



Общероссийский математический портал

Д. А. Оганесян, О рациональных функциях с двумя критическими точками максимальной кратности, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2013, том 18, выпуск 6, 185–208

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

21 марта 2025 г., 20:20:45



# О рациональных функциях с двумя критическими точками максимальной кратности

Д. А. ОГАНЕСЯН

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: grag.oganes@gmail.com

УДК 512.772.5

**Ключевые слова:** алгебраические кривые, функции Белого, пары Фрида, пары Абеля, аппроксимации Паде.

## Аннотация

Данная работа посвящена исследованию функций на алгебраических кривых, дивизор которых имеет вид  $nA - nC$ . Предложено комбинаторно-топологическое и алгебраическое описание таких функций. Описаны все функции Белого среди таких функций. Случай кривой рода 1 рассмотрен более подробно. Количество функций Белого среди функций, дивизор которых имеет вид  $nA - nC$ , для рода 1 вычислено явно. Для общих функций такого вида на кривой рода 1 рассматриваются пространство их параметров и метод его вычисления с помощью аппроксимаций Паде.

## Abstract

*D. A. Oganessian, Rational functions with two critical points of maximum multiplicity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 185–208.*

In this paper, we consider the functions on algebraic curves whose divisors have the form  $nA - nC$ . Combinatorial-topological and algebraic descriptions are introduced for exploring such functions. All Belyi functions with such divisor are described. The case of curves of genus 1 is considered in more detail. The number of Belyi functions with divisor  $nA - nC$  is explicitly calculated. For general functions of this type on a curve of genus 1, we consider the space of the parameters and a method of its calculation that uses the Padé approximation.

## 1. Введение

Данная работа посвящена исследованию функций на алгебраических кривых, дивизор которых имеет вид  $nA - nC$ , исследованию прежде всего в контексте теории детских рисунков, пар Белого и функций с небольшим числом критических значений. Выбор данного вида дивизоров можно объяснить как простотой и упрощением вычислений конкретных примеров пар Белого, так и возникающими связями с другими областями математики.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 6, с. 185–208.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

Подобные функции в связи с вычислением квазиэллиптического интеграла появлялись уже в работах Н. Х. Абеля [5], что оправдывает название *пара Абеля*, введённое в работе для пары кривой и функции с дивизором  $nA - nC$ .

В разделах 3 и 4 вводятся комбинаторно-топологические средства для изучения пар Абеля, которые будут использоваться в дальнейшем. По аналогии с парами Белого общей паре Абеля ставится в соответствие вложенный граф  $\Gamma_{X,\alpha}$ . По графу определяется и комбинаторное описание пар Абеля.

В разделе 5 рассматриваются пары Абеля на кривых рода 1. Эти пары параметризуются модулярными кривыми  $X_1(n)$ . Основным результатом является введение функции Белого  $\varkappa_n$  на  $X_1(n)$  и описание её детского рисунка (утверждение 5.9).

В разделе 6 рассматриваются инварианты Галуа пар Белого, являющихся парами Абеля.

В разделе 7 рассматривается метод вычисления пар Абеля рода 1, а также связанные с этим вопросы о редукции пар Белого—Абеля в полях положительной характеристики.

В известной автору литературе подобные вопросы уже поднимались. Например, в [7] изучается  $p$ -адическая редукция пар Белого—Абеля, в [6] имеются подобные рассуждения для рода 1.

Выражаю благодарность моему научному руководителю Георгию Борисовичу Шабату за помощь и консультации при выполнении работы, а также участниками семинара механико-математического факультета МГУ «Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями» за ценные советы и замечания к моей работе.

## 2. Предварительные сведения и обозначения

### 2.1. Карты и рисунки

**Определение 2.1 [2].** *Картой*  $M$  называется пара  $(X, \Gamma)$ , где  $X$  — компактная связная ориентированная поверхность, а  $\Gamma$  — граф на ней, такой что

- 1) рёбра  $\Gamma$  являются несамопересекающимися кривыми на  $X$ , не имеющими общих точек, отличных от вершин;
- 2) каждая из связных компонент дополнения  $X \setminus \Gamma$  (называемая клеткой) гомеоморфна открытому диску.

**Замечание 2.2.** Из второго условия следует, что граф должен быть связным. Граф может иметь петли и кратные рёбра.

**Определение 2.3.** Две карты  $M_1 = (X_1, \Gamma_1)$  и  $M_2 = (X_2, \Gamma_2)$  называются *изоморфными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $u: X_1 \rightarrow X_2$ , ограничение которого на  $\Gamma_1$  является изоморфизмом графов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

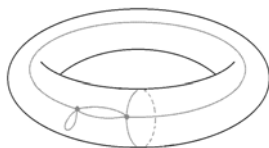


Рис. 1. Пример карты на торе

**Теорема 2.4 (формула Эйлера).** Пусть  $(X, \Gamma)$  — карта. Тогда

$$|V(\Gamma)| - |E(\Gamma)| + |F(\Gamma)| = 2 - 2g(X),$$

где  $V(\Gamma)$ ,  $E(\Gamma)$ ,  $F(\Gamma)$  — вершины, рёбра и грани карты соответственно и  $g(X)$  — род поверхности  $X$ .

**Определение 2.5.** Детским рисунком называется карта, вершины которой раскрашены в чёрный и белый цвета так, что каждое ребро соединяет вершины разного цвета.

Набор валентностей детского рисунка:  $(a_1, \dots, a_k \mid b_1, \dots, b_m \mid c_1, \dots, c_l)$ , где  $a_i$  — валентности чёрных вершин,  $b_i$  — валентности белых вершин,  $c_i$  — число белых вершин на границе клеток.

**Определение 2.6.** Детский рисунок называется *чистым*, если валентности всех его белых вершин равны 2.

**Определение 2.7.** Пусть  $D$  — детский рисунок на поверхности  $X$ . Разместим внутри каждой грани новую вершину; заменим на эти новые вершины чёрные вершины исходного рисунка. Соединим белые вершины исходного рисунка с новыми вершинами, на границах граней которых они лежат. Полученный детский рисунок  $D^*$  будем называть двойственным к исходному.

**Определение 2.8.** Детский рисунок называется *самодвойственным*, если он изоморфен своему двойственному.

**Определение 2.9.** Торический рисунок  $D$  называется *центрально-симметричным*, если он может быть получен факторизацией евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  по некоторой решётке  $L$ ,  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L \simeq X$ , так, что прообраз графа  $u^{-1}(\Gamma)$  центрально-симметричен в обычном смысле слова.

## 2.2. Пары Белого

**Определение 2.10.** Парой Белого  $(X, \beta)$  называется алгебраическая кривая  $X$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{K}$  и непостоянная рациональная функция  $\beta$  (функция Белого), заданная на  $X$ , имеющая не более трёх критических значений. Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над одним из критических значений имеют порядок 2.

**Теорема 2.11 [4].** Подходящим образом определённая категория детских рисунков эквивалентна категории пар Белого над  $\mathbb{C}$ .

Для пары Белого  $(X, \beta)$  над  $\mathbb{C}$  дробно-линейным преобразованием переведем критические точки в  $\{0, 1, \infty\}$ . Рассмотрим прообраз  $\beta^{-1}([0, 1])$  отрезка  $[0, 1]$ . Он является картой на  $X$ . Раскрасим вершины  $\beta^{-1}(0)$  в чёрный цвет, а вершины  $\beta^{-1}(1)$  в белый. Тогда получим детский рисунок, соответствующий  $(X, \beta)$ .

**Теорема 2.12 [4].** Торический рисунок центрально-симметричен тогда и только тогда, когда некоторая его модель соответствует эллиптической кривой, заданной уравнением  $y^2 = P(x)$ , где  $P \in \bar{\mathbb{Q}}[x]$ , и функции Белого, зависящей только от  $x$ .

**Теорема 2.13 (Г. В. Белый).** Любая пара Белого  $(X, \beta)$  над  $\mathbb{C}$  допускает модель над полем алгебраических чисел  $\bar{\mathbb{Q}}$ .

Эта теорема позволяет задать на парах Белого и соответственно на детских рисунках действие абсолютной группы Галуа  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Орбиты при этом действии называются орбитами Галуа.

Сразу заметим, что набор валентностей рисунка является инвариантом Галуа, так как кратности нулей  $\beta$  не меняются при действии  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Также инвариантами Галуа являются свойства центральносимметричности и самодвойственности [2].

### 2.3. Пары Фрида

**Определение 2.14.** Парой Фрида  $(X, \varphi)$  называется алгебраическая кривая  $X$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  и непостоянная рациональная функция  $\varphi$  (функция Фрида), заданная на  $X$ , имеющая не более четырёх критических значений.

