

**УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ПО ДОМИНИРОВАНИЮ ВОГНУТЫХ ИГР  $n$  ЛИЦ**

**А. И. Гольберг**, В. А. Гурвич, М. Ю. Розенблюм, К. М. Ханин

**1. Введение.** Решение по доминированию — новая и весьма перспективная концепция теории игр. Процедура решения по доминированию игры в нормальной форме состоит в последовательном исключении всеми игроками доминируемых (т. е. заведомо плохих) стратегий. Если в результате у каждого игрока  $i$  остается по одной стратегии  $x_i$ , то игра называется *разрешимой по доминированию* (Р.Д.), а полученная точка  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — *Д-равновесием*. Принципиальное преимущество этой концепции по сравнению с другими концепциями равновесия в том, что имеется универсальная теорема единственности. Однако с теоремами существования дело обстоит значительно хуже. До последнего времени Р.Д. была доказана лишь для позиционных игр с полной информацией. В [1] (см. также [2] гл. III) предпринята попытка получить критерий локальной Р.Д. вогнутых игр  $n$  лиц. Рассматривается точка равновесия Нэша  $x$  и линейный оператор  $T$ , полученный линеаризацией в  $x$  так называемого оператора лучших ответов. Игра называется локально Р.Д. в точке  $x$ , если некоторая окрестность  $x$  является Р.Д. игрой, а сама точка  $x$  — *Д-равновесием*. Утверждается ([1] теорема 7.1), что для локальной устойчивости  $x$ , равно как и для локальной Р.Д. в  $x$ , необходимо, чтобы  $\rho(T) \leq 1$ , и достаточно, чтобы  $\rho(T) < 1$ , где  $\rho(T)$  — спектральный радиус линейного оператора  $T$ , т. е. максимум модулей его собственных значений. Мы покажем, однако, что неравенство  $\rho(T) < 1$  достаточно для локальной Р.Д. лишь в случае двух игроков. В общем случае будет получено достаточное условие, которое сводится к неравенству  $\rho(T^+) < 1$ , для некоторого линейного оператора  $T^+$ , весьма просто связанного с  $T$ . В случае, когда пространства стратегий всех игроков одномерны, неравенство  $\rho(T^+) \leq 1$  необходимо для локальной Р.Д. Аналогичные результаты получены для глобальной Р.Д. в предположении, что функции выигрыша всех игроков содержат лишь линейные и квадратичные члены.

**2. Основные понятия. 2.1. Игры в нормальной форме.** Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  — множество игроков;  $X_i$  — множество стратегий игрока  $i$ ,  $X = X_1 \times \dots \times X_n$ ;  $u_i: X \rightarrow R$  — платежная функция игрока  $i$ ,  $u_i(x)$  — выигрыш игрока  $i$  в точке  $x \in X$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ . Пара  $\langle X, u \rangle$  — называется игрой в нормальной форме.

**2.2. Вогнутые игры.** Пусть  $X_i$  — выпуклое компактное множество в линейном  $k_i$ -мерном пространстве  $E_i^{k_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). При этом

$$(1) \quad X = X_1 \times \dots \times X_n \subseteq E^K = E_1^{k_1} \oplus \dots \oplus E_n^{k_n}, \quad K = \sum_{i=1}^n k_i.$$

Пусть далее каждая функция  $u_i$  является строго вогнутой относительно переменных  $x_i$ , т. е. при любом фиксированном наборе стратегий  $\hat{X}_i$  игроков  $N \setminus i$  функция  $u_i(x) = u_i(x_i, \hat{x}_i)$  строго вогнута на  $X_i$  (и, значит, имеет единственный максимум). При этом игра  $\langle X, u \rangle$  называется вогнутой.

**2.3. Равновесие Нэша.** Точка  $x \in X$  называется точкой равновесия Нэша, если при изменении стратегии любым игроком (но только одним) его выигрыш не увеличивается. В любой вогнутой игре существует хотя бы одна точка равновесия Нэша.

**2.4. Оператор лучших ответов.** Для каждого набора стратегий  $\hat{x}_i$  игроков  $N \setminus i$  существует единственный лучший ответ игрока  $i$  (best response)  $x_i = BR_i(\hat{x}_i)$ . Оператор лучших ответов  $BR$  каждой точке  $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$  ставит в соответствие точку  $BR(x) = (x'_1, \dots, x'_n) \in X$ , где  $x'_i = BR_i(\hat{x}_i)$ . Множество неподвижных точек оператора  $BR$  совпадает с множеством точек равновесия Нэша.

**2.5. Устойчивость равновесия.** Точка равновесия Нэша  $x^*$  называется устойчивой, если  $\forall x \in X (BR)^k(x) \rightarrow x^*$  при  $k \rightarrow \infty$ . Очевидно, при этом в игре не может быть других точек равновесия. Достаточные условия устойчивости получены в [1].

**2.6. Разрешимость по доминированию и Д-равновесие.** Говорят, что стратегия  $i$ -го игрока  $x'_i \in X_i$  доминирует  $x''_i \in X_i$ , если  $\forall \hat{x}_i u_i(x'_i, \hat{x}_i) > u_i(x''_i, \hat{x}_i)$ . В вогнутой игре  $\langle X, u \rangle$  будем последовательно исключать доминирующиеся стратегии игроков в про-

произвольном порядке. Получающаяся в результате подыгра, не содержащая доминируемых стратегий, не зависит от порядка исключения. Если у каждого игрока  $i \in N$  остается по одной стратегии  $x_i^*$ , то игра  $\langle X, u \rangle$  называется Р.Д., а точка  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  — Д-равновесием.

