



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Константы Лебега ядер
Дирихле монотонного типа и сходимость
кратных тригонометрических рядов,
Матем. заметки, 1988, том 44, вы-
пуск 6, 758–769

<https://www.mathnet.ru/mzm4199>

Использование Общероссийского математического портала
Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны
с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 апреля 2025 г., 06:41:13



КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ЯДЕР ДИРИХЛЕ МОНОТОННОГО ТИПА И СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

М. И. Дьяченко

§ 1. Введение. Приведем некоторые обозначения. Пусть m — натуральное число, а $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ — m -мерные векторы. Тогда

$$xy = \sum_{j=1}^m x_j y_j, \quad |x| = \sum_{j=1}^m |x_j|, \quad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^m x_j^2\right)^{1/2},$$

$$\Pi(x) = \prod_{j=1}^m x_j \quad \text{и} \quad dx = \prod_{j=1}^m dx_j.$$

Скажем, что $x \leq y$, если $x_j \leq y_j$ при $1 \leq j \leq m$. Если a — число, то положим $x \pm a = (x_1 \pm a, \dots, x_m \pm a)$. Скажем, что $x = a$ ($x \geq a$), если $x - a = 0$ ($x - a \geq 0$). Через $[a]$ обозначим целую часть числа a . Если $1 \leq j \leq m$, то положим $x(j) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m)$. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^\infty = \{u_{k_1, \dots, k_m}\}_{k_1=1, \dots, k_m=1}^{\infty, \dots, \infty}$ — некоторый набор чисел, а m -мерные целочисленные векторы $l \geq n \geq 1$. Тогда

$$\sum_{k=n}^l u_k = \sum_{k_1=n_1}^{l_1} \dots \sum_{k_m=n_m}^{l_m} u_{k_1, \dots, k_m}.$$

Положим $T = [-\pi, \pi]$ и $\mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m : x > 0\}$. Если $1 \leq p < \infty$, 2π -периодическая функция $f(x) \in L_p(T^m)$ и измеримое $E \subseteq T^m$, то

$$\|f(x)\|_{p, E} = (2\pi)^{-m} \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{p^{-1}} \quad \text{и} \quad \|f(x)\|_p = \|f(x)\|_{p, T^m}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть U — ограниченное целочисленное множество в \mathbf{R}_+^m . Тогда скажем, что U есть *целочисленное множество монотонного типа* в \mathbf{R}_+^m , или, для краткости, $U \in M(\mathbf{R}_+^m)$, если из того, что $k \in U$, а целочисленный вектор $l \in \mathbf{R}_+^m$ и $l \leq k$, вытекает, что $l \in U$.

Через $|U|$ ниже будет обозначаться число точек целочисленного множества U . Если V — ограниченное множество в \mathbf{R}^m , то положим ядро Дирихле

$$D_V(x) = \sum_{k \in V} \exp(ikx).$$

В случае, когда $U \in M(\mathbf{R}_+^m)$, скажем, что $D_U(x)$ есть ядро Дирихле монотонного типа.

Ряд авторов решал следующую задачу. Пусть K — некоторое множество в \mathbf{R}^m , число $\rho > 1$ и

$$K_\rho = \{x \in \mathbf{R}^m: x\rho^{-1} \in K\}.$$

Требуется оценить порядок роста $\|D_{K_\rho}(x)\|_1$ при $\rho \rightarrow \infty$. Нас будет прежде всего интересовать результат В. А. Юдина (см. [1]).

ТЕОРЕМА А. Если $m \geq 2$ и K — замкнутое уравновешенное множество в \mathbf{R}^m с ограниченной верхней поверхностной мерой в смысле Минковского, то $\|D_{K_\rho}(x)\|_1 = O(\rho^{\frac{1}{2}(m-1)})$ при $\rho \rightarrow \infty$.

В § 3 нами будет получена оценка несколько иного характера.

