РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1972

Заседание 15 февраля.

Жуковский Е. Л., Об одном статистическом подходе к решению некоторых типов некорректно поставленных задач.

Заседание 22 февраля.

Темпельман А. А., О сходимости и состоятельности линейных регрессионных оценок.

Пусть T — произвольное множество и $\xi(t)$ — (вещественная) случайная функция на T над измеримым пространством элементарных событий $(\Omega, \mathscr{B})$; $\mathscr{P}_\xi$ — семейство всех вероятностных мер P на $\mathscr{B}$ таких, что $\mathrm{E}_P\,[\xi(t)]^2 < \infty$ при $t \in T$; если $P \in \mathscr{P}_\xi$, то $H_P(\xi)$ — гильбертово пространство случайных величин (с. в.) γ с нормой $\|\gamma\| = (\mathrm{E}_P\gamma^2)^{1/2} < \infty$, порожденное семейством с.в. $\{\xi(t), t \in T\}$; $\mathscr{K}(T)$ — множество всех неотрицательно определенных функций («ядер») на $T \times T$; $H(R)$ — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром R $(R \in \mathscr{K}(T))$ (см. [1]). Пусть $R \in \mathscr{K}(T)$ и M — конечномерное линейное пространство функций на T. Обозначим: $\mathscr{P}_{R,M}$ — семейство всех мер $P \in \mathscr{P}_\xi$, относительно которых функция $m_P(t) = \mathrm{E}_P\xi(t) \in M$ и $\mathrm{cov}_P(\xi(s), \xi(t)) = R(s,t)$; $\hat{m}^*_{R,M}(t)$ — равномерно относительно $\mathscr{P}_{R,M}$ наилучшая несмещенная линейная оценка среднего значения $m_P(t)$ (см. [6]). Пусть $P, Q \in \mathscr{P}_\xi$; будем говорить, что с.в. γ' из $H_P(\xi)$ является *линейным образом* с. величины γ из $H_Q(\xi)$ (обозначение: $\gamma' \overset{P,Q}{\sim} \gamma$), если

$$(P)\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)}\xi\left(t_i^{(n)}\right) = \gamma', \text{ коль скоро } (Q)\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)}\xi\left(t_i^{(n)}\right) = \gamma$$

(иными словами, с.в. γ' может быть построена по $\{\xi(t), t \in T\}$ с помощью тех же линейных операций относительно меры P, что и γ относительно меры Q).

Будем говорить, что линейная относительно семейства $\mathscr{P}_{R,M}$ оценка $\hat{m}(t)$ *определяется ядром* B, если $\hat{m}(t) \overset{P,Q}{\sim} \hat{m}^*_{B,M}(t)$ при любом $t \in T$ для всех $P \in \mathscr{P}_{R,M}$ и $Q \in \mathscr{P}_{B,M}$. Это понятие близко к понятию псевдонаилучшей линейной оценки, введенному ранее Ю. А. Розановым [8] (см. также [2]). Оценку, определяемую ядром B, обозначим $\hat{m}_{B,M}(t)$. Очевидно, это несмещенная линейная оценка среднего значения $m_P(t) = \mathrm{E}_P\xi(t)$ при $P \in \mathscr{P}_{R,M}$. Если $R, B \in \mathscr{K}(T)$, то запись $R \prec B$ означает, что $kB - R \in \mathscr{K}(T)$ при некотором $k > 0$. Напомним, что следующие три условия равносильны (см. [1]): 1) $R \prec B$; 2) $H(R) \subset H(B)$; 3) $R(\cdot, t) \in H(B)$ и в $H(B)$ оператор L^B_R: $\left(L^B_R\varphi\right)(t) = \langle R(\cdot, t), \varphi(\cdot)\rangle_{H(B)}$ непрерывен.

Пусть $T_n \subset T$, $n = 1, 2, \ldots$, и $T_n \uparrow T$; $\hat{m}^{(n)}_{B,M}(t)$ — определяемая ядром B оценка, построенная по сужению $\xi(t)$ на T_n.

Теорема 1. *Условие $R \prec B$ (на T) необходимо и достаточно для того, чтобы для любого M существовали оценки $m^{(n)}_{B,M}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, и при $P \in \mathcal{P}_{R,M}$, $t \in T$ существовал предел* $(P)\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \hat{m}^{(n)}_{B,M}(t) \equiv \hat{m}_{B,M}(t)$ (равенство имеет место с P-вероятностью 1).

Условие $R \prec B$ необходимо и для существования указанных оценок и предела для всякого одномерного пространства $M \subset H(B)$.

Теорема 2. *Пусть $R \prec B$. Последовательность $\hat{m}^{(n)}_{B,M}(t)$ $\mathcal{P}_{R,M}$-состоятельна (т. е. ее предел $\hat{m}_{B,M}(t) \equiv \mathrm{E}_P\xi(t)$ с P-вероятностью 1 при $P \in \mathcal{P}_{R,M}$) тогда и только тогда, когда $L^B_R(M \cap H(B)) = \{0\}$, или, иными словами, когда $M \cap H(B) \subset H(B) \ominus \ominus [H(R)]_{H(B)}$ ($[H(R)]_{H(B)}$ — замыкание в $H(B)$ линейного многообразия $H(R)$).*

Ряд результатов в этом направлении был ранее получен Ю. А. Розановым [3], [8] (см. также [2]) и А. С. Холево [5].