**Т е о р е м а 1.** В Р.Д. вогнутой игре существует единственная точка Д-равновесия  $x^*$ . При этом  $x^*$  является устойчивой (а значит, и единственной) точкой равновесия Нэша.

**З а м е ч а н и е.** Концепция решения по доминированию и теорема единственности с небольшими изменениями переносятся на случай конечных игр в нормальной форме (см. [2]).

**3. Основные результаты.** Мы получим условия Р.Д. в линейном случае, а затем, опираясь на них, — общие условия локальной Р.Д.

**3.1.** Вогнутую игру  $\langle X, u \rangle$  будем называть линейной, если функции выигрыша  $u_i$  — квадратичные формы в  $E^K$ , а начало координат  $o$  — внутренняя точка  $X$ . При этом оператор  $BR$  линеен в некоторой окрестности  $o$ , а сама точка  $o$  является равновесием Нэша. Мы выясним условия, при которых  $o$  является Д-равновесием. Других Д-равновесий, согласно теореме 1, быть не может.

**3.2.** Зафиксируем квадратичную платежную функцию  $u^*$  и введем линейный оператор  $T: E^K \rightarrow E^K$ , зависящий от  $u^*$ . Матрица  $T$  состоит из  $n^2$  блоков  $T_{ij}: E_i \rightarrow E_j$ , где

$$(2) \quad T_{ii} = 0, \quad T_{ij} = -[\partial^2 u_i^* / \partial x_i^2]^{-1} \cdot [\partial^2 u_i^* / \partial x_i \partial x_j], \quad i \neq j.$$

Матрицы  $[\partial^2 u_i^* / \partial x_i^2]$  обратимы, поскольку  $u_i^*$  строго вогнуты. Оператор  $T$  «с точностью до эффектов на границе  $X$ » совпадает с оператором лучших ответов в любой линейной игре  $\langle X, u^* \rangle$ .

**3.3.** Рассмотрим сначала одномерный случай, т. е. в (1) все  $k_i$  равны 1. При этом  $T$  задается  $n \times n$  матрицей  $T = [a_{ij}]$ . Введем матрицу  $T^+ = [|a_{ij}|]$ .

**Т е о р е м а 2.** Линейная игра  $\langle X, u^* \rangle$  Р.Д. тогда и только тогда, когда  $\rho(T^+) < 1$ . Таким образом, все линейные игры с данной платежной функцией  $u^*$  Р.Д. одновременно.

**3.4.** В многомерном случае ( $\exists k_i > 1$ ) удается получить лишь достаточные условия Р.Д. Кроме того, Р.Д. линейной игры  $\langle X, u^* \rangle$  может зависеть от  $X$ .

Введем в каждом пространстве  $E_i^{k_i}$  произвольную норму  $v_i$  и обозначим  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Определим  $n \times n$  матрицу  $T_v^+ = [a_{ij}]$ , где  $a_{ij}$  — норма оператора  $T_{ij}$ , отвечающая  $v$ .

**Т е о р е м а 3.** Если  $\rho(T_v^+) < 1$  при некотором  $v$ , то найдется Р.Д. линейная игра  $\langle X, u^* \rangle$ . (При  $n = 2$  достаточно  $\rho(T) < 1$ .)

**3.5.** Квадратичная форма  $u_i^*$  индуцирует евклидову норму  $v_i(u_i^*)$  в пространстве  $E_i^{k_i}$ :  $|x_i| v_i(u_i^*) = (-u_i^*(x_i, \hat{x}_i = \hat{o}))^{1/2}$ . Обозначим  $v(u^*) = (v_1(u_1^*), \dots, v_n(u_n^*))$ .

**Т е о р е м а 4.** Если  $\rho(T_{v(u^*)}^+) < 1$ , то любая линейная игра  $\langle X, u^* \rangle$  Р.Д.

**3.6. Локальная Р.Д. в нелинейном случае.** Пусть  $x^*$  — точка равновесия Нэша в вогнутой игре  $\langle X, u \rangle$  и пусть функции  $u_i$  дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности  $x^*$ . Обозначим через  $T$  линейный оператор, полученный линеаризацией  $BR$  в точке  $x^*$  и через  $u_i^*$  — квадратичные формы, полученные разложением  $u_i$  в точке  $x^*$  до членов второго порядка. (Линейные члены равны нулю.) Операторы  $T^+$  и  $T_v^+$  определяются согласно 3.3, 3.4, а  $T_v^+(u)$  определяется с помощью  $u^*$  согласно 3.5. Теоремы 2, 3, 4 дают условия локальной Р.Д. игры  $\langle X, u \rangle$ : достаточно в их формулировках слова «линейная игра  $\langle X, u^* \rangle$ » заменить на «игра  $\langle X^*, u \rangle$ , где  $X^* = X_1^* \times \dots \times X_n^*$  достаточно малая окрестность точки  $x^*$ ». В теореме 2 случай  $\rho(T^+) = 1$  становится неопределенным.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G a b a u D., M o u l i n H. On the uniqueness and stability of Nash equilibrium in noncooperative games. — In: Applied stochastic control in econometric and management science. — Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1980.  
[2] М у л е н Э. Теория игр. — М.: Мир, 1985.

Институт теоретической физики  
им. Л. Д. Ландау  
Институт физики Земли

Поступило в Правление общества  
25 июня 1984 г.