ТЕОРЕМА 1. Если $D_U(x)$ — ядро Дирихле монотонного типа, то

$$\|D_U(x)\|_1 \leq 2\pi m! |U|^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln |U| + 1).$$

Вопрос об окончательности теоремы 1 остается открытым. В § 4 теорема 1 будет использована для изучения рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ikx), \quad (1)$$

где

$$a_k \leq a_n \text{ при } n \leq k \text{ и } a_k \rightarrow 0 \text{ при } |k| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Ниже, если мы будем говорить: «Дан ряд вида (1)», выполнение условий (2) будет подразумеваться. Свойства таких рядов для $m = 2$ рассматривались в статье [2].

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда ряд вида (1) $A \in R_p$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p (\Pi(k))^{p-2} < \infty. \quad (3)$$

При $m = 1$, как было показано Г. Харди и Дж. Литтльвудом (см. [3, с. 657]), если $1 < p < \infty$, то ряд вида (1) $A \in R_p$ тогда и только тогда, когда он является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L_p(T)$. Для $m = 2$ нами (см. [2]) доказано, что при $1 < p < \infty$ ряд Фурье функции $f(x) \in L_p(T^2)$, имеющий вид (1), принадлежит R_p . Это утверждение справедливо и для $m > 2$. Доказательство для случая $m > 2$ отличается от имеющегося в [2] лишь техническими деталями и здесь приводиться не будет. Из многомерного аналога другой теоремы Харди и Литтльвуда следует, что если $2 \leq p < \infty$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p (\Pi(k))^{p-2} < \infty, \quad (4)$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(ikx) \quad (5)$$

является рядом Фурье функции $f(x) \in L_p(T^m)$. Тем более это справедливо для рядов вида (1). Известно, что если $p < 2$, то из выполнения (4), вообще говоря, не следует даже, что (5) является рядом Фурье. Однако справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если $p > \frac{2m}{m+1}$ и ряд вида (1) $A \in R_p$, то A является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L(T^m)$ и сходится по Прингсхейму почти всюду на T^m . В то же время существует ряд вида (1) $A \in R_p$ при любом $p \in \left(1, \frac{2m}{m+1}\right)$, который не является рядом Фурье и расходится по кубам на множестве положительной меры.

В статье [2] были получены утверждение о сходимости почти всюду и пример, усиливающий пример теоремы 2 для $m = 2$. Случай $m > 2$ потребовал привлечения совершенно иных соображений для доказательства.

З а м е ч а н и е 1. Неизвестно, существует ли ряд Фурье вида (1), расходящийся по Прингсхейму на множестве положительной меры.

§ 2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть m — натуральное число, $C \geq 1$, а $Y(m, C) = \{k \in \mathbf{R}_+^m: k \text{ — целочисленный вектор и } 1 \leq$

$\leq \Pi(k) \leq C\}$. Тогда

$$|Y(m, C)| \leq C (\ln C + 1)^{m-1}. \quad (6)$$

Неравенство (6) проверяется индукцией по m . Оценки такого типа хорошо известны в теории чисел. Так, в книге А. А. Карацубы (см. [4, с. 60]) приведено неравенство

$$|Y(m, C)| \leq C \frac{(\ln C + m - 1)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (7)$$

Для достаточно больших C из неравенства (7) вытекает оценка (6)

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha > 1$, $\beta > 0$ и числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$ таковы, что $\lambda_j \geq r^3$ при $1 \leq j \leq r$. Тогда

$$\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha\right)^{\beta+1} \geq \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j\right)^{\alpha\beta+1}.$$

В самом деле, имеем

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha \geq r^{\alpha\beta+1},$$

откуда по неравенству Гёльдера

$$\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j\right)^{\alpha\beta+1} \leq r^{(\alpha\beta+1)(1-1/\alpha)} \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha\right)^{1/\alpha(\alpha\beta+1)} \leq \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha\right)^{\beta+1}.$$

Введем следующее обозначение. Если натуральное $m \geq 2$ и $U \in M(\mathbf{R}_+^m)$, то при $1 \leq j \leq m$ определим множества $\Gamma(U, j) = \{k(j) : \exists N_j, \text{ для которого } (k_1, \dots, k_{j-1}, N_j, k_{j+1}, \dots, k_m) \in U \text{ и } N_j \geq \max_{r \neq j} k_r\}$. Заметим, что $\Gamma(U, j) \in M(\mathbf{R}_+^{m-1})$ для всех j .