Теорема 3. *Пусть $R \prec B$. Оценка $\hat{m}_{B,M}(t)$ совпадает с $\mathcal{P}_{R,M}$-наилучшей несмещенной линейной оценкой $\hat{m}^{*}_{R,M}(t)$ тогда и только тогда, когда пространство $M \cap H(B)$ инвариантно относительно оператора L^B_R.*

Если T — измеримое множество в m-мерном вещественном пространстве $\mathcal{R}^m$, $M \subseteq L^2(T)$, ядро R непрерывно и B — δ-функция Дирака, то, как известно, оценка $\hat{m}_{\delta,M}(t)$ совпадает с оценкой по методу наименьших квадратов, $H(\delta) = L^2(T)$ и условие $R \prec \delta$ равносильно тому, что $R(\cdot, t) \in L^2(T)$ и оператор L^δ_R: $(L^\delta_R\varphi)(t) = \int_T R(s,t)\varphi(s)\,ds$ непрерывен в $L^2(T)$ (это имеет место, например, если $\iint_{TT}[R(s,t)]^2 \times dsdt < \infty$ или $\sup_{t\in T}\int_T |R(s,t)|\,ds < \infty$); если $R(s,t) = R_1(s-t)$, то $R \prec \delta$ равносильно наличию у R_1 ограниченной спектральной плотности. Таким образом, теоремы 1—3 содержат критерии сходимости, состоятельности и эффективности оценок наименьших квадратов. Если $T = \{1,\ldots,m\}$ $(m < \infty)$ и B — единичная матрица, теорема 3 превращается в известную теорему Крускала [7]. Теорема 1 содержится в заметке автора [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Ароншайн, Теория воспроизводящих ядер, Математика, **7**, 2 (1963), 67—130.

[2] И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, М., изд-во «Наука», 1970.

[3] Ю. А. Розанов, Гауссовские бесконечномерные распределения, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **108**, 1968.

[4] А. А. Темпельман, О линейных оценках регрессии, ДАН СССР, **191**, 4 (1970), 772—775.

[5] А. С. Холево, Об оценках коэффициентов регрессии, Теория вероят. и ее примен., **XIV**, 1 (1969), 78—101.

[6] J. Hajek, On linear estimation theory for an infinite number of observations, Теория вероятн. и ее примен., **6**, 2 (1961), 182—193.

[7] W. Kruskal, When are Gauss-Markov and least squares estimators identical? A coordinate-free approach, Ann. Math. Statist., **39**, 1 (1968), 70—75.

[8] Yu. A. Rozanov, On a new class of estimates, Multivariate Analysis, vol. 2, New York, 1969, 437—441.

Заседание 14 марта.

Степанов А. В. (II Московский медицинский институт им. Н. И. Пирогова) **Применение последовательного критерия отношения вероятностей для предсказания исходов заболеваний.**

Прогноз исходов заболеваний является одной из важнейших задач клинической медицины. Применение математических методов позволяет во многих случаях повысить точность прогноза. Задача прогнозирования исходов заболеваний может быть сведена к соответствующей задаче проверки статистических гипотез. Применение последовательного анализа для предсказания исходов целесообразно, если учитывать сложность и стоимость измерения отдельных показателей состояния больных.

В докладе рассматривался последовательный критерий отношения вероятностей для проверки простой гипотезы против простой конкурирующей, когда независимые случайные величины выборочной последовательности имеют различные законы распределения. Для этого случая доказана теорема об окончании с вероятностью 1 последовательного процесса за конечное число шагов. Получены нижние оценки для среднего числа шагов; рассматривается вопрос об их минимизации при упорядочении членов последовательности по информационной мере Кульбака. Для усеченного последовательного критерия отношения вероятностей найдены верхние оценки вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода.

Рассмотренный последовательный критерий отношения вероятностей применялся для предсказания исходов (летальных и нелетальных) при крупноочаговом инфаркте миокарда [1] и для прогноза закрытия полости распада у впервые выявленных больных кавернозным туберкулезом легких [2]. Практическое применение последовательного критерия показало его достаточно высокую эффективность (ошибка 6—12%).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. И. Жаров, А. В. Степанов, Математическое прогнозирование исходов при крупноочаговом инфаркте миокарда по показателям гемодинамики, Кардиология, **12** (1970), 73—80.

[2] Н. Я. Батманов, П. И. Кузнецов, А. В. Степанов, Ю. Г. Григорьев, Г. И. Кириенко, Применение последовательной процедуры распознавания для прогнозирования закрытия полостей распада у больных туберкулезом легких, Проблемы туберкулеза (принято к печати, 1972).

Заседание 4 апреля.

Москвин Д. А., О траекториях эргодических эндоморфизмов тора, начинающихся на гладкой кривой.

Пусть $W = \| a_{ij} \|$ невырожденная целочисленная матрица второго порядка. На двумерном торе Ω_2 матрица W определяет сохраняющее инвариантную нормированную меру μ_2 преобразование по правилу

$$T\mathbf{x} = (\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2\},\ \{a_{21}x_1 + a_{22}x_2\}),\ \ \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \ \mathbf{x} \in \Omega_2,$$

и $\{\cdot\}$ — знак дробной доли. Если среди корней характеристического многочлена матрицы W нет корней из единицы, то преобразование T будет перемешиванием всех степеней (см. об этом [1]). Ниже рассматриваем лишь такие матрицы W.

