лежащей на комплексной прямой $l_\zeta \in \mathbb{C}P^{m-1} \setminus E_f$. Она является сужением на комплексную прямую $l_\zeta \in \mathbb{C}P^{m-1} \setminus E_f$ функции $h(z) =$

$= \max_{k\in\overline{1,s}} (0, h_k(z))$, где h_k — радиальные индикаторы функций f_k экспоненциального типа. Из леммы следует, что функция $h(z)$ совпадает с радиальным индикатором $H_f(z)$ отображения $\hat{f} = (1, f_1, \ldots, f_n)$. Используя формулу (6), получаем

$$\mu_f = \int_{S_1} H_f(z)\,\sigma = \int_{S_1} h(z)\,\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{CP^{m-1}\setminus E_f} \mu_\zeta \partial\nu(l_\zeta), \qquad (7)$$

где $\mu_\zeta = \int_0^{2\pi} H_\zeta(\theta)\,d\theta$ — длина кривой ∂I_ζ. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для голоморфного отображения* f: $C^m \to C^n$ *экспоненциального типа величина* $\mu_f = \int_{S_1} H_f(z)\,\sigma$ *есть усреднение длин* μ_ζ *границ сопряженных диаграмм* ∂I_ζ *по почти всем комплексным прямым* l_ζ.

Примеры. 1) [2]. Экспоненциальная кривая f: $C \to C^n$ задается функциями $f_k(z) = e^{\lambda_k z}$, $z \in C$, $k \in \overline{1, n}$, экспоненциального типа и почти регулярного роста. Для каждой функции f_k сопряженная диаграмма есть точка $\overline{\lambda}_k$. По теореме 3 величина $2\pi\mu_f$ совпадает с периметром p выпуклой оболочки точек $(0, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n)$. Остаток

$$|\ln(1 + |f(r\cdot z)|^2)/r - 2H_f(z)| \leqslant \ln(n+1)/r$$

при $z \in S_1$. Поэтому из теоремы 2 получаем формулу Альфорса

$$T_f(r) = rp/(2\pi) + O(1).$$

2) Отображение f: $C^2 \to C$ задается функциями $f_1(z) = p_1(z)$, $f_2(z) = p_2(z)\,e^{z_1}$, где p_1, p_2 — полиномы. Полином p_1 является целой функцией порядка $\rho_1 = 0$. Функция f_2 является целой функцией почти регулярного роста и экспоненциального типа с радиальным индикатором $h_2(z) = \operatorname{Re} z_1$, $z = (z_1, z_2) \in S_1$. По формуле (7) из теоремы 3 получаем, что

$$\mu_f = \frac{1}{2\pi}\int_C \mu_\zeta\, dd^c \ln(1 + |\zeta|^2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{2}{\sqrt{1+|\zeta|^2}}\, dd^c \ln(1+|\zeta|^2) =$$
$$= \frac{i}{2\pi^2}\int_C \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(1+|\zeta|^2)^{5/2}} = \frac{2}{3\pi}.$$

По теореме 2

$$T_f(r) = r\, 2/(3\pi) + o(r).$$

Автор благодарит Б. В. Шабата за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ташкентский государственный университет

Поступило 13.VII.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, часть II, М., «Наука», 1976.

[2] Ahlfors L. V., The theory of meromorphic curves, Acta Soc. Sci. Fenn, Ser. A, 3, № 4 (1941), 1—31.

[3] Буземан Г., Выпуклые поверхности, М., «Наука», 1964.

[4] Иванов Л. Д., Вариации множеств и функции, М., «Наука», 1975.

[5] Садуллаев А., Критерии алгебраичности аналитических множеств, Сб., О голоморфных функциях многих комплексных переменных, Красноярск, 1976.

[6] Ронкин Л. И., Введение в теорию целых функций многих переменных, М., «Наука», 1971.

[7] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

[8] Shiffman B., Application of geometric measure theory to value distribution theory for meromorphic maps, Value Distribution Theory, part A, Marcel Dekker, Inc. N. Y., 1974, 63—95.