ЛЕММА 3. При $m \geq 2$ и $1 \leq j \leq m$ имеет место оценка

$$|\Gamma(U, j)| \leq ((m-1)!)^{2(m-1) \cdot m^{-1}} \cdot |U|^{(m-1) \cdot m^{-1}}.$$

Доказательство. Докажем лемму при помощи метода индукции. При $m = 2$, если $\Gamma(U, 1) = \{1, \dots, k_2\}$, то точка $(k_2, k_2) \in U$, а тогда $|U| \geq k_2^2 = |\Gamma(U, 1)|^2$. Аналогично оценивается $|\Gamma(U, 2)|$.

Пусть $m > 2$ и наша лемма уже доказана в пространствах размерности не больше $m - 1$. Фиксируем j и рассмотрим множества

$$\begin{aligned} \Gamma(U, j, r) &= \\ &= \{k(j) \in \Gamma(U, j) : \{n(j) \in \Gamma(U, j) : n_r = \\ &= k_r\} \geq k_r^{m-2}\} \end{aligned}$$

при $1 \leq r \leq m$, $r \neq j$,

$$\Gamma(U, j, r)_v = \{n(j) \in \Gamma(U, j, r): n_r = v\}$$

при $1 \leq v \leq v_0 = v_0(U, j, r)$ и

$$S(U, j, r)_v = \{k \in U: k(j) \in \Gamma(U, j, r)_v\}.$$

Докажем вначале, что

$$\Gamma(U, j) = \bigcup_{r \neq j} \Gamma(U, j, r). \quad (8)$$

Пусть $k(j) \in \Gamma(U, j)$. Тогда положим $s_0 \neq j$ таким, что

$$\min_{s \neq j} k_s = k_{s_0}.$$

Так как $\Gamma(U, j) \in M(\mathbf{R}_+^{m-1})$, множество

$$A = \{l(j): l_{s_0} = k_{s_0}, \quad 1 \leq l_s \leq k_s,$$

при $s \neq j, s_0\} \subset \Gamma(U, j)$ и

$$|A| = \prod_{s \neq j, s_0} k_s \geq k_{s_0}^{m-2},$$

откуда $k(j) \in \Gamma(U, j, s_0)$, и формула (8) доказана.

Далее, при фиксированном $v \in [1, v_0]$ множество $S(U, j, r)_v$, рассматриваемое как $(m-1)$ -мерное, принадлежит $M(\mathbf{R}_+^{m-1})$ и

$$\Gamma(S(U, j, r)_v, j) = \Gamma(U, j, r)_v.$$

Кроме того, так как

$$\Gamma(U, j, r) \in M(\mathbf{R}_+^{m-1}),$$

имеем

$$|\Gamma(U, j, r)_v| \geq |\Gamma(U, j, r)_{v_0}| \geq v_0^{m-2}$$

при $1 \leq v \leq v_0$. Поэтому, применяя предположение индукции и лемму 2 для $\alpha = (m-1)(m-2)^{-1}$ и $\beta = m-2$, мы получим, что при любом r

$$\begin{aligned} |\Gamma(U, j, r)| &= \sum_{v=1}^{v_0} |\Gamma(U, j, r)_v| \leq \\ &\leq \left(\sum_{v=1}^{v_0} |\Gamma(U, j, r)_v|^{(m-1)(m-2)^{-1}} \right)^{(m-1) \cdot m^{-1}} \leq \\ &\leq ((m-2)!)^{2(m-1) \cdot m^{-1}} \left(\sum_{v=1}^{v_0} |S(U, j, r)_v| \right)^{(m-1) \cdot m^{-1}} \leq \\ &\leq ((m-2)!)^{2(m-1) \cdot m^{-1}} |U|^{(m-1) \cdot m^{-1}}. \end{aligned}$$

Учитывая (8), окончательно получаем, что

$$|\Gamma(U, j)| \leq ((m-1)!)^{2(m-1) \cdot m^{-1}} |U|^{(m-1) \cdot m^{-1}}.$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Если $t \geq 2$, $1 < p < \infty$ и t -мерная последовательность чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2) и (3), то

$$a_k \leq \varepsilon_k (\Pi(k))^{p-1-1},$$

где последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2).