Пусть C класс непрерывных на Ω_2 функций, принимающих комплексные значения. Из эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина следует существование множества

$\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega_2$, $\mu_2(\widetilde{\Omega}) = 1$, такого, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k \mathbf{x}) = \int_{\Omega_2} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \ \mathbf{x} \in \Omega_2, f \in C. \tag{1}$$

Пусть теперь $L = \{(\xi, \varphi(\xi)), \ a \leqslant \xi \leqslant b\}$ — дифференцируемая кривая в Ω_2. Через дифференциал дуги на L естественным образом определяется мера $\widetilde{\mu}$. Естественным образом возникает вопрос: будет ли равенство (1) выполняться на множестве $\widetilde{L} \subseteq L$, $\widetilde{\mu}(\widetilde{L}) = \widetilde{\mu}(L)$?

Теорема 1. *Пусть $\varphi(\xi)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$ и вторая производная $\varphi''(\xi)$ обращается в нуль лишь в конечном числе точек $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in [a, b]$. Предположим, что с некоторыми постоянными λ, ω выполнено условие*

$$|\varphi''(\xi)| \geqslant \lambda |\xi - a_1|^{\omega} \ldots |\xi - a_\nu|^{\omega}, \quad a \leqslant \xi \leqslant b, \quad \lambda, \omega > 0.$$

Тогда ответ на поставленный вопрос утвердительный.

Теорема 2. *Пусть D область в Ω_2 с кусочно дифференцируемой границей, $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \varphi(\xi))$ — текущий радиус-вектор кривой L. В условиях теоремы 1 найдется постоянная $c > 0$, для которой*

$$\mu\{\xi\colon a \leqslant \xi \leqslant b, \{\boldsymbol{\xi} W^n\} \in D\} = (b - a)\,\mu_2(D) + O\left(e^{-cn}\right)$$

(здесь μ — мера Лебега на прямой).

Метод, использованный при доказательстве этих теорем, дает следующие приложения к метрической теории чисел. Пусть θ, $|\theta| > 1$,— вещественный корень неприводимого над полем рациональных чисел квадратного трехчлена $p(\theta) = \theta^2 - a_1\theta - a_0$ (a_0, a_1 целые числа), и $\widetilde{\theta}$ второй корень этого трехчлена. Определим число $\psi = \psi(\theta)$ по правилу

$$\psi(\theta) = 3/2 - \ln|\widetilde{\theta}|/2\ln|\theta|, \ |\theta| > |\widetilde{\theta}|; \qquad \psi(\theta) = 2, \ |\theta| = |\widetilde{\theta}|;$$

$$\psi(\theta) = 1 + \ln|\theta|/\ln|\widetilde{\theta}|, \qquad |\theta| < |\widetilde{\theta}|.$$

Теорема 3. *Пусть периодическая с периодом 1 вещественнозначная функция $h(t)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|h(t) - h(t')| \leqslant H|t - t'|, \ t, t' \in [0,1], \ H > 0.$$

Пусть, кроме того,

$$\int_0^1 h(t)\, dt = 0, \ \sigma^2 = \lim_{n} \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} h(t\theta^k) \right)^2 dt > 0.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$\mu\left\{\xi\colon a \leqslant \xi \leqslant b, \frac{\sqrt{\psi}}{\sigma\sqrt{n(\psi - 1)}} \sum_{n/\psi \leqslant k \leqslant n} h(\xi\theta^k) \leqslant z\right\} \to \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du.$$

Обозначим R_p остаток в распределении дробных долей последовательности $\{\xi\theta\}$, $\{\xi\theta^2\}, \ldots$ (определение см. в [2]).

Теорема 4. *Для почти всех ξ по мере Лебега $R_p = O\left(p^{1/2+\varepsilon}\right)$, где ε сколь угодно малое фиксированное число > 0.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Леонов, Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., изд-во «Наука», 1964.

[2] Хуа Ло-кен, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, М., изд-во «Мир», 1964.

Сильвестров Д. С., Предельные теоремы для суперпозиции случайных процессов.

Изучаются условия сходимости распределений и условия сходимости в топологиях U и I суперпозиции случайных процессов без разрывов второго рода, аналогичные приведенным в работах [1] — [3]. Рассматриваются приложения полученных результатов к обобщенным процессам восстановления. Пусть $(\tau(\varepsilon, k), \gamma(\varepsilon, k))$, $k \geqslant 1$,— последовательность случайных величин, принимающих значения в $[0, \infty) \times R_l$.

Введем в рассмотрение случайный процесс

$$\xi_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon(t)} \gamma(\varepsilon, k), \, t \geqslant 0,$$

где

$$\nu_\varepsilon(t) = \max\left(n: \sum_{k=1}^{[tV(\varepsilon)]} \tau(\varepsilon, k) \leqslant t\right), \; t \geqslant 0,$$

$v(\varepsilon)$ — неслучайная функция такая, что $v(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Процесс $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, в соответствии с терминологией [4] будем называть обобщенным процессом восстановления.