**Определение 2.15.** Семейством Фрида называется четвёрка  $(\mathcal{X}, B, \pi, \Phi)$ , где  $\mathcal{X}$  — поверхность,  $B$  — кривая,  $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$  и  $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}_1$  — морфизмы, такие что общий слой  $\pi$  — гладкая полная кривая и ограничение  $\Phi$  на слой  $\pi^{-1}(b)$  — функция Фрида.

**Определение 2.16.** Пусть  $(\mathcal{X}, B, \pi, \Phi)$  — семейство Фрида. Для  $b \in B$  рассмотрим функцию Фрида  $\Phi|_{\pi^{-1}(b)}$  и её четыре критических значения в  $\mathbb{P}_1$ . Обозначим их двойное отношение как  $\beta_{bas}(b)$ .

**Замечание 2.17.** В общем случае так определённая  $\beta_{bas}$  является шести-значной. Для того чтобы эта функция стала корректно определённой, в общем случае потребуется такое расширение базы семейства Фрида, что критические значения каждой пары Фрида будут занумерованы и, соответственно, будет однозначно определено их двойное отношение. Тогда  $\beta_{bas}$  будет функцией Белого на базе.

В контексте данной работы два критических значения максимальной кратности выделены и полагаются равными 0 и  $\infty$ , и потому  $\beta_{bas}$  определена с точностью до перестановки двух оставшихся критических значений  $k_1, k_2$ , т. е. с точностью до обращения двойного отношения, которое равно  $k_1/k_2$  или  $k_2/k_1$ .

### 2.4. Аппроксимации Паде

**Определение 2.18.** Аппроксимацией Паде функции  $f(x)$  порядка  $[n, m]$  называется отношение двух многочленов

$$R_{[n,m]} = \frac{p_{[n,m]}(x)}{q_{[n,m]}(x)}, \quad \deg p_{[n,m]}(x) \leq m, \quad \deg q_{[n,m]}(x) \leq n,$$

для которого  $f^{(i)}(0) = R_{[n,m]}^{(i)}(0)$  при  $0 \leq i \leq m + n$ .

**Замечание 2.19.** Аппроксимация Паде функции  $f(x)$  определяется коэффициентами ряда Тейлора  $f(x)$ , т. е. фактически определена по формальному степенному ряду. Это показывает, что определение корректно для любого поля констант.

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Положим  $c_i = 0$  при  $i < 0$ . Тогда пусть

$$Q_{[n,m]}(x) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} & c_{n+m-1} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ x^m & x^{m-1} & \dots & x & 1 \end{vmatrix}$$

и

$$P_{[n,m]}(x) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} & c_{n+m-1} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ \sum_{i=0}^{n-m} c_i x^i & \sum_{i=0}^{n-m+1} c_i x^i & \dots & \sum_{i=0}^n c_i x^i \end{vmatrix}.$$

**Теорема 2.20 (К. Г. Я. Якоби).** Если

$$Q_{[n,m]}(0) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то  $\frac{P_{[m,n]}(x)}{Q_{[m,n]}(x)}$  является аппроксимацией Паде ряда  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ .

Доказательство можно найти в [1].

## 2.5. Пространство Гурвица

Мы будем рассматривать кривые и функции на них над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  (обычно  $\mathbb{C}$  или  $\overline{\mathbb{Q}}$ , в конце работы будет рассматриваться и  $\overline{\mathbb{F}_p}$ ). В случае положительной характеристики будем рассматривать только сепарабельные морфизмы.

**Определение 2.21.** Под пространством Гурвица  $\mathcal{HUR}_{g,n}$  понимается пространство классов изоморфизмов пар  $(X, \psi)$ , где  $X$  — алгебраическая кривая и  $\psi$  — рациональная функция на ней; такие пары  $(X_1, \psi_1)$  и  $(X_2, \psi_2)$  считаются изоморфными, если существует такой изоморфизм  $f: X_1 \rightarrow X_2$ , что  $\psi_2 \circ f = \psi_1$ :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \psi_1 \searrow & & \swarrow \psi_2 \\ & & \mathbb{P}^1(\mathbb{k}) \end{array} .$$

## 2.6. Пары Абеля

Рассматриваемые функции  $\alpha$  имеют две критические точки максимальной кратности, поэтому все рассматриваемые пары лежат в замыкании страта пространства Гурвица  $\mathcal{HUR}_{g,n}$  с набором валентностей

$$\begin{pmatrix} n & n & 2 & 2 & \dots & 2 \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

Пусть  $A$  и  $B$  — две критические точки максимальной кратности. Удобно будет предположить, что  $\alpha(A) = 0$  и  $\alpha(B) = \infty$ . Таким образом мы приходим к рассмотрению подмногообразия пространства Гурвица, которое будем обозначать

$$\mathcal{HUR}_{g,n}^{\infty 0} := \{(X, \alpha) \mid \operatorname{div}(\alpha) = nA - nB\} \subset \mathcal{HUR}_{g,n} .$$

**Определение 2.22.** Пары  $(X, \alpha)$ , для которых  $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$ , будем называть *парами Абеля*.

Функция на кривой определяется своим дивизором с точностью до умножения на ненулевую константу. Требуя, чтобы одно из оставшихся критических значений было равно единице, получим подмногообразие многообразия  $\mathcal{HUR}_{g,n}^{\infty 0}$ , которое будем обозначать

$$\mathcal{HUR}_{g,n}^{\infty 01} \subset \mathcal{HUR}_{g,n}^{\infty 0} .$$

### 3. Пары Абеля произвольного рода

В этом разделе мы будем рассматривать пары Абеля над  $\mathbb{C}$  и свяжем с ними комбинаторно-топологические образы, являющиеся аналогами детских рисунков.

Пусть дана пара Абеля  $(X, \alpha)$  с набором валентностей  $(n|n|a_1, \dots, a_k)$ . Рассмотрим прообраз замыкания луча отрицательных вещественных чисел

$$\Gamma_{X, \alpha} := \alpha^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{\infty\}) \subset X,$$

являющийся графом на поверхности  $X$ .

$\Gamma_{X, \alpha}$  является вложенным графом в  $X$ , но не обязательно детским рисунком, поскольку некоторые из его граней могут не быть односвязными. Например, для пары  $(X, \alpha)$ , где  $X$  задана уравнением  $y^2 = x^3 - x$  и  $\alpha = x$ ,  $\Gamma_{X, \alpha}$  не будет детским рисунком, поскольку  $X \setminus \Gamma_{X, \alpha}$  будет гомеоморфно цилиндру.

**Утверждение 3.1.** *Если  $\alpha$  не имеет критических значений на луче  $\mathbb{R}_{< 0}$ , то  $\Gamma_{X, \alpha}$  является вложенным графом с двумя вершинами и  $n = \deg \alpha$  рёбрами, соединяющими их.*

Предположим, что ни одно из критических значений  $\alpha$  не лежит на  $\mathbb{R}_{< 0}$ . Пусть  $\Omega = \langle (1, 2, 3, \dots, n) \rangle$ . Поставим в соответствие паре  $(X, \alpha)$  двусторонний смежный класс из  $\Omega \setminus S_n / \Omega$ .

Полурёбра графа  $\Gamma_{X, \alpha}$ , исходящие из вершины  $\alpha^{-1}(0)$ , циклически упорядочены, потому на них действует перестановка  $\rho_0$ , переводящая полурёбро в следующее при повороте против часовой стрелки. Аналогично определяется перестановка  $\rho_\infty$ . Таким образом, на множестве рёбер графа  $\Gamma_{X, \alpha}$  заданы две перестановки  $\rho_0, \rho_\infty$ , являющиеся циклами длины  $n$ . Тогда существует перестановка, сопряжение которой переводит  $\rho_\infty$  в  $\rho_0$ . Более того, все такие перестановки образуют двусторонний смежный класс из  $\Omega \setminus S_n / \Omega$ , который мы и поставим в соответствие паре Абеля.

Будем обозначать построенное отображение  $\Delta: \mathcal{HUR}_{g, n}^{\infty 0} \rightarrow \Omega \setminus S_n / \Omega$ .

**Утверждение 3.2.**  $\Delta(X, 1/\alpha) = \Delta(X, \alpha)^{-1}$ .

Из определения  $\rho$  видно, что элементы его образа можно понимать как отображения из  $n$ -элементного циклически упорядоченного множества в  $n$ -элементное циклически упорядоченное множество. Иногда мы будем прибегать к такому взгляду на элементы  $\Omega \setminus S_n / \Omega$ .

#### 3.1. Задание пары Абеля уравнением

**Теорема 3.3.**  *$(X, \alpha)$  — пара Абеля степени  $n$  тогда и только тогда, когда уравнение кривой  $X$  можно записать в виде*

$$\alpha^k + \alpha^{k-1} P_{k-1}(x) + \dots + \alpha P_1(x) + x^n = 0,$$

где  $P_i(x) \in \mathbb{k}[x]$  и  $\deg P_i \leq n$ .