Доказательство. Положим вектор

$$\begin{aligned} \left[\frac{k}{2} \right] + 1 &= \left(\left[\frac{k_1}{2} \right] + 1, \dots, \left[\frac{k_m}{2} \right] + 1 \right), \\ \varepsilon_k^p &= 2^{mp} \cdot \sum_{n=[k/2]+1}^{\infty} a_n^p (\Pi(n))^{p-2} \geq 2^{mp} \sum_{n=[k/2]+1}^k a_n^p (\Pi(n))^{p-2} \geq \\ &\geq a_k^p \cdot \prod_{r=1}^m \left(2^p \sum_{n_r=[k_r/2]+1}^{k_r} n_r^{p-2} \right) \geq a_k^p (\Pi(k))^{p-1}, \end{aligned}$$

а это эквивалентно утверждению леммы.

ТЕОРЕМА Б (К. Сокол-Соколовский, см. [5, с. 94]). Если $t \geq 2$, $1 < p < \infty$ и функция $f(x) \in L_p(T^m)$, то ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму в метрике $L_p(T^m)$.

ЛЕММА 5. Пусть $t \geq 2$, $1 \leq v < t$, а числа $\beta_r \downarrow 0$ и

$$\beta_r = O(r^{-1/4(m-1)} (\ln r)^{2m})$$

при $r \rightarrow \infty$. Тогда кубичные частичные суммы v -крайнего ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \beta_r \sum_{\|k\|_p=r} \exp(ikx)$$

равномерно ограничены в метрике $L(T^v)$.

Доказательство. Пусть $p = 3/2$. Тогда, воспользовавшись теоремой А, получим, что при $v > 1$ (при $v = 1$ лемма очевидна)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{1 \leq \|k\|_p \leq r} \exp(ikx) \right\|_p &= \|\varphi_r(x)\|_p \leq \|\varphi_r(x)\|_1^{1/3} \cdot \|\varphi_r(x)\|_2^{2/3} \leq \\ &\leq C_1 r^{1/4(v-1) \cdot 1/3 + 1/4 \cdot v \cdot 2/3} = C_1 r^{1/4 v - 1/12}, \end{aligned}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Отсюда

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{r=j}^q \beta_r \sum_{\|k\|_p=r} \exp(ikx) \right\|_p &\leq \sum_{r=j}^{q-1} (\beta_r - \beta_{r+1}) \cdot \\ &\cdot \|\varphi_r(x) - \varphi_{j-1}(x)\|_p + \beta_q \|\varphi_q(x) - \varphi_{j-1}(x)\|_p \leq \\ &\leq 2C_1 \left(\sum_{r=j}^{q-1} (\beta_r - \beta_{r+1}) r^{1/4 v - 1/12} + \beta_q \cdot q^{1/4 v - 1/12} \right) \leq \\ &\leq 2C_1 (\beta_j j^{1/4 v - 1/12} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \beta_r (r^{1/4 v - 1/12} - (r-1)^{1/4 v - 1/12})) \leq \\ &\leq C_2 (j^{1/4(v+1-m) - 1/12} (\ln j)^{2m} + \sum_{r=j+1}^{\infty} r^{1/4(v+1-m) - 1/12} (\ln r)^{2m}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $j \rightarrow \infty$, где C_2 — некоторая постоянная. Поэтому наш ряд есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_{3/2}(T^v)$ и по теореме Б кубические частичные суммы этого ряда равномерно ограничены в метрике $L_{3/2}(T^v)$, а значит, и в метрике $L(T^v)$. Лемма 5 доказана.