Пусть D_T — пространство функций на $[0, T]$ без разрывов второго рода и непрерывных справа, $\mathscr{B}_T$ — σ-алгебра борелевских подмножеств D_T, $U_{\xi(s), T}$ — пространство измеримых относительно $\mathscr{B}_T$ функционалов на D_T, непрерывных в равномерной топологии почти всюду по мере, индуцируемой случайным процессом $\zeta(s)$, $s \in [0, T]$, на σ-алгебре $\mathscr{B}_T$.

Пусть также

$$\Delta(x(t), c, T) = \sup_{|t'-t''| \leqslant c, \, t', t'' \in [0, T]} |x(t') - x(t'')|.$$

Теорема 1. *Если выполняются условия*

1) $$\sum_{k=1}^{[tV(\varepsilon)]} (\tau(\varepsilon, k), \gamma(\varepsilon, k)), \, t \geqslant 0, \Rightarrow (\tau(t), \gamma(t)), \; t \geqslant 0, \text{ при } \varepsilon \to 0^*,$$

где: $\gamma(t)$, $t \geqslant 0$,— *непрерывный с вероятностью* 1 *случайный процесс,* $\tau(t)$, $t \geqslant 0$,— *строго монотонно возрастающий с вероятностью* 1 *случайный процесс такой, что* $\tau(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$ (*что необходимо и достаточно для того, чтобы случайный процесс* $\nu(t) = \sup(s: \tau(s) \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, *был определен для всех* $t \geqslant 0$ *и непрерывен с вероятностью* 1),

2) $$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P}\left\{\Delta\left(\sum_{k=1}^{[tV(\varepsilon)]} \gamma(\varepsilon, k), c, T\right) > \sigma\right\} = 0, \quad \sigma, T > 0,$$

то для любого функционала $f(\cdot) \in U_{\gamma(\nu(s)), T}$, $T > 0$,

$$f(\xi_\varepsilon(t)) \Rightarrow f(\gamma(\nu(s))) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Более подробно изучается случай, когда последовательность $(\tau(\varepsilon, k), \gamma(\varepsilon, k))$, $k \geqslant 1$, представляет собой последовательность независимых равномерно бесконечно малых случайных величин.

Рассматриваются также приложения условий сходимости суперпозиции случайных процессов к полумарковским процессам с конечным и счетным множеством состояний и к случайным блужданиям.

---

* Символ $\Rightarrow$ означает слабую сходимость (в точках непрерывности) функций распределения случайных величин или слабую сходимость конечномерных распределений случайных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. С. Сильвестров, Предельные распределения для суперпозиции случайных функций, ДАН СССР, **200**, 1 (1971), 43—44.
[2] Д. С. Сильвестров, О сходимости сложных случайных функций в I-топологии, ДАН СССР, **202**, 3 (1972), 539—540.
[3] Д. С. Сильвестров, О сходимости слабозависимых процессов в равномерной топологии. I, Теория вероят. и матем. статистика, 6 (1972), 109.
[4] А. А. Боровков, О сходимости слабозависимых процессов к винеровскому, Теория вероят. и ее примен., XII, 2 (1967), 193—221.

Заседание 11 апреля.

Линник Ю. В., О некоторых общих вопросах теории последовательного оценивания.

Настоящее сообщение излагает некоторые результаты, полученные автором доклада совместно с Л. Б. Клебановым и А. Л. Рухиным.

В задачах последовательного оценивания оптимальные в том или ином смысле для всех значений оцениваемого параметра процедуры существуют весьма редко. Ввиду этого целесообразно рассматривать асимптотически оптимальные процедуры, при цене одного опыта $c \to 0$. Проведя формальную аналогию с теорией суммирования независимых случайных величин в условиях предельной пренебрегаемости, можно ввести понятие об областях притяжения асимптотически оптимальных управлений оцениванием к тем или иным управлениям.

Автору, Л. Б. Клебанову и А. Л. Рухину удалось найти две области притяжения для процедур асимптотически оптимального управления оцениванием. При этом области притяжения оказались весьма обширными, в том смысле, что рассматриваемые последовательные процедуры оценивания выходят за рамки классической теории А. Вальда, так как имеют несколько функций потерь.

Будем рассматривать вещественную прямую R^1 с борелевой σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, снабженную семейством мер P_θ, зависящих от вещественного параметра θ, принадлежащего компакту Θ. Будем считать, что меры P_θ имеют плотность по лебеговой мере $p(x, \theta)$, удовлетворяющую условиям Ибрагимова — Хасьминского «отсутствия разрывов в информационных количествах» (см. [1], [2]). Параметр θ оценивается на основании последовательных независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots$ с марковским моментом остановки τ с помощью скалярной статистики $T_\tau(x_1, \ldots, x_\tau)$. При данном $k \geqslant 1$ фиксируем k функций потерь $W_1, \ldots, W_k$. Это выпуклые неотрицательные дифференцируемые функции такие, что $W_j(0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Далее, пусть даны k выпуклых на положительной полуоси функций $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$ и функция $F(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ неотрицательных переменных $\xi_1, \ldots, \xi_k$, возрастающая по каждой переменной. Мерой качества процедуры (τ, T_τ) будет служить величина

$$F\left(\int \Psi_1(\mathrm{E}_\theta W_1(T_\tau - \theta))\, d\mu_1(\theta), \ldots, \int \Psi_k(\mathrm{E}_\theta W_k(T_\tau - \theta))\, d\mu_k(\theta)\right), \tag{1}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_k$ — некоторые вероятностные меры на Θ, абсолютно непрерывные по мере Лебега.