**Доказательство.** Пусть  $(X, \alpha)$  — пара Абеля,  $\mathbb{k}(X)/\mathbb{k}(\alpha)$  — конечное расширение полей. По теореме о примитивном элементе для этого расширения есть примитивный элемент  $x: F \in \mathbb{k}(\alpha)[t], f(x) = 0$ .

Пусть  $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$ . Применяя дробно-линейное преобразование, будем считать, что  $x(A) = 0$  и  $x(C) = \infty$ . Приводя  $f$  к общему знаменателю, получим в числителе уравнение кривой  $F(\alpha, x) \in \mathbb{k}[\alpha, x]$ .

Запишем  $F$  по степеням  $\alpha$ :

$$\alpha^k P_k(x) + \alpha^{k-1} P_{k-1}(x) + \dots + \alpha P_1(x) + P_0(x).$$

Из степени  $\alpha$  выводим, что  $\deg P_i \leq n$ . Далее из условия  $\operatorname{div}(\alpha) = nA - nC$  получаем, что  $P_0(x) = x^n$  и  $P_k(x) = 1$ .

Обратно, из вида уравнения ясно, что  $\alpha$  будет иметь дивизор  $nA - nB$ .  $\square$

**Теорема 3.4.**  $(X, \alpha)$  — гиперэллиптическая пара Абеля степени  $n$  тогда и только тогда, когда уравнение кривой  $X$  можно записать в виде

$$\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0,$$

где  $P(x) \in \mathbb{k}[x]$  и  $\deg P \leq n$ . Гиперэллиптическая инволюция в таких координатах задаётся отображением  $(\alpha, x) \rightarrow (P(x) - \alpha, x)$ .

**Доказательство.** Поместим полюс функции Абеля в бесконечно удалённую точку; тогда функция примет вид  $P(x) + Q(x)y$ . Тогда уравнение  $X$  примет вид  $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$ .  $\square$

**Теорема 3.5.** Представление гиперэллиптической пары Абеля в виде  $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$  единственно с точностью до замен  $P(x) \rightarrow \pm P(x)$  и  $x \rightarrow \zeta x$ , где  $\zeta$  — корень  $n$ -й степени из 1.

**Доказательство.** Пусть для пары Абеля  $(X, \alpha)$  с уравнением  $\alpha^2 + \alpha P(x) + x^n = 0$  есть другое представление  $\alpha_1^2 + \alpha_1 P_1(x_1) + x_1^n = 0$ . Тогда  $\alpha_1 = \alpha + U(x)$  и  $x_1 = Cx$ . Отсюда получаем, что  $C^n = 1$  и  $U(x)(U(x) + P(x)) = 0$ .  $\square$

## 4. Пары Белого—Абеля

Будем называть пары Белого, являющиеся парами Абеля, парами Белого—Абеля.

**Утверждение 4.1.** Род пары Белого с набором валентностей  $(n | n | a_1, \dots, a_k)$  равен  $g = (n - k)/2$ .

**Доказательство.** Пусть на поверхности  $X$  есть рисунок с набором валентностей  $(n | n | a_1, \dots, a_k)$ . Тогда по формуле Эйлера

$$\chi(X) = V - E + F = (1 + k) - n + 1 = 2 + (k - n),$$

т. е.  $g(X) = (n - k)/2$ .  $\square$

**Определение 4.2.** Будем называть *остовом* детского рисунка  $\mathcal{D}$  его максимальный подграф  $\tilde{\mathcal{D}}$ , не содержащий висячих вершин.

**Утверждение 4.3.** Для фиксированного рода существует лишь конечное число остовов, соответствующих парам Белого—Абеля. Остальные рисунки, соответствующие парам Белого—Абеля, получаются добавлением множеств висячих ребер к чёрной вершине в одном из этих остовов.

**Доказательство.** Пусть род равен  $g$ . Остов рисунка, соответствующего паре Белого—Абеля, также является рисунком, соответствующим паре Белого—Абеля. В наборе валентностей остова  $(n \mid n \mid a_1, \dots, a_k)$  все  $a_i$  не меньше 2, т. е.  $k \leq n/2$  и по утверждению 4.1  $g \geq n/4$ . Значит,  $n \leq 4g$ , а количество рисунков данного рода и степени конечно.  $\square$

**Теорема 4.4.** Если  $g \in \Delta(\mathcal{D})$ , то 3-созвездие (см. [2])  $\mathcal{D}$  задаётся перестановками

$$[g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)g, g^{-1}(1, 2, 3, \dots, n)^{-1}g(1, 2, 3, \dots, n)^{-1}, (1, 2, 3, \dots, n)].$$

**Доказательство.** На языке 3-созвездий 3-созвездие  $\mathcal{D} [\rho_0, \rho_1, \rho_\infty]$  задаётся условиями  $\rho_\infty = (1, 2, 3, \dots, n)$ ,  $\rho_0^n = e$ ,  $\rho_0\rho_1\rho_\infty = e$ .

$g \in \Delta(\mathcal{D})$  такова, что  $\rho_0 = g^{-1}\rho_\infty g$ . Замена  $g$  на  $(1, 2, 3, \dots, n)^k g$  не изменит этого равенства, замена на  $g(1, 2, 3, \dots, n)^m$  приведёт к сопряжению созвездия перестановкой  $(1, 2, 3, \dots, n)^m$ . Получим тот же класс  $\Omega g \Omega$ , определяющий рассматриваемые 3-созвездия с точностью до сопряжения.  $\square$

**Следствие 4.5.** Ограничение  $\Delta$  на пары Белого—Абеля степени  $n$  является биекцией.

#### 4.1. Самодвойственные рисунки, соответствующие парам Абеля

**Утверждение 4.6.**  $\Delta(\mathcal{D}^*) = \Delta(\mathcal{D})^{-1}$ .

**Доказательство.** Утверждение следует из утверждения 3.2.  $\square$

**Утверждение 4.7.** Рисунок  $\mathcal{D}$ , соответствующий паре Абеля, является самодвойственным тогда и только тогда, когда в  $\Delta(\mathcal{D})$  есть перестановка порядка 2.

**Доказательство.** Из существования в классе  $\Delta(\mathcal{D})$  перестановки порядка 2 следует, что  $\Delta(\mathcal{D}) = \Delta(\mathcal{D})^{-1}$ . По утверждению 4.6  $\Delta(\mathcal{D})^{-1} = \Delta(\mathcal{D}^*)$ . По следствию 4.5  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ .

Обратно, пусть  $\omega = (1, 2, 3, \dots, n)$ . Из утверждения 4.6 для самодвойственного рисунка  $\mathcal{D}$  имеем, что  $\Delta(\mathcal{D}) = \Delta(\mathcal{D})^{-1}$ . Пусть  $g \in \Delta(\mathcal{D})$ . Тогда  $\omega^k g \omega^m = g^{-1}$ . Преобразуя, получаем, что  $\omega^{k-m} \cdot (\omega^m \cdot g) = (\omega^m \cdot g)^{-1}$  и  $(\omega^m \cdot g)^2 = \omega^{m-k}$ .

Рассмотрим два случая. Для нечётного  $n$  имеем  $\omega = (\omega^{(n+1)/2})^2$ . Подставляя это равенство в предыдущее, получаем, что  $(\omega^m \cdot g)^2 = (\omega^{(n+1)/2})^{2 \cdot (mk)}$  и  $(\omega^{(k \cdot (n+1)/2 + m \cdot (1-n)/2)} \cdot g)^2 = e$ , т. е. построена лежащая в том же классе перестановка порядка 2.

В случае чётного  $n$  заметим, что  $\omega$  не является квадратом другой перестановки, поскольку является нечётной. Потому из равенства  $(\omega^m \cdot g)^2 = \omega^{m-k}$  для чётного  $n$  следует чётность  $m - k$ , и  $(\omega^{(k+m)/2} \cdot g)^2 = e$ . Аналогично предыдущему случаю утверждение доказано.  $\square$

## 5. Пары Абеля рода 1

### 5.1. Пары Белого—Абеля на торе

**Утверждение 5.1.** *Остовами рисунков, соответствующих парам Белого—Абеля для рода 1, являются только рисунки с наборами валентностей  $(3 | 3 | 3)$  или  $(4 | 4 | 2, 2)$ .*

**Доказательство.** В рисунке на торе, соответствующем паре Белого—Абеля с набором валентностей  $(n | n | a_1, \dots, a_k)$ , имеет место соотношение  $k = n - 2$ . Поскольку  $a_1 + \dots + a_k = n$  и для остова  $a_i > 1$ , получаем искомое утверждение.  $\square$