ТЕОРЕМА В (К. И. Бабенко [6, с. 58–63]). При $m \geq 2$ m -мерный ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1/s(m-1)} \sum_{\|k\|_p=q} \exp(ikx) = \sum_{k \neq 0} \|k\|^{-1/s(m-1)} \exp(ikx)$$

является рядом Фурье функции $f(x) \in L_p(T^m)$ при $1 < p < 4m/(3m+1)$, а

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v^{-1/s(m-1)} \left\| \sum_{1 \leq \|k\| < v} \|k\|^{-1/s(m-1)} \exp(ikx) + \frac{1}{2} v^{-1/s(m-1)} \sum_{\|k\|=v} \exp(ikx) \right\|_{1,E} \geq C_3 \int_E \|x\|^{-1/s(m+1)} dx$$

для произвольного измеримого $E \subseteq T^m$, где постоянная $C_3 > 0$.

ТЕОРЕМА Г (Л. В. Жижиашвили [7]). Если $m \geq 2$, число $\alpha > 0$ и функция $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, 1, T^m)$, то ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму почти всюду на T^m .

ТЕОРЕМА Д ([8, с. 98 и 174]). Если вектор $M \geq 1$ и $P_M(x) = \sum_{k=1}^M b_k \exp(ikx)$, то при любом $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)$

$$\|P_M(x+h) - P_M(x)\|_1 \leq M_j |h_j| \|P_M(x)\|_1.$$

§ 3. Оценка роста констант Лебега. Докажем теорему 1. Для заданного U рассмотрим множества $\Gamma(U, j)$ (см. лемму 3),

$$V(U, j) = \{k \in U: k(j) \in \Gamma(U, j)\}$$

при $1 \leq j \leq m$, $\Phi(U, 1) = V(U, 1)$ и

$$\Phi(U, j) = V(U, j) \setminus \bigcup_{r=1}^{j-1} V(U, r)$$

при $2 \leq j \leq m$. Ясно, что если $k \in U$ и

$$k_{j_0} = \max_{1 \leq r \leq m} k_r,$$

то

$$k \in V(U, j_0).$$

Поэтому $U = \bigcup_{j=1}^m V(U, j) = \bigsqcup_{j=1}^m \Phi(U, j)$.

Далее, так как U и $\Gamma(U, j)$ при любом j являются множествами монотонного типа, то таковыми же будут и все $V(U, j)$. Итак, во-первых,

$$D_U(x) = \sum_{j=1}^m D_{\Phi(U, j)}(x), \quad (9)$$

а во-вторых,

$$D_{\Phi(U, j)}(x) = \sum_{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)} \exp(ik(\hat{j})x(\hat{j})) \sum_{r=v_1+1}^{v_2} \exp(irx_j),$$

где $v_q = v_q(k(\hat{j}))$ при $q = 1, 2$ — некоторые натуральные числа, причем $v_1 \leq v_2$ при любом $k(\hat{j})$ (если $v_1 = v_2$, считаем соответствующую сумму равной нулю). Отсюда (см. лемму 3)

$$\begin{aligned} \|D_{\Phi(U, j)}(x)\|_1 &= (2\pi)^{-m} \int_T \left(\int_{T^{m-1}} \left| \sum_{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)} \exp(ik(\hat{j})x(\hat{j})) \cdot \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{\exp(ix_j)}{1 - \exp(ix_j)} (\exp(iv_1x_j) - \exp(iv_2x_j)) \right| dx(\hat{j}) \Big) dx_j \leq \\ &\leq \int_T \frac{(2\pi)^{1/2}(1-m)}{2|x_j|} \left(\int_{T^{m-1}} \left| \sum_{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)} \exp(ik(\hat{j})x(\hat{j})) \cdot \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \left. (1 - \exp(i(v_2 - v_1)x_j)) \right|^2 dx(\hat{j}) \right)^{1/2} dx_j \leq \frac{1}{2} \int_T |x_j|^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)} |1 - \exp(i(v_2 - v_1)x_j)|^2 \right)^{1/2} dx_j \leq 2\pi \cdot \\ &\quad \cdot (V|\Gamma(U, j)| \ln|U| + \int_0^{|U|^{-1}} \left(\sum_{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)} |v_2 - v_1|^2 \right)^{1/2} dx_j) \leq \\ &\leq 2\pi (V|\Gamma(U, j)| \ln|U| + |U|^{-1} V|U| \left(\sum_{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)} v_2 \right)^{1/2}) \leq \\ &\leq 2\pi (V|\Gamma(U, j)| \ln|U| + 1) \leq \\ &\leq 2\pi (m-1)! |U|^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln|U| + 1). \end{aligned}$$