Далее предполагаются условия:

$$0 < \gamma_j = \lim_{t\to 0} \frac{W_j'(t)}{t^{\sigma_j}} < \infty, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

$$0 < \delta_j = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi_j(t)}{t^{\tau_j}} < \infty, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

$$0 < \lim_{t\to 0} \frac{F(t, \ldots, t)}{t^{\rho}} < \infty, \qquad \int |t|^2 d\mu_j(t) < \infty, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

где $\gamma_j, \sigma_j, \delta_j, \tau_j, \rho, r$ — какие-либо положительные константы.

Пусть параметр $N \to \infty$; рассмотрим всевозможные процедуры оценивания (τ, T_τ) под условием:

$$E_\theta \tau \leqslant N \qquad \forall \theta \in \Theta.$$

Тогда имеем при $N \to \infty$

$$F\left(\int \Psi_1 (E_\theta W_1 (T_\tau - \theta))\, d\mu_1(\theta), \ldots, \int \Psi_k (E_\theta W_k (T_\tau - \theta))\, d\mu_k(\theta)\right) \geqslant$$

$$\geqslant F\left(\int \Psi_1 (E_\theta W_1 (\hat{T}_{[N]} - \theta))\, d\mu_1(\theta), \ldots, \int \Psi_k (E_\theta W_k (\hat{T}_{[N]} - \theta))\, d\mu_k(\theta)\right)(1 + o(1)).$$

Здесь $\hat{T}_{[N]}$ оценка максимального правдоподобия θ по наблюдениям $x_1, \ldots, x_{[N]}$. Таким образом, при условии (2) «областью притяжения» асимптотически оптимальных процедур вида (1) является тривиальное управление: $\tau = [N]$; $T_\tau = \hat{T}_{[N]}$.

Если вместо условия (2) ввести условие: $\int (E_\theta \tau)\, d\mu_0(\theta) \leqslant N$, где $\mu_0(\theta)$ какая-либо мера, абсолютно непрерывная по всем мерам $\mu_1, \ldots, \mu_k$, то областью притяжения процедур типа (1) при некоторых дополнительных условиях станет нетривиальное управление типа плана первого вхождения.

Заметим еще, что байесовы процедуры получаются из (1) при $k = 1$ и линейных функциях F и Ψ_1. Далее, результаты о минимаксных процедурах получаются из результатов о процедурах типа (1) при $k = 1$, $\Psi(\cdot) = (\cdot)^m$, $F = (\cdot)^{1/m}$ и $m \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Асимптотическое поведение обобщенных байесовских оценок, ДАН СССР, 194, 2 (1970), 257—260.

[2] Ю. В. Линник, И. В. Романовский, К теории последовательного оценивания, ДАН СССР, 194, 2 (1970), 270—272.

Заседание 18 апреля.

Ротарь Г. В., Одна задача об управлении резервом.

На базу материально-технического снабжения в течение некоторого периода длины T поступают непредвиденные планом требования на некую продукцию. Пусть $S(t)$ $(0 < t < T)$ — суммарный объем требований, поступивших к моменту t — случайная величина (с.в.), распределенная по сложному пуассоновскому закону, т. е. $S(t) = \sum_{i=1}^{\nu_t} X_i$, где ν_t — пуассоновская величина с параметром λt, а $\{X_i\}_{i=1}^{\nu_t}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных положительных с.в. Пусть $MX_i = m$, $MX_i^2 = m^2 + \sigma^2 = \mu_2$ и $MX^3 = \mu_3$.

На начало периода $(0, T)$ запланирована на базу поставка величины y. Пусть c_1 — издержки из-за пролеживания средств, при отвлечении единицы продукции в резерв на единицу времени, c_2 — издержки из-за нехватки единицы продукции в единицу времени. Тогда средние суммарные издержки равны

$$D(y) = c_1 \int_0^T \mathbf{M}(y - S(t))^+ \, dt + c_2 \int_0^T \mathbf{M}(S(t) - y)^+ \, dt,$$

где $x^+ = \max\{0, x\}$. Пусть y_0 таково, что $D(y_0) = \min\limits_{y \geqslant 0} D(y)$.

Если условие

$$(1 - e^{-\lambda t})(\lambda T)^{-1} < \delta = c_2(c_1 + c_2)^{-1} \tag{1}$$

не выполнено, то $y_0 = 0$. Если (1) выполнено, то $y_0 > 0$. Для простоты изложения предположим, что с.в. X_i имеют плотность вероятностей. Отказ от этого предположения влечет лишь некоторые изменения чисто технического характера в формулировках и доказательствах. В этом случае, если выполнено (1), то y_0 есть решение уравнения

$$(T)^{-1} \int_0^T \mathbf{P}(S(t) < y) \, dt = \delta. \tag{2}$$

Для величины y_0 получен ряд оценок. В качестве иллюстрации приведем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda T > 10^2 \alpha (1 - \delta)^{-2}$, *где* $\alpha = \mu_2 m^{-2} + \beta$, $\beta = \mu^3 (\mu_2)^{-3/2}$. *Тогда*

$$\delta m \lambda T (1 - \varphi_2(\lambda T)) \leqslant y_0 \leqslant \delta m \lambda T (1 + \varphi_1(\lambda T)),$$

где

$$\varphi_1(u) = 10\alpha/\delta \sqrt{u}, \qquad \varphi_2(u) = [10\alpha/\delta \sqrt{u} + (\delta^{-1} - 1)\gamma(u)](1 - \gamma(u))^{-1},$$

$$\gamma(u) = \Phi\{m\sqrt{u}/\sqrt{\mu_2}(\delta + 10\alpha/\sqrt{u} - 1)\} \leqslant 1/2,$$

$\Phi(\cdot)$ — *функция стандартного нормального распределения.*

Из теоремы 1, в частности, следует, что при $\delta < 1$ $\lim\limits_{\lambda T \to \infty} y_0 (\lambda T)/\delta m \lambda T = 1$.