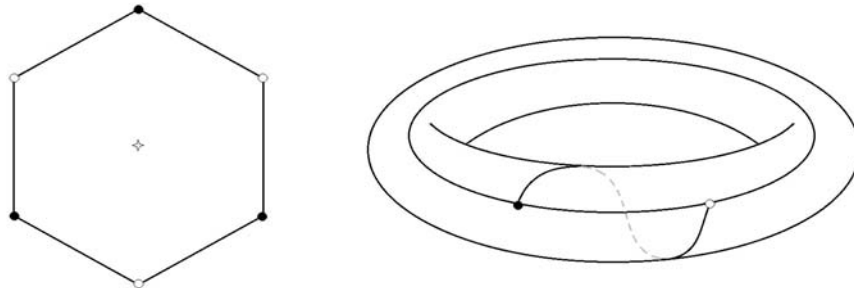


Рис. 2. Единственный рисунок с валентностями  $(3 | 3 | 3)$

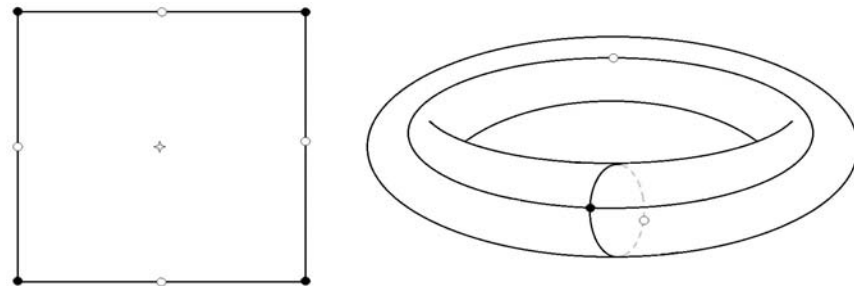


Рис. 3. Единственный рисунок с валентностями  $(4 | 4 | 2, 2)$

**Утверждение 5.2.** На торе рисунки, соответствующие парам Белого—Абе-  
ля, ограничиваются наборами валентностей  $(n \mid n \mid 3, 1, 1, \dots, 1)$  и  
 $(n \mid n \mid 2, 2, 1, \dots, 1)$ .

Висячие вершины можно добавить в три угла между рёбрами, исходящими из чёрной вершины остова  $(3 \mid 3 \mid 3)$ . Пусть количества этих рёбер против часовой стрелки  $a - 1, b - 1, c - 1$ . Будем обозначать получившийся рисунок  $\langle a, b, c \rangle$ . Аналогично для остова  $(4 \mid 4 \mid 2, 2)$ , добавляя  $a - 1, b - 1, c - 1, d - 1$  рёбер в четыре угла остова, получаем рисунок, соответствующий паре Белого—Абе-  
ля. Будем обозначать получившийся рисунок  $\langle a, b, c, d \rangle$ .

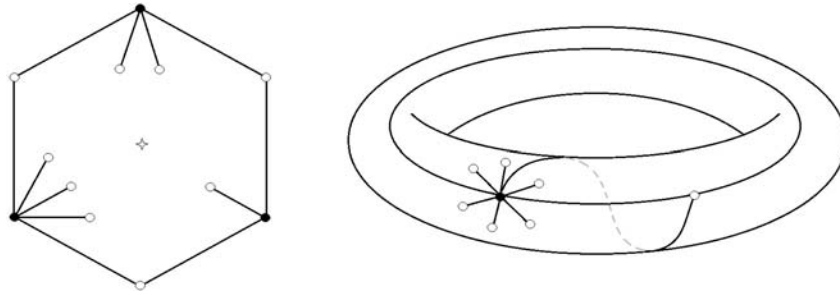


Рис. 4.  $\langle 4, 2, 3 \rangle$

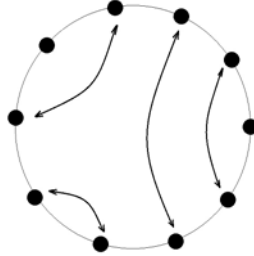
**Утверждение 5.3.**

1. Рисунки с набором валентностей  $(n \mid n \mid 3, 1, \dots, 1)$  однозначно задаются набором  $\langle a, b, c \rangle$ , определённым с точностью до циклической перестановки  $(\langle a, b, c \rangle = \langle b, a, c \rangle = \langle c, a, b \rangle)$  с  $a + b + c = n$ .
2. Рисунки с набором валентностей  $(n \mid n \mid 2, 2, \dots, 1)$  задаются набором  $\langle a, b, c, d \rangle$ , определённым с точностью до циклической перестановки  $(\langle a, b, c, d \rangle = \langle b, c, d, a \rangle = \langle c, d, a, b \rangle = \langle d, a, b, c \rangle)$  с  $a + b + c + d = n$ .

**Утверждение 5.4.** Все торические рисунки, соответствующие парам Бело-  
го—Абе-ля, самодвойственны.

**Доказательство.** Рассмотрим  $\Delta(\langle a, b, c \rangle)$  как отображение циклически упо-  
рядоченных множеств. Множество в прообразе  $\Delta(\langle a, b, c \rangle)$  состоит из  $a + b + c$   
элементов и разбито на три идущих по циклу группы из  $a, b, c$  элементов,  
соответствующих углам между висячими рёбрами в одном из углов. Отображе-  
ние  $\Delta(\langle a, b, c \rangle)$  переворачивает элементы внутри групп, сохраняя порядок самих  
групп (рис. 5). Такому отображению циклически упорядоченных множеств со-  
ответствует двойной смежный класс, содержащий перестановку порядка 2

$$(g = (1, a) \cdot (2, a - 1) \cdot (3, a - 2) \cdot \dots \cdot (1 + a, b + a) \times \\ \times (2 + a, b + a - 1) \cdot (3 + a, b + a - 2) \cdot \dots \cdot (1 + a + b, a + b + c) \times$$

Рис. 5.  $\rho(5, 3, 2)$ 

$$\times (2 + a + b, a + b + c - 1) \cdot (3 + a + b, a + b + c - 2) \cdot \dots).$$

Аналогично для  $\langle a, b, c, d \rangle$ .  $\square$

## 5.2. Общие пары Абеля на торе и модулярная кривая $X_1(n)$

**Утверждение 5.5.** *Общая пара Абеля рода 1 имеет четыре критических значения:  $0$ ,  $\infty$  и ещё два простых критических значения.*

**Доказательство.** Утверждение следует из формулы Римана—Гурвица.  $\square$

Пары Абеля из  $\mathcal{HUR}_{g,n}^{\infty 01}$  на торе фиксированной степени распадаются на семейства Фрида, соответствующие делителям  $n$ .

Возведение функции Абеля в степень  $k$  переводит пару Абеля  $(X, \alpha)$  в пару Абеля  $(X, \alpha^k)$ . Тем самым определено отображение  $\mathcal{HUR}_{1,n}^{\infty 0} \rightarrow \mathcal{HUR}_{1,kn}^{\infty 0}$ . Поэтому  $\mathcal{HUR}_{g,n}^{\infty 0}$  состоит из неприводимых компонент, соответствующих делителям  $n$ . В компоненте, соответствующей  $d$ , лежат функции, являющиеся  $d$ -й степенью. Будем далее рассматривать только основную компоненту из функций, не являющихся степенью.

**Утверждение 5.6.** *База пары Фрида пар Абеля рода 1, соответствующей функциям, не являющимся степенями, — модулярная кривая  $X_1(n)$ .*

**Доказательство.** Утверждение следует из определения  $X_1(n)$  (см. [3]).  $\square$

В общем случае пусть  $\text{CritVal}(\varphi) = \{0, k_1, k_2, \infty\}$ , в случае трёх критических значений будем считать  $k_1 = k_2$  третьим критическим значением.

**Утверждение 5.7.** *Величина  $\varkappa_n = (k_1/k_2 + k_2/k_1 + 2)/4$ , где  $k_1, k_2$  — простые критические значения функции  $\varphi$  из  $X_1(n)$ , определяет рациональную функцию на модулярной кривой  $X_1(n)$ , причём  $\varkappa_n$  является функцией Белого и над нулём все её ветвления имеют порядок 2.*

**Доказательство.** Количество прообразов  $k_1/k_2$  локально постоянно в точках, где все четыре критических значения различны, потому критические значения  $k_1/k_2$  могут быть только в точках, в которых  $k_1/k_2 \in \{0, 1, \infty\}$ .

Преобразуя, получаем, что  $\varkappa_n = (k_1 + k_2)^2 / (4k_1k_2)$ , откуда следует, что критические значения этой функции — 0 (ветвления над которым имеют порядок 2) и значения в критических точках  $k_1/k_2$ ; в них  $\varkappa_n = 1$  или  $\varkappa_n = \infty$ .  $\square$

**Утверждение 5.8.** *Над точками пополнения  $X_1(n)$ , в которых  $\varkappa_n = 1$ , лежат*

- 1) *торические пары Белого—Абеля, не являющиеся степенью функции меньшей степени;*
- 2) *слои, в которых падает род кривой и кривая вырождается в декартов лист, на котором функция Белого имеет вид  $x^n$  и два корня уравнения  $x^n = 1$ , отношение между которыми является первообразным корнем из 1 степени  $n$ , склеены в особую точку декартова листа.*

**Доказательство.** Если  $\varkappa_n = 1$ , то либо кривая неособая, тогда  $k_1 = k_2$  и это пара Белого—Абеля, либо кривая вырождается.  $\square$

Будем обозначать особую пару из пункта 2)  $\langle a, b \rangle$ , если в особенность склеены корни из единицы  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ,  $\xi_1/\xi_2 = e^{2i\pi a/n}$  и  $\xi_2/\xi_1 = e^{2i\pi b/n}$ .