Учитывая (9), получаем утверждение теоремы 1.

§ 4. Некоторые свойства кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. Докажем положительное утверждение теоремы 2. Пусть v — натуральное число и $1 \leq j \leq m$. Тогда определим вектор $n = n(v, j) = (n_1, \dots, n_m)$, где $n_r = 0$ при $r \neq j$, а $n_j = v - 1$, и рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} S_{n, M}(x) &= \sum_{k=n+1}^M a_k \exp(ikx) = \exp(i(v-1)x_j) \cdot \\ &\cdot \sum_{k=1}^{M-n} a_{k+n} \exp(ikx) = \exp(i(v-1)x_j) \sum_{k=1}^{M_1} d_k \exp(ikx), \quad (10) \end{aligned}$$

где $M \geq n + 1$. Ясно, что $d_k \geq d_l$ при $1 \leq k \leq l \leq M_1$ и (см. лемму 4)

$$d_k = a_{k+n} \leq \varepsilon_{k+n} (\Pi(k+n))^{p-1} \leq \varepsilon_{n+1} (\Pi(k))^{p-1}. \quad (11)$$

Положим $q = \Pi(M_1)$. Пусть $\{b_r\}_{r=1}^q$ — это числа $\{d_k\}_{k=1}^{M_1}$, занумерованные в порядке убывания, а при равенстве — в порядке неубывания номеров. Тогда

$$\begin{aligned} \|S_{n,M}(x)\|_1 &= \left\| \sum_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) D_{U_r}(x) + b_q D_{U_q}(x) \right\|_1 \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) \|D_{U_r}(x)\|_1 + b_q \|D_{U_q}(x)\|_1, \end{aligned}$$

где $D_{U_r}(x)$ — соответствующее ядро Дирихле. Множества $U_r \in M(\mathbf{R}_+^m)$, а потому (см. теорему 1)

$$\begin{aligned} \|S_{n,M}(x)\|_1 &\leq 2\pi m! \left(\sum_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) r^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln r + 1) + \right. \\ &+ \left. b_q q^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln q + 1) \right) = 2\pi m! \left(\sum_{r=2}^q b_r r^{(m-1)(2m)^{-1}} \cdot \right. \\ &\cdot (\ln r + 1) - (r-1)^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln(r-1) + 1) + b_1 \Big) \leq \\ &\leq C_4 \sum_{r=1}^q b_r r^{-(m+1)(2m)^{-1}} (\ln r + 1), \quad (12) \end{aligned}$$

где постоянная C_4 зависит лишь от m . Обозначим через $\eta(r) = \max_{1 \leq \mu \leq r} \{\Pi(k), \text{ где } b_\mu = d_k\}$.

Предположим, что для некоторого r число

$$\eta(r) \leq r (\ln r + 1)^{-m+1}.$$

Тогда по лемме 1

$$r \leq r (\ln r + 1)^{-m+1} (1 + \ln(r (\ln r + 1)^{-m+1}))^{m-1} < r,$$

и мы пришли к противоречию. Стало быть,

$$\eta(r) > r (\ln r + 1)^{-m+1}$$

при любом r . Отсюда (см. также (11) и (12)) получаем

$$\begin{aligned} \|S_{n,M}(x)\|_1 &\leq \\ &\leq C_4 \sum_{r=1}^q \varepsilon_{n+1} (r (\ln r + 1)^{-m+1})^{p-1} \cdot r^{-(m+1)/2m} (\ln r + 1) \leq \\ &\leq C_4 \varepsilon_{n+1} \sum_{r=1}^q r^{(m+1)/2m - \delta - 1 - (m+1)/2m} (\ln r + 1)^m \leq C_5 \varepsilon_{n+1}, \quad (13) \end{aligned}$$