При доказательстве этой теоремы распределение с.в. $S(t)$ аппроксимировалось нормальным. Погрешность аппроксимации оценивалась следующим полученным неравенством:

$$\sup_x |\mathbf{P}(Z_t < x) - \Phi(x)| \leqslant 2{,}23 \cdot \beta/\sqrt{\lambda t}, \quad \text{где } Z_t = (S(t) - m\lambda t)[(m^2 + \sigma^2)\lambda t]^{-1/2}.$$

Указанное неравенство есть аналог неравенства Берри — Эссеена. Заметим лишь, что здесь, в отличие от классического случая, в ляпуновском отношении фигурируют не центральные, а абсолютные моменты.

Пусть теперь плановый период разделен на k интервалов с длинами $T_1, \ldots, T_k$, так что внутри каждого из этих интервалов $S_i(t)$ — с.в., распределенная по сложному пуассоновскому закону. На начало i-го интервала запланирована поставка величины $\tilde{y}_i$. Пусть $x_i \gtrless 0$ — величина переходящего с i-го на $(i+1)$-й интервал запаса (отрицательность величины X_i означает задолженность базы). Допустим, что база в начале i-го интервала $(i \geqslant 2)$, учитывая величину x_{i-1}, имеет право провести коррекцию, т. е. потребовать поставку величины v_i, вообще говоря, отличной от $\tilde{y}_i$. Пусть c_3 — плат за уменьшение запланированной поставки на единицу продукции, а c_4 — плата за увеличение поставки на единицу продукции. Заметим, что $z_i = \tilde{y}_i + x_{i-1}$ — резерв, который база может получить бесплатно, а $y_i = v_i + x_i$ — величина резерва, которая пойдет на удовлетворение требований, поступивших в i-й период. Ограничимся пока случаем $k = 2$. Оптимальное поведение базы зависит от соотношения между величинами c_1, c_2, c_3 и c_4. Здесь будем предполагать, что

$$c_1 T_2 > c_3 \text{ и } c_2 T_2 > c_4. \tag{3}$$

Условия (3), как нетрудно видеть, указывают на разумность проведения коррекции. Введем ряд обозначений. Пусть $\varkappa_i(l)$ — решение уравнения $\mathbf{P}(S_i(T_i) < y) = l$. Для $\varkappa_i(l)$ справедливы, в частности, следующие оценки:

$$m\lambda T_i + \sigma_{T_i} \Phi^{-1}(l - 2{,}23\beta/\sqrt{\lambda T}) \leqslant \varkappa_i(l) \leqslant m\lambda T_i + \sigma_{T_i} \Phi^{-1}(l + 2{,}23\beta/\sqrt{\lambda T}),$$

где $\sigma^2_{T_i} = \mu_2 \lambda T_i$, а $\Phi^{-1}(u)$ — обратная функция Лапласа.

Пусть $y_{i,0}$ — решение уравнения (2) с заменой T на T_i, $y_{*,i}$ и $y'_{*,i}$ — решения (2) с заменой T на T_i, и δ соответственно на $(\delta - c_4/(c_1 + c_2)\, T_i)$ и на $(\delta + c_3/(c_1 + c_2)\, T_i)$. Если решение уравнения (2) при указанной замене не существует, соответствующие величины будем полагать равными нулю.

Теорема 2. *Пусть $k = 2$, справедливо (3) и $y_{1\,\text{опт}}$, $\tilde{y}_{2\,\text{опт}}$, $y_{2\,\text{опт}}$ — величины, при которых суммарные издержки минимальны. Тогда*

$$y_{2\text{опт}} = \begin{cases} y_{*,2}, & \text{если} \quad z_2 \leqslant y_{*,2}, \\ z_2, & \text{если} \quad y_{*,2} \leqslant z_2 \leqslant y'_{*,2}, \\ y'_{*,2}, & \text{если} \quad y'_{*,2} \leqslant z_2 \leqslant y'_{*,2} + \tilde{y}_2 \\ x_1, & \text{если} \quad z_2 \geqslant y'_{*,2} + \tilde{y}_2, \end{cases}$$

$$y_{1\text{опт}} = y_{1,0}, \quad \text{если} \quad y_{1,0} \leqslant y'_{*,2},$$

$$y'_{*,2} \leqslant y_{1\text{опт}} \leqslant y_{1,0}, \quad \text{если} \quad y_{1,0} \geqslant y'_{*,2},$$

$$\varkappa_1(\delta_1) + y_{*,2} - y_{1\text{опт}} \leqslant \tilde{y}_{2\text{опт}} \leqslant \varkappa_1(\delta_1) + y'_{*,2} - y_{1\text{опт}},$$

где $\delta_1 = c_4(c_3 + c_4)^{-1}$.