Важным объектом является рисунок на  $X_1(n)$ , соответствующий функции Белого  $\varkappa_n$ . Перечислим набор его валентностей.

**Утверждение 5.9.**

1. *Точки базы, над которыми висят рисунки  $\langle a, b, c, d \rangle$ , имеют валентность 2. Они соединены с точками, над которыми висят рисунки  $\langle a + 1, b - 1, c + 1, d - 1 \rangle$ ,  $\langle a - 1, b + 1, c - 1, d + 1 \rangle$ . Если один из параметров  $a - 1, b - 1, c - 1, d - 1$  оказывается нулевым, то соответствующий рисунок принимает вид  $\langle x, y, z \rangle$ . Если нулевыми оказываются сразу два из перечисленных параметров (что возможно лишь в случае  $\langle a, 1, c, 1 \rangle$ ), то точки базы, над которыми висят рисунки  $\langle a, 1, c, 1 \rangle$  соединены с точками, над которыми висят рисунки  $\langle a + 1, c + 1 \rangle$  и  $\langle a - 1, 2, c - 1, 2 \rangle$ .*
2. *Точки базы, над которыми висят рисунки  $\langle a, b, c \rangle$ , имеют валентность 3. Они соединены с точками, над которыми висят рисунки  $\langle 1, a - 1, b + 1, c - 1 \rangle$ ,  $\langle a - 1, 1, b - 1, c + 1 \rangle$ ,  $\langle a + 1, b - 1, 1, c - 1 \rangle$ . Если один из параметров  $a - 1, b - 1, c - 1$  оказывается нулевым, то соответствующий рисунок принимает вид  $\langle x, y, z \rangle$ , если сразу два параметра — нули (что возможно лишь в случае  $\langle a, 1, 1 \rangle$ ), то этот случай сводится к виду  $\langle 1, a - 1, 2 \rangle$ ,  $\langle a - 1, 1, 2 \rangle$  и  $\langle a + 1, 1 \rangle$ .*
3. *Точки базы, над которыми висят особые пары  $\langle a, b \rangle$ , имеют валентность 1 и соединены с точками базы, над которыми висят  $\langle a - 1, 1, b - 1, 1 \rangle$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим поведение отображения  $\Delta$  при движении по ребру рисунка, соответствующего  $\varkappa_n$ , от одной белой вершины до другой. При прохождении чёрной вершины перестановки из класса  $\Delta$  умножаются на транспозицию. На основе этого замечания утверждение проверяется прямым вычислением.  $\square$

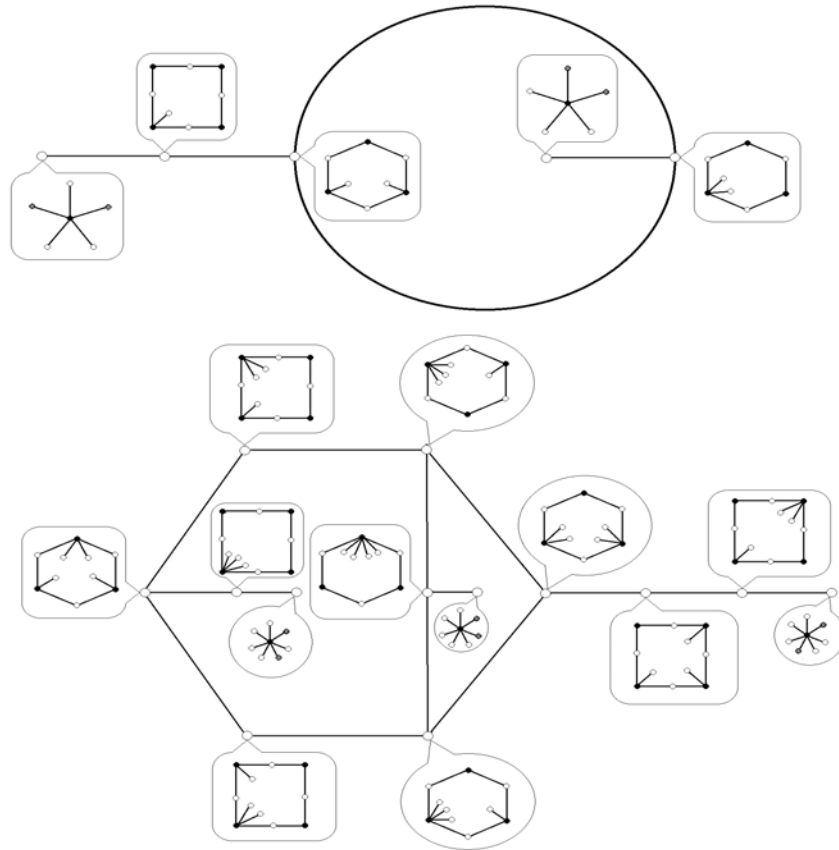


Рис. 6. Рисунки, соответствующие парам  $\varkappa_5, \varkappa_7$ , и пары Белого в слоях над точками со значением 1

### 5.3. Количество пар Белого на $X_1(n)$

Пусть  $m_3(n)$  — это количество детских рисунков с набором валентностей  $(n \mid 3, 1, \dots, 1 \mid n)$ , которым соответствуют функции Белого, не являющиеся степенями, и аналогично  $m_2(n)$  — количество детских рисунков с набором валентностей  $(n \mid 3, 1, \dots, 1 \mid n)$ , которым соответствуют функции Белого, не являющиеся степенями.

**Утверждение 5.10.** При  $n > 3$

$$m_3(n) = \frac{\varphi(n)\psi(n)}{6} - \frac{\varphi(n)}{2},$$

где  $\varphi(n)$  — функция Эйлера и  $\psi(n)$  — пси-функция Дедекинда,

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

**Доказательство.** Рисунок с набором валентностей  $(n | 3, 1, \dots, 1 | n)$  задаётся тройкой  $\langle a, b, c \rangle$  чисел, удовлетворяющих равенству  $a + b + c = n$ , с точностью до циклической перестановки  $a, b, c$ . Таких троек  $k_3(n) = \lceil (n-1)(n-2)/6 \rceil$ .

Исключим теперь из этого числа рисунки, соответствующие парам Белого, являющимся степенями.  $\langle a, b, c \rangle$  является  $d$ -й степенью рисунка  $\langle a/d, b/d, c/d \rangle$  тогда и только тогда когда  $d$  делит НОД( $a, b, c$ ). Потому каждый из рисунков с набором валентностей  $(n | 3, 1, \dots, 1 | n)$  является степенью рисунка с взаимно простыми  $a, b, c$ , причём так как  $a + b + c = n$ , то степень рисунка делит  $n$ . Суммируя по всем возможным степеням, получаем

$$k_3(n) = \sum_{d|n} m_3(d).$$

Воспользуемся формулой обращения Мёбиуса:

$$m_3(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) k_3(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \left\lceil \frac{(d-1)(d-2)}{6} \right\rceil.$$

Замечая, что

$$\left\lceil \frac{(d-1)(d-2)}{6} \right\rceil = \begin{cases} \frac{(d-1)(d-2)}{6} & \text{при } 3 \nmid n; \\ \frac{(d-1)(d-2)}{6} + \frac{2}{3} & \text{при } 3 | n, \end{cases}$$

имеем

$$m_3(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \frac{(d-1)(d-2)}{6} + \frac{2}{3} \sum_{d|n, 3|d} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

При  $3 | n$  второе слагаемое примет вид  $\sum_{d|(n/3)} \mu(d)$ , что равно нулю при  $n/3 \neq 1$ , но  $n > 3$ . При  $3 \nmid n$ , второго слагаемого не будет, т. е. мы можем его отбросить. Перегруппируем сумму:

$$m_3(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot \frac{(d-1)(d-2)}{6} = \frac{1}{6} \sum_{d|n} d^2 \mu\left(\frac{n}{d}\right) - \frac{1}{2} \sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) + \frac{1}{3} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Осталось вспомнить, что

$$\sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n), \quad \sum_{d|n} d^2 \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n) \psi(n)$$

и при  $n \neq 1$

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 0. \quad \square$$



**Утверждение 5.11.**

$$m_2(n) = \frac{(n-6)\varphi(n)\psi(n)}{24} + \frac{\varphi(n)}{2}.$$

Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему.