где число $\delta > 0$, а постоянная C_5 не зависит от M и n . Так как $\varepsilon_{n+1} \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$ и разность между прямоугольными частичными суммами нашего ряда представляется в виде суммы (разности) не более чем m выражений вида (10), из оценки (13) заключаем, что ряд сходится по Принг-

схейму в метрике $L(T^m)$. Отсюда сразу вытекает, что наш ряд есть ряд Фурье.

Докажем его сходимость. Фиксируем $j \in [1, m]$ и вектор $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)$. Тогда для произвольного M такого, что $q = \Pi(M) > h_j^{-1}$, аналогично проведенному выше рассуждению (см. (11)—(13), а также теорему Д) будем иметь

$$\begin{aligned} & \|S_{0,M}(x+h) - S_{0,M}(x)\|_1 \leq \\ & \leq \sum_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) \|D_{U_r}(x+h) - D_{U_r}(x)\|_1 + \\ & + b_q \|D_{U_q}(x+h) - D_{U_q}(x)\|_1 \leq h_j \sum_{r=1}^{[h_j^{-1}]} (b_r - b_{r+1}) r \cdot \\ & \cdot \|D_{U_r}(x)\|_1 + 2C_4 \varepsilon_1 \sum_{r=[h_j^{-1}]+1}^{\infty} r^{-\delta-1} (\ln r + 1)^m \leq \\ & \leq C_6 (h_j \sum_{r=1}^{[h_j^{-1}]} r^{-\delta} (\ln r + 1)^m + \sum_{r=[h_j^{-1}]+1}^{\infty} r^{-1-\delta} (\ln r + 1)^m) \leq \\ & \leq C_7 h_j^{1/\delta}, \quad (14) \end{aligned}$$

где число $\delta > 0$, а постоянные C_6 и C_7 не зависят от h_j и M . Ввиду произвольности j из оценки (14) вытекает, что существующая по доказанному ранее функция $f(x) \in \text{Lip}(1/2 \delta, 1, T^m)$, и для завершения доказательства первой части теоремы 2 остается лишь применить теорему Г.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 2. Вначале определим m -кратный ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(ikx), \quad (15)$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k=0, \\ A_r \|k\|^{-1/q(m-1)} & \text{при } (2m+1)^{r-1} < \|k\| < \\ & < (2m+1)^r, \text{ где } r=1, 2, \dots, \\ \frac{1}{2} (A_{r+1} + A_r) (2m+1)^{-1/q(m-1)} & \text{при } \|k\| = \\ & = (2m+1)^r, \text{ где } r=0, 1, \dots, \end{cases} \quad (16)$$

а

$$A_r = \sum_{q=r}^{\infty} q^{2m} (2m+1)^{-1/q(m-1)} \text{ при } r=0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим кубичные частичные суммы ряда (15):

$$S_r(x) = \sum_{k=-(2m+1)^r}^{(2m+1)^r} \alpha_k \exp(ikx).$$

Тогда при любом $r \geq 2$

$$\begin{aligned}
 S_r(x) - S_{r-1}(x) &= \\
 &= A_{r+1} \sum_{k=-(2m+1)^r, k \neq 0}^{(2m+1)^r} \|k\|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) + \\
 &+ (A_r - A_{r+1}) \left(\frac{1}{2} \sum_{\|k\|=(2m+1)^r} (2m+1)^{-1/4r(m-1)} \exp(ikx) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{0 < \|k\| < (2m+1)^r} \|k\|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) \right) - \\
 &\quad - A_r \sum_{k=-(2m+1)^{r-1}, k \neq 0}^{(2m+1)^{r-1}} \\
 \|k\|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) &= \\
 &= A_{r+1} M_r(x) + r^{2m} (2m+1)^{-1/4r(m-1)} \sigma_r(x) - A_r M_{r-1}(x).
 \end{aligned}$$