Случай, когда условие (3) не выполнено, также поддается исследованию. Но мы здесь на этом останавливаться не будем.

Трудность решения задачи при $k > 2$ резко возрастает. Получено несколько приближенных решений. Наиболее простое из них таково:

$$\tilde{y}_{i\text{опт}} = y_{i,0} + \varkappa_{i-1}(\delta_1) - y_{i-1,0}, \text{ если } \varkappa_{i-1}(\delta_1) > y_{i-1,0} \text{ и } \tilde{y}_{i\,\text{опт}} = y_{i,0} \text{ в противном случае.}$$

Ряд соображений указывает на то, что при таких значениях плановых поставок $\tilde{y}_{i\,\text{опт}}$ материальные издержки будут близки к минимальным.

Для получения более точных оценок для величины $y_{i,0}$ составлена программа для численного решения уравнения (2) на ЭВМ.

Рассмотренные задачи были использованы на практике при расчете оптимальных величин резерва для некоторых видов продукции.

Зубков А. М., Обычные и ограниченные ветвящиеся процессы.

Содержание доклада опубликовано в журналах: «Матем. заметки», 8, 1 (1970), 9—18; «Теория вероят. и ее примен.», XVII, 1, 2 (1972), 179—188, 296—309.

Заседание 16 мая.

Чибисов Д. М., Асимптотические разложения для распределений некоторых статистик критериев проверки сложных гипотез.

Сообщаемые результаты являются развитием результатов [1]. Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины (сл.в.) с функцией распределения (ф.р.) $F(x, \theta, \xi)$, $\theta \in \Theta$, $\xi \in \Xi$, Θ и Ξ — открытые множества в R^1 (без принципиальных затруднений приводимые ниже результаты переносятся на случай конечномерных θ и ξ). Рассматриваются статистики

$$Z_n(\vartheta_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} g(X_i, \vartheta_n), \tag{1}$$

где $\vartheta_n = \vartheta_n(X_1,\ldots,X_n)$ — оценка для θ, g — функция, удовлетворяющая приводимым ниже условиям. При этих условиях $Z_n(\vartheta_n)$ асимптотически нормальна; ниже даются асимптотические разложения (а.р.) по степеням $\tau = n^{-1/2}$ для распределения $Z_n(\vartheta_n)$. Статистики (1) применяются (см. [3]) для проверки гипотезы $\xi = \xi_0$ (в дальнейшем считаем $\xi_0 = 0$), мы рассмотрим отдельно случаи $\xi = 0$ и $\xi = \mathrm{const}\cdot\tau$.

Определение 1. Обозначим $\mathscr{D}_{r,k}(\theta_0)$ класс функций $f(x, \theta)$, удовлетворяющих условиям: $f(x, \theta)$ в некоторой окрестности U точки θ_0 при всех $x \in R^1$ имеет k непрерывных производных по θ,

$$\mathbf{M}_{\theta_0} | f^{(j)}(X_1, \theta_0) |^r < \infty, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

$$| f^{(k)}(x, \theta) - f^{(k)}(x, \theta_0) | \leqslant | \theta - \theta_0 | R_f(x), \qquad \theta \in U, \tag{3}$$

$$\mathbf{M}_{\theta_0} R_f(X_1)^{r/2} < \infty. \tag{4}$$

Класс $\mathscr{D}_{r,0}(\theta_0)$ определяется условиями (3), (4) на саму функцию f.

Определение 2. Пусть $\{\zeta_n\}$ — последовательность сл.в. Будем писать $\zeta_n = \omega(m)$, если для любого $\delta > 0$

$$\mathbf{P}\{ | \zeta_n | > n^{\delta} \} = o(n^{-m/2}).$$

Определение 3. Статистика Z_n допускает а.р. порядка k, если она представима в виде

$$Z_n = S_{0n} + \sum_{j=1}^{k} \tau^j H_j(\mathbf{S}_n) + \tau^{k+1}\zeta_n, \tag{5}$$

где $\zeta_n = \omega(k)$; $\mathbf{S}_n = (S_{0n}, S_{1n}, \ldots, S_{pn}) = \tau \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i$, $\mathbf{Y}_i = (Y_{0i}, Y_{1i}, \ldots, Y_{pi})$, $i = 1, \ldots, n$, — н. о. р. векторы, $\mathbf{M}Y_i = 0$, $\mathbf{M}|Y_{ji}|^{k+2} < \infty$; $H_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, k$, — некоторые полиномы.

Вывод а.р. для распределения $Z_n(\vartheta_n)$ проходит в два этапа: для $Z_n(\vartheta_n)$ устанавливается разложение (5) (теоремы 1 и 2), затем применяется теорема 3, дающая а.р. для распределения статистики вида (5).