**Утверждение 5.12.**

$$\deg \varkappa_n = \frac{n\varphi(n)\psi(n)}{12}.$$

**Доказательство.** Из утверждения 5.9 следует, что  $\varkappa_n - 1$  имеет  $m_3(n)$  нулей кратности 3,  $m_2$  нулей кратности 2 и  $\varphi(n)/2$  простых нулей.  $\square$

**Утверждение 5.13.** Количество особых слоёв семейства Фрида на  $X_1(n)$  равно  $\varphi(n)\sigma_0(n)/2$ .

**Доказательство.** Утверждение доказывается подсчётом количества проколов модулярной кривой  $X_1(n)$ .  $\square$

**Утверждение 5.14.** Эйлерова характеристика равна

$$\chi(X_1(n)) = \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{2} - \frac{\varphi(n)\psi(n)}{12}.$$

**Доказательство.** Из утверждения 5.7 следует, что валентности чёрных вершин равны 2, формула Эйлера и утверждения 5.10–5.13 дают

$$\chi(X_1(n)) = m_2(n) + m_3(n) - \frac{\deg \varkappa_n}{2} + \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{2} = \frac{\varphi(n)\sigma_0(n)}{2} - \frac{\varphi(n)\psi(n)}{12}. \quad \square$$

**Следствие 5.15.**  $g(X_1(n)) = 0$  тогда и только тогда, когда  $n \leq 12$  и  $n \neq 11$ .

## 6. Инварианты Галуа рисунков, соответствующих парам Белого—Абеля

### 6.1. Самодвойственные рисунки

**Утверждение 6.1.** Пусть рисунок  $\mathcal{D}$  самодвойственный и соответствующий ему класс  $\Delta(\mathcal{D})$  имеет вид  $\Omega g_0 \Omega$ , где  $g_0^2 = e$ . Тогда количество неподвижных точек перестановки  $g_0$  — инвариант Галуа рисунка  $\mathcal{D}$ .

**Доказательство.** Применим к функции Белого, соответствующей  $\mathcal{D}$ , преобразование  $\beta \rightarrow (\beta + 1/\beta + 2)/4$ . Отображение  $(z + 1/z + 2)/4$  (отнормированная функция Жуковского) переводит  $0, \infty$  в  $\infty$  и  $1$  в  $0$ .

Рисунок, соответствующий  $(\beta + 1/\beta + 2)/4$ , получается из исходного  $\mathcal{D}$  добавлением к нему двойственного рисунка и переходом к двойственному к этому объединению  $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}^*)^*$  (рис. 7 и 8).

Получившийся рисунок будет обладать нетривиальной симметрией (поскольку  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^*$ ). В фактор—рисунке набор валентностей белых вершин будет совпадать с длинами независимых циклов перестановки  $g_0$ , т. е. это инвариант Галуа.  $\square$

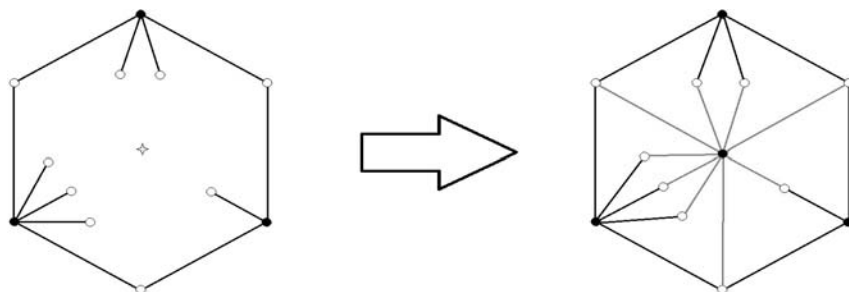


Рис. 7. Добавление двойственного рисунка

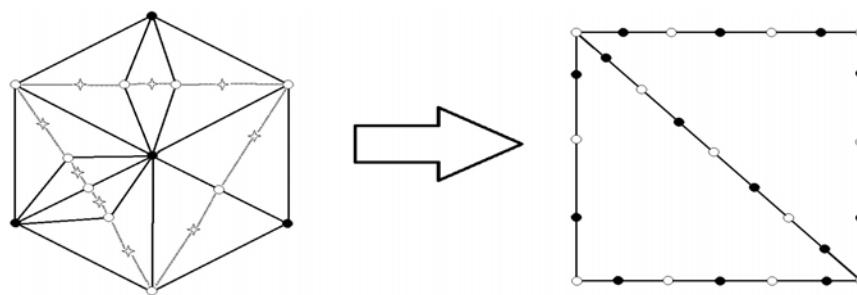


Рис. 8. Переход к двойственному рисунку

В частности, для рисунков рода 1 это утверждение примет следующий вид.

**Следствие 6.2.** *Количество чётных чисел среди  $a, b, c$  ( $a, b, c, d$ ) является инвариантом Галуа торического рисунка  $\langle a, b, c \rangle$  ( $\langle a, b, c, d \rangle$ ).*

## 6.2. Знак

**Теорема 6.3.** *Если  $n$  нечётно, то знак всех перестановок в классе  $\Omega g \Omega$  одинаков и является инвариантом Галуа соответствующего рисунка.*

**Доказательство.** При нечётном  $n$  цикл  $\omega$  является чётным, потому знак в классе  $\Omega g \Omega$  постоянный. На языке созвездий рисунок будет созвездием  $[g^{-1}\omega g, g^{-1}\omega^{-1}g\omega^{-1}, \omega]$ , все перестановки которого лежат в  $A_n$ .

Рассмотрим класс сопряжённости в  $S_n$ , содержащий цикл максимальной длины  $\omega$ . В  $A_n$  он распадается на два класса сопряжённых. В каком из двух этих классов, содержащем или не содержащем  $\omega$ , будет лежать  $g^{-1}\omega g$ , зависит от чётности  $g$ . По [2] класс сопряжённости, в котором лежат элементы созвездия, является инвариантом Галуа.  $\square$

### 6.3. Степень

Возведение в степень  $m$  функции Абеля степени  $n$  переводит её в функцию Абеля степени  $nm$ . Рассмотрим вложение  $\mathcal{HUR}_{g,n}^{0\infty} \rightarrow \mathcal{HUR}_{g,nm}^{0\infty}$ , переводящее функцию в её  $m$ -ю степень. Образ этого вложения является компонентной связности  $\mathcal{HUR}_{g,nm}^{0\infty}$ . Таким образом,  $\mathcal{HUR}_{g,n}^{0\infty}$  для составного  $n$  разбито на компоненты связности, каждая из которых соответствует некоторому делителю  $d$  числа  $n$ , функции в этой компоненте являются  $d$ -й степенью другой функции.

**Утверждение 6.4.** *Рассматриваемый детский рисунок степени  $nm$  соответствует функции Белого, являющейся  $m$ -й степенью, тогда и только тогда, когда перестановка  $\rho_1$  в 3-созвездии сохраняет остаток от деления на  $m$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\beta$  — рассматриваемая функция Белого степени  $nm$ . Попробуем извлечь из неё корень  $m$ -й степени. Если выбросить из кривой детский рисунок  $\beta^{-1}([0, 1])$ , то на оставшихся дисках никаких препятствий для извлечения корня нет, это делается одним из  $m$  возможных способов.

Детский рисунок состоит из одной чёрной вершины степени  $nm$  и некоторого количества белых. В окрестности чёрной вершины  $\beta$  будет устроена как  $x^{nm}$ , а корень определим как  $x^n$ .

Рассмотрим значения корня на  $nm$  рёбрах, выходящих из чёрной вершины. Исходная функция на этих полурёбрах принимала значения в отрезке  $[0, 1]$ , корень значения вида  $[0, e^{2\pi ik}/m]$ . Одинаковыми значения корня будут только на рёбрах, идущих через  $m$ . Чтобы корень был определённой функцией на кривой, необходимо и достаточно, чтобы белые вершины соединяли только рёбра с одинаковыми значениями корня на них, т. е. только идущие через  $m$ . Это и означает, что перестановка  $\alpha$  в 3-созвездии сохраняет остаток от деления на  $m$ .  $\square$

Сформулируем частные случаи этого утверждения для торических рассматриваемых рисунков.

#### Следствие 6.5.

1. Торический рисунок вида  $\langle a, b, c \rangle$  соответствует функции Белого, являющейся  $m$ -й степенью, тогда и только тогда, когда  $m$  делит НОД( $a, b, c$ ).
2. Торический рисунок вида  $\langle a, b, c, d \rangle$  соответствует функции Белого, являющейся  $m$ -й степенью, тогда и только тогда, когда

$$a \equiv -b \equiv c \equiv -d \pmod{m}.$$

**Доказательство.** Применим утверждение 6.4. В случае 1  $\rho_1$  можно положить тройным циклом  $(1, a+1, b+a+1)$ . Сохранение остатка при делении на  $m$  перестановкой  $\rho_1$  тогда равносильно  $a \equiv b \equiv 0 \pmod{m}$ .