По теореме В $M_r(x)$ являются кубическими частичными суммами ряда Фурье функции $f(x) \in L_{10/9}(T^m)$, а потому по теореме Б

$$\|M_r(x)\|_1 \leq \|M_r(x)\|_{10/9} \leq C_8 < \infty.$$

Тогда по той же теореме В для любого множества положительной меры $E \subseteq T^m$

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-2m} \|S_r(x) - S_{r-1}(x)\|_{1,E} &= \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} (2m+1)^{-1/4r(m-1)} \|\sigma_r(x)\|_{1,E} \geq C_9 > 0,
 \end{aligned}$$

где постоянная C_9 зависит лишь от m и E . Теперь отметим, что $S_r(x) = S_{r,1}(x) + S_{r,2}(x)$, где в $S_{r,1}(x)$ входят те и только те члены, у которых $k_j = 0$ хотя бы для одного j . Тогда $S_{r,1}(x)$ представляется в виде конечной линейной комбинации (с коэффициентами, не зависящими от r) сумм, оцененных в лемме 5, а значит,

$$\|S_{r,2}(x) - S_{r-1,2}(x)\|_{1,E} \geq \frac{1}{2} C_9 r^{2m} \quad (17)$$

для достаточно больших r . Но это означает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^m \alpha_k \prod_{j=1}^m \cos k_j x_j \quad (18)$$

расходится по кубам почти всюду. Если бы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \exp(ikx) \quad (19)$$

сходился по кубам почти всюду на T^m , то тем же свойством обладал бы и ряд (18), и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, ряд (19) расходится по кубам на множестве положительной меры. Из аналогичных соображений следует, что для кубических частичных сумм ряда (19) выполнена оценка (17) (с другой константой в правой части). Если предположить, что (19) является рядом Фурье, то норма его кубической частичной суммы

$$\left\| \sum_{k=1}^{(2m+1)^r} \alpha_k \exp(ikx) \right\|_1 = O((\ln(2m+1)^r)^m) = O(r^m) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Полученное противоречие доказывает, что (19) не является рядом Фурье. Нам осталось лишь проверить, что ряд (19) принадлежит R_p при $1 < p < 2m(m+1)^{-1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p (\Pi(k))^{p-2} &= \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{(2m+1)^{r-1} < \|k\| \leq (2m+1)^r, k \geq 1} \alpha_k^p (\Pi(k))^{p-2} \leq \\ &\leq \sum_{r=1}^{\infty} A_r^p (2m+1)^{-1/4p(r-1)(m-1)} \sum_{k=1}^{(2m+1)^r} (\Pi(k))^{p-2} \leq \\ &\leq C_{10} \sum_{r=1}^{\infty} r^{2mp} (2m+1)^{-1/2rp(m-1)} (2m+1)^{r(m(p-1))} = \\ &= C_{10} \sum_{r=1}^{\infty} r^{2mp} (2m+1)^{-1/2r(m+1)(-p+2m/(m+1))} < \infty, \end{aligned}$$

где C_{10} — некоторая постоянная. Что и требовалось доказать.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
27.11.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю д и н В. А. Поведение констант Лебега // Математические заметки. 1975. Т. 17, вып. 3. С. 401—405.
- [2] Д ъ я ч е н к о М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Мат. сб. 1986. Т. 129, вып. 1. С. 55—72.
- [3] Б а р и Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [4] К а р а ц у б а А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
- [5] Ж и ж и а ш в и л и Л. В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов // УМН. 1973. Т. 28, вып. 2. С. 65—119.
- [6] Б а б е н к о К. И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. Препринт № 52 ИПМ АН СССР, М., 1971.
- [7] Ж и ж и а ш в и л и Л. В. О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. 1975. Т. 80, № 1. С. 17—49.
- [8] Н и к о л ь с к и й С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.