Фиксируем значение $\theta = \theta_0$. Положим $g(x) = g(x, \theta_0)$,

$$g^{(j)}(x, \theta) = \partial^j g(x, \theta)/\partial\theta^j, \quad g^{(j)}(x) = g^{(j)}(x, \theta_0),$$

$$b^{(j)} = \mathrm{M}_{\theta_0} g^{(j)}(X_1), \quad S_n^{(j)} = \tau \sum_{i=1}^{n} (g^{(j)}(X_i) - b^{(j)}).$$

Теорема 1. *Пусть X_i имеют ф.р. $F(x, \theta_0, 0)$ и для некоторого целого $r \geqslant 3$ выполнены условия:* (I) $\mathrm{M}_{\theta_0} g(X_1) = 0$; (II) $\mathrm{M}_{\theta_0} g^{(1)}(X_1) = 0$; (III) $g(x, \theta) \in \mathscr{D}_{r,r-1}(\theta_0)$; (IV) $T_n = \sqrt{n}\,\vartheta_n$ *допускает а.р. порядка $r-3$. Тогда $Z_n(\vartheta_n)$ допускает а.р. порядка $r-2$.*

Обозначим $G_\xi(x) = F_\xi^{-1}(F(x, \theta_0, 0))$, где $F_\xi^{-1}(\cdot)$—функция, обратная к $F(\cdot, \theta_0, \xi)$. Статистика $Z_n(\vartheta_n) = Z_n(X_1, \ldots, X_n; \vartheta_n(X_1, \ldots, X_n))$ при $F(x, \theta_0, \xi)$ распределена так же как $Z_n(\vartheta_n, \xi) = Z_n(G_\xi(X_1), \ldots, G_\xi(X_n); \vartheta_n(G_\xi(X_1), \ldots, G_\xi(X_n)))$ при $F(x, \theta_0, 0)$. В [2] был рассмотрен класс оценок, определяемых как решение уравнения $\sum_{i=1}^{n} f^{(1)}(X_i, \theta) = 0$ (обозначено $f^{(j)} = \partial^j/\partial\theta^j$); теорема 1 [2] дает условия, достаточные для (IV). Введем условие: (IV′) ϑ_n удовлетворяет условиям теоремы 1 [2]. Положим $g^{(j)}(x, \xi) = g^{(j)}(G_\xi(x))$, $f^{(j)}(x, \xi) = f^{(j)}(G_\xi(x))$.

Теорема 2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ имеют ф.р. $F(x, \theta_0, 0)$, для целого $r \geqslant 3$, выполнены условия* (I)—(III), (IV′) *и* $g^{(j)}(x, \xi), f^{(j)}(x, \xi) \in \mathscr{D}_{r, r-j-1}(0)$, *причем $R_{g^{(j)}}(x)$, $R_{f^{(j)}}(x)$ равномерно интегрируемы относительно $F(x, \theta_0, \xi)$ при ξ из некоторой окрестности нуля, $j = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда $Z_n(\vartheta_n, \tau\xi)$ ($\xi = \mathrm{const}$) допускает а. р. порядка $r-2$.*

Теорема 3. *Пусть Z_n — статистика, допускающая а.р. порядка k, $k \geqslant 1$, целое; пусть матрица ковариаций Σ вектора Y_i (см. определение 3) невырождена и распределение вектора Y_i содержит абсолютно непрерывную компоненту. Тогда равномерно по борелевским $A \subset R^1$*

$$\mathrm{P}\{Z_n < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_k(y, \tau)\, d\Phi(y/\sigma_0) + o(\tau^k), \tag{6}$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения, $\sigma_0^2 = \mathrm{M}Y_{01}^2$, $f_k(y, \tau) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \tau^j Q_j(y)$, $Q_j(y)$ — полиномы.

Разложение (6) строится следующим образом. Пусть $\varkappa_r(\omega_0, \omega)$, $\omega \in R^p$, есть r-й семиинвариант сл. в. $\omega_0 Y_{0i} + \omega_1 Y_{1i} + \ldots + \omega_p Y_{pi}$, а $\varphi(y, t)$, $y \in R^1$, $t \in R^p$,— плотность нормального распределения $N(0, \Sigma)$. Тогда $f_k(y, \tau)$ — сумма членов, содержащих τ^j, $j = 0, 1, \ldots, k$, формального разложения по степеням τ функции

$$\int_{R^p} \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \tau^j \left[-D_y^* H_j(y, t) + \frac{\varkappa_{j+2}(-D_y, D_t)}{(j+2)!}\right]\right\} \varphi(y, t)\, dt,$$

Здесь $D_y^* = D_y = \partial/\partial y$, $D_t = (\partial/\partial t_1,\ldots,\partial/\partial t_p)$; каждый член разложения функции exp $\{\ldots\}$ равен степени τ, умноженной на полином с общим членом вида

$$C\,(D_y^*)^{\alpha_1}\, y^{\alpha_2} D_y^{\alpha_3} \prod_{j=1}^{p} t_j^{\beta_{j1}}\,(\partial/\partial t_j)^{\beta_{j2}}\,, \tag{7}$$

и операторы, относящиеся к одной и той же переменной, должны применяться к $\varphi\,(y,\,t)$ в том порядке, как в (7) (считая справа налево).

В теореме 3 условие наличия абсолютно непрерывной компоненты можно заменить следующим, более слабым: распределение вектора Y_i содержит компоненту, которая после конечного числа сверток с собой имеет ограниченную плотность.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. М. Чибисов, Уточнение асимптотической нормальности для одного класса статистик, Теория вероят. и ее примен., XVI, 2 (1971), 397—399.

[2] Д. М. Чибисов, Асимптотические разложения для оценок максимального правдоподобия, Теория вероят. и ее примен., XVII, 2 (1972),

[3] J. Neyman, Optimal asymptotic tests of composite statistical hypotheses, Probability and Statistics, The Harald Cramér Volume, 1959, 213—234.