Для случая 2  $\rho_1$  можно положить равной  $(1, a+b+1)(a+1, a+b+c+1)$  и рассуждать аналогично (см. также [6]).  $\square$

## 7. Аппроксимация Паде

В этом разделе мы опишем метод вычисления пар Абеля рода 1, который имеет и теоретическое значение, поскольку показывает, что пара  $(X_1(n), \varkappa_n)$  определена над  $\mathbb{Z}$ .

Изложенным ниже методом вычислены пары Абеля рода 1 степеней  $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12$ .

### 7.1. Расчёт

Пусть эллиптическая кривая  $X$  задана уравнением

$$y^2 = 1 + ax + bx^2 + cx^3.$$

Пусть  $p_n(x)/q_n(x)$  является аппроксимацией Паде в нуле функции

$$\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$

где  $\deg p_n(x) = [n/2]$ ,  $\deg q_n(x) = [(n-3)/2]$  и  $n \geq 3$  натуральное.

**Утверждение 7.1.** Коэффициенты многочленов  $p_n(x)$  и  $q_n(x)$  являются линейными функциями от первых  $n$  коэффициентов разложения в ряд Тейлора в нуле  $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$ .

**Доказательство.** Утверждение является следствием теоремы 2.20.  $\square$

**Утверждение 7.2.** Функция  $\varphi_n = p_n(x) - q_n(x)y$  на  $X$  имеет дивизор  $\operatorname{div}(\varphi_n) = (n-1)A + B - nC$ , где  $A$  — точка с координатами  $(0, 1)$ ,  $C$  — бесконечная точка, а  $B$  не обязательно отлична от  $A, C$ .

**Доказательство.** Имеем

$$p_n(x) - q_n(x)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3} = O(x^{n-1}),$$

т. е.  $\varphi_n$  имеет в  $A$  ноль порядка не меньше  $n-1$  и  $\deg \varphi_n \leq n$ .  $\square$

**Утверждение 7.3.** Аппроксимация Паде  $p_n(x)/q_n(x)$  в нуле функции  $\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$  существует тогда и только тогда, когда дивизор  $(n-2)(A-C)$  не является линейно эквивалентным 0.

**Доказательство.** Дивизор  $nC - (n-1)A$  линейно эквивалентен точке. Обозначим её через  $B$ . Таким образом, существует функция  $\varphi$ , для которой  $\operatorname{div}(\varphi) = (n-1)A + B - nC$ . Поскольку полюса  $\varphi$  находятся в  $C$ ,  $\varphi = p(x) + q(x)y$ . По теореме Якоби  $p(x)/q(x)$  является аппроксимацией Паде тогда и только тогда, когда  $q(0) \neq 0$ .

Из того, что  $q(0) = 0$ , следует, что  $p(0) = 0$ , так как  $p(0) + q(0) = \varphi(A) = 0$ . Таким образом, то, что  $p(x)/q(x)$  не является аппроксимацией Паде, равносильно тому, что существует  $\varphi_1$ , такая что  $\varphi = x\varphi_1$ .

Если  $\varphi = x\varphi_1$ , то  $\operatorname{div}(\varphi_1) = (n-2)(A-C)$ . Существование такой  $\varphi_1$  равносильно линейной эквивалентности  $(n-2)(A-C)$  нулю.  $\square$

Предыдущее утверждение позволяет найти уравнение  $X_1(n)$ . Также оно позволяет доопределить  $\varphi_n$  для любой эллиптической  $X$  и пары точек  $A$  и  $C$  на ней, а именно как функцию с дивизором  $(n-1)A + B - nC$ .

Среди функций  $\varphi_n$  лежат и искомые пары Абеля рода 1 степеней  $n$  и  $n-1$ . Действительно, условие  $A = B$  задаст пары Абеля степени  $n$  и условие  $B = C$  задаст пары Абеля степени  $n-1$ .

На практике оказалась удобной параметризация  $\mathcal{M}_{1,2}$

$$y^2 = (1 + (a+1)x)^2 + 4b(x^2 + x^3).$$

Из предыдущих утверждений следует, что коэффициенты  $p_n(x)$  и  $q_n(x)$  являются многочленами от  $a$  и  $b$  и уравнение  $U = 0$  — это полиномиальное уравнение на  $a, b$ . Таким образом, мы получили параметризацию  $X_1(n)$  двумя параметрами  $a, b$ , связанными полиномиальным соотношением.

Теперь укажем метод вычисления  $\varkappa_n$ .

**Утверждение 7.4.** *Имеет место следующее равенство для логарифмического дифференциала:*

$$\frac{d\varphi_n}{\varphi_n} = C(1 + K_n x + y) \frac{dx}{x},$$

где  $C$  — ненулевая константа,

$$K_{2n} = \frac{q_{n-2}f_3}{2np_n}, \quad K_{2n+1} = \frac{p_n}{(2n+1)q_{n-1}}$$

и  $p_s, q_s, f_s$  — коэффициенты  $p, q, f$  при  $x^s$  соответственно.

**Доказательство.** Пусть

$$\frac{d\varphi_n}{\varphi_n} = \xi dx.$$

Тогда  $\operatorname{div}(\xi) = K_1 + K_2 - A - C$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — критические точки функции  $\varphi_n$ , отличные от  $A$  и  $C$ . Из вида полюсов получим, что  $\xi = C(1 + kx + y)/x$ , где  $k$  — целое число.

Найдём теперь значение  $k$ . Дифференцируя  $\varphi_n$ , получаем

$$(1 + kx + y)\varphi_n = (1 + kx + y)(p_n - q_n y) = x((-q'_n f - q_n f') + p'_n y),$$

откуда находится формула для  $k$ .  $\square$

Согласно предыдущему утверждению критические точки  $\varphi_n$ , соответствующие критическим значениям  $k_1$  и  $k_2$ , лежат на прямой  $1 + K_n x + y = 0$ . С помощью этого уравнения они вычисляются в системе компьютерной алгебры. Это позволяет вычислить  $k_1, k_2$  и  $\varkappa_n$ . Уравнение  $\varkappa_n = 1$  позволяет найти среди всех пар Абеля на эллиптической кривой уравнения пар Белого—Абеля.

## 7.2. Результаты вычислений

Приведём вычисленные пары Фрида для  $n$ , при которых  $g(X_1(n)) = 0$ .

$n = 4$	$j_4$	$-16 \frac{(16-16t+t^2)^3}{t^4(t-1)}$
	$\varkappa_4$	$\frac{1}{64} \frac{(t-1)(t-9)^3}{t^3}$
$n = 5$	$j_5$	$-\frac{(a^4+12a^3+14a^2-12a+1)^3}{a^5(-1+11a+a^2)}$
	$\varkappa_5$	$\frac{4}{5^{10}} \frac{(-1+11a+a^2)(a+8)^2(3a+4)^3(3a-1)^3}{a^4}$
$n = 6$	$j_6$	$\frac{(3a-1)^3(3a^3-3a^2+9a-1)^3}{a^6(a-1)^3(9a-1)}$
	$\varkappa_6$	$\frac{1}{2^{14} \cdot 3^{12}} \frac{(9a-1)(9a-25)^2(81a^3-27a^2+99a-25)^3}{a^5(a-1)^4}$
$n = 7$	$j_7$	$\frac{(l^2-l+1)^3(l^6-11l^5+30l^4-15l^3-10l^2+5l+1)^3}{l^7(l-1)^7(l^3-8l^2+5l+1)}$
	$\varkappa_7$	$\frac{2^2}{7^{14}} \frac{(l^3-8l^2+5l+1)(l-5)^2(4l^2-26l-5)^2(2l^2+l+1)^2(3l^2-9l+5)^3(12l^3-12l^2+4l+5)^3}{l^{10}(l-1)^6}$
$n = 8$	$j_8$	$\frac{(1+12l^2+8l^3-10l^4+8l^5+12l^6-8l^7+l^8-8l)^3}{l^8(-1+l)^4(l^2-6l+1)(1+l)^2}$
	$\varkappa_8$	$\frac{1}{2^{50}} \frac{P_8}{(-1+l)^6(1+l)^{47}}$
$n = 9$	$j_9$	$-\frac{(v^3-3v+1)^3(-9v-48v^3+54v^4-45v^5+27v^6-9v^7+v^9+27v^2+1)^3}{v^9(v^2-v+1)^3(v-1)^3(v^3+3v^2-6v+1)}$
	$\varkappa_9$	$\frac{1}{2^2 \cdot 3^{36}} \frac{P_9}{v^8(v^2-v+1)^6(v-1)^{14}}$
$n = 10$	$j_{10}$	$-\frac{(1-4u+15u^8-20u^9-216u^7-6u^{10}+4u^{11}+u^{12}+216u^5+236u^6+15u^4+20u^3-6u^2)^3}{u^5(u+1)^{10}(u-1)^{10}(u^2-u-1)(u^2+4u-1)^2}$
	$\varkappa_{10}$	$\frac{2^4}{5^{20}} \frac{P_{10}}{u^8(u^2+4u-1)^5(u+1)^9(u-1)^{21}}$
$n = 12$	$j_{12}$	$\frac{J_{12}}{v^{12}(v-1)^6(v^2+1)^3(v^2-v+1)^4(v^2-4v+1)(v+1)^2}$
	$\varkappa_{12}$	$\frac{1}{2^{50} \cdot 3^{24}} \frac{P_{12}}{v^{11}(v+1)^6(v^2+1)^8(v^2-v+1)^9(v-1)^{10}}$

$$P_8 = (l^2 - 6l + 1)(2401 + 294l - 1881l^2 + 564l^3 + 575l^4 - 250l^5 + 25l^6)^2 \times \\ \times (225l^6 - 450l^5 - 225l^4 + 36l^3 - 81l^2 - 130l + 49)^3,$$

$$P_9 = (1 - 6v + 3v^2 + v^3)(5v^3 + 15v^2 - 3v + 32)^2(40v^9 - 576v^7 + 1272v^6 + \\ + 432v^5 - 6525v^4 + 13521v^3 - 14229v^2 + 8064v - 2048)^2(5v^3 + 3v - 1)^3 \times \\ \times (20v^6 - 60v^5 + 48v^4 + 40v^3 - 96v^2 + 57v - 16)^3,$$

$$P_{10} = (u^2 - u - 1)(54u^{14} + 162u^{13} - 1854u^{12} + 333u^{11} + 31324u^{10} - 88744u^9 - \\ - 67532u^8 + 944894u^7 - 2380538u^6 + 2801086u^5 - 1678854u^4 + \\ + 595213u^3 - 133896u^2 + 17792u - 1024)^2(9u^{10} + 45u^9 + 40u^8 - 150u^7 - \\ - 430u^6 - 884u^5 - 360u^4 - 70u^3 + 25u^2 + 15u - 4)^3,$$

$$\begin{aligned}
J_{12} &= (v^4 - 2v^3 - 2v + 1)^3(v^{12} - 6v^{11} + 12v^{10} - 14v^9 + 3v^8 \\
&\quad + 12v^7 - 24v^6 + 12v^5 + 3v^4 - 14v^3 + 12v^2 - 6v + 1)^3, \\
P_{12} &= (v^2 - 4v + 1)(214\,358\,881 - 496\,037\,080v + 60\,025v^{26} - 960\,400v^{25} - \\
&\quad - 202\,855\,541v^{18} + 131\,268\,550v^{20} - 41\,239\,576v^{19} + 553\,750\,568v^{17} + \\
&\quad + 64\,706\,950v^{22} - 114\,532\,600v^{21} + 6\,542\,725v^{24} - 25\,450\,600v^{23} + \\
&\quad + 1\,746\,882\,820v^{12} - 75\,890\,780v^{14} - 903\,401\,008v^{13} - 1\,872\,752\,176v^{11} + \\
&\quad + 1\,106\,930\,815v^{10} + 404\,345\,024v^9 - 808\,291\,433v^{16} + 697\,152\,752v^{15} - \\
&\quad - 1\,613\,955\,101v^8 + 2\,276\,564\,984v^7 - 1\,614\,356\,618v^6 + 612\,680\,360v^5 + \\
&\quad + 604\,125\,910v^4 - 1\,011\,984\,952v^3 + 1\,002\,337\,501v^2)^2 \times \\
&\quad \times (1\,225v^{14} - 4\,900v^{13} + 8\,575v^{12} - 9\,800v^{11} + 6\,125v^{10} - 1\,100v^9 - 2\,325v^8 + \\
&\quad + 336v^7 - 1\,317v^6 + 4v^5 + 605v^4 - 1\,160v^3 + 943v^2 - 532v + 121)^3.
\end{aligned}$$

### 7.3. Вычисленные $j$ -инварианты пары Белого

В приведённой ниже таблице указаны  $j$ -инварианты некоторых эллиптических кривых с рассматриваемыми парами Белого. В случае если несколько пар Белого лежат в одной орбите действия абсолютной группы Галуа и определены над расширением  $\mathbb{Q}$ , приведена норма  $j$ -инварианта в этом расширении.

$n$	Рисунок	Поле определения	$N(j)$	$p$
5	(1, 1, 3)	$\mathbb{Q}$	$\frac{2^{12} \cdot 5}{3^5}$	3
5	(1, 2, 2)	$\mathbb{Q}$	$-\frac{269^3}{2^{10} 3^5}$	2, 3
5	(1, 1, 1, 2)	$\mathbb{Q}$	$\frac{5 \cdot 211^3}{2^{15}}$	2
6	(1, 1, 2, 2)	$\mathbb{Q}$	$\frac{11^3 \cdot 1979^3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^{12}}$	2, 3, 5
6	(1, 1, 4)	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$	$\frac{2^8 \cdot 3^6 \cdot 11^3 \cdot 157^3}{5^{12}}$	5
6	(1, 2, 3)	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$		5
6	(1, 3, 2)	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}]$		5
7	(2, 2, 2, 1)	$\mathbb{Q}$	$\frac{3^3 \cdot 7 \cdot 2\,099^3}{2^{14} \cdot 5^7}$	2, 5
7	(3, 1, 2, 1)	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$	$\frac{41^3 \cdot 43^3 \cdot 109^3 \cdot 881^3}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^7}$	2, 3, 5
7	(4, 1, 1, 1)	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$		2, 3, 5
7	(3, 3, 1)	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$	$-\frac{2^{24} \cdot 83^3}{3^7 \cdot 5^7}$	3, 5

7	(5, 1, 1)	$\mathbb{Q}[\sqrt{21}]$		3, 5
7	(3, 2, 1, 1)	$\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$	$\frac{18\,439^3}{2^{21}}$	2
7	(3, 1, 1, 2)	$\mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$		2
7	(3, 2, 2)	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}]$	$\frac{1\,511^3 \cdot 130\,873^3}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^7}$	2, 3, 5
7	(4, 2, 1)	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}, \sqrt{-3}]$		2, 3, 5
7	(4, 1, 2)	$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{98}, \sqrt{-3}]$		2, 3, 5
8	все шесть 8-крестов	$D = 2^{65} \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^5$	$\frac{2^5 \cdot 193^3 \cdot 734\,614\,312\,466\,980\,513^3}{3^{12} \cdot 5^{16} \cdot 7^{32}}$	3, 5, 7
8	все шесть 8-пропеллеров	$D = 2^{69} \cdot 3^8 \cdot 5^4$	$-\frac{2^3 \cdot 24\,293\,971\,310\,474\,687^3}{3^{24} \cdot 5^{16} \cdot 7^{16}}$	3, 5, 7
9	(1, 1, 7)	$D = -3^5 \cdot 5$	$-\frac{2^{36} \cdot 3^2 \cdot 2\,267^3}{5^9 \cdot 7^9}$	5, 7
9	(1, 3, 5)			
9	(1, 5, 3)			
9	(2, 2, 2, 3)	$D = -3^6 \cdot 5 \cdot 7^3$	$-\frac{273^3 \cdot 5\,653^3 \cdot 10\,400\,327\,909^3}{2^{57} \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7^{18}}$	3, 5, 7
9	(2, 2, 1, 4)			
9	(2, 2, 4, 1)			

**Замечание 7.5.** Отметим, что в этой таблице в знаменателях норм  $j$ -инвариантов стоят степени простых чисел, меньших степени пары Белого, а дискриминанты полей определения являются произведениями простых, не превосходящих степени пары Белого. Отметим также, что показатели степеней простых чисел в знаменателях норм  $j$ -инвариантов для простых степеней рисунков делятся на степень пары Белого, это же касается и составных степеней рисунков, но для простых, больших 3.

## Литература

- [1] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986.
- [2] Звонкин А. К., Ландо С. К. Графы на поверхностях и их приложения. — М.: Изд-во МЦНМО, 2010.
- [3] Ленг С. Введение в теорию модулярных форм. — М.: Мир, 1979.
- [4] Шабат Г. Б. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 1998.



- [5] Abel N. H. Über die Integration der Differential-Formel  $\rho dx/\sqrt{R}$ , wenn  $R$  und  $\rho$  ganze Funktionen sind // J. Reine Angew. Math. — 1826. — Bd. 1. — S. 185–221.
- [6] Pakovitch F. B. Combinatoire des arbres planaires et arithmetique des courbes hyperelliptiques // Ann. Inst. Fourier. — 1998. — Vol. 48, no. 2. — P. 323–351.
- [7] Zapponi L. Lamé curves with bad reduction: Preprint. — 2006.