ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Сентябрь 1962 Октябрь № 5

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ *

О. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, П. И. ЧУШКИН

(*Москва*)

I. Введение

В задачах, решаемых на быстродействующих электронных вычислительных машинах, чаще всего встречаются системы нелинейных дифференциальных уравнений — обыкновенных или в частных производных. Если методы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо развиты, то интенсивное создание методов решения дифференциальных уравнений в частных производных началось лишь после появления электронных вычислительных машин.

Надо сказать, что в настоящее время достаточно полно разработаны численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных только в двумерном случае. Примеры же решения трехмерных задач единичны и потребовали создания уникальных по сложности программ.

Существуют три довольно универсальных метода решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Метод конечных разностей. Он более всего развит в данное время и успешно применяется для решения как линейных, так и нелинейных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов. Производные во всех направлениях здесь заменяются конечными разностями, причем чаще всего используются так называемые неявные разностные схемы. Тогда на каждом шаге приходится решать систему линейных алгебраических уравнений, содержащих иногда несколько сот неизвестных. Программы для счета методом конечных разностей на электронных вычислительных машинах оказываются сложными и требуют большого объема памяти машины.
2. Метод характеристик. Этот метод применяется для решения уравнений гиперболического типа. Точность этого метода выше, чем метода конечных разностей, хотя логическая схема последнего проще, поскольку в нем рассматривается фиксированная сетка. Наибольшую трудность при использовании метода характеристик представляют случаи пересечения характеристик одного семейства, т. е. случаи возникновения ударных волн. Поэтому метод характеристик целесообразнее применять для решения таких задач, когда число разрывов невелико

* Доклад, прочитанный 23 марта 1962 г. на совещании по математическим методам газовой динамики в Вычислительном центре Академии наук СССР.

(например, в стационарных сверхзвуковых задачах газовой динамики), в то время как для нестационарных газодинамических задач более эффективен метод конечных разностей.

3. Метод прямых и метод интегральных соотношений. В связи с тем что методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо разработаны, большое практическое значение приобретают такие методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, которые сводят их приближенно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. К таким методам относятся метод прямых и метод интегральных соотношений. Они, как и метод конечных разностей, применимы к уравнениям различных типов, в том числе к уравнениям смешанного типа.

В классическом методе прямых область интегрирования разбивается на полосы обычно фиксированными прямыми линиями и производные по одному из направлений заменяются конечно-разностными соотношениями (обычно линейными). В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно. При таком подходе для получения хорошей точности приходится брать довольно много полос.

В 1951 г. А. А. Дородницын [1], [2] в развитие метода прямых предложил метод интегральных соотношений («метод кривых»), который также сводит интегрирование систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к численному решению некоторой аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В методе интегральных соотношений разбиение области проводится кривыми линиями, форма которых определяется видом границы области интегрирования, а свобода в выборе аппроксимирующих функций позволяет получать достаточно точное решение уже при небольшом числе полос, что играет важную роль при практических расчетах.

Позже А. А. Дородницын [3] предложил обобщенный метод интегральных соотношений. В этом методе благодаря введению сглаживающих функций, которые выбираются в соответствии с ожидаемым поведением искомых функций, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функционалов, более сглаженных, чем в простом методе интегральных соотношений. В результате можно иметь хорошую точность при меньшем числе полос.

Метод интегральных соотношений обладает, как уже указывалось, тем преимуществом, что в нем используется хорошо развитый аппарат численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, в случае неограниченных областей имеется возможность применять асимптотические методы решения таких уравнений. Программы для счета на электронных вычислительных машинах получаются довольно простыми и не требуют большой памяти машин. Однако в приложении метода интегральных соотношений встречаются трудности, когда приходится решать краевую задачу для аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. В этом случае метод эффективен, если он дает достаточно точное решение уже при небольшом порядке этой системы.

В течение ряда лет в Вычислительном центре Академии наук СССР проводится разработка и исследование численного метода интегральных соотношений, а также его приложение к различным задачам механики и физики. В настоящем докладе будет дан обзор этой работы. Мы кратко изложим основные положения метода интегральных соотношений, опишем некоторые особенности его применения, приведем различные схемы построения аппроксимирующих систем и остановимся на решении при помощи этого метода ряда задач газовой динамики. Другие, но менее подробные, обзоры метода интегральных соотношений имеются в ранее опубликованных докладах [2], [4], [5], [6], [7].

II. Метод интегральных соотношений

§ 1. Идея метода

В методе интегральных соотношений исходные дифференциальные уравнения записываются в дивергентной форме. Именно в такой форме могут быть представлены дифференциальные уравнения физики и механики, выражающие законы сохранения массы, количества движения, энергии, заряда и т. д. В двумерном случае исходные дифференциальные уравнения в дивергентной форме возьмем в следующем общем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, u_1, \ldots, u_k) + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, u_1, \ldots, u_k) = \tag{1}$$
$$= F_i(x, y, u_1, \ldots, u_k), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где

x, y — независимые переменные,

$u_1, \ldots, u_k$ — искомые функции,

P_i, Q_i, F_i — известные функции от $x, y, u_1, \ldots, u_k$.

Пусть решение системы (1) необходимо найти в области, имеющей форму криволинейного прямоугольника с границами

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = 0, \qquad y = \Delta(x). \tag{2}$$

В частных случаях может быть

$$a = -\infty, \qquad b = +\infty, \qquad \Delta(x) \equiv \text{const}.$$

Относительно граничных условий системы (1) положим, что имеется в сумме k условий на границах $x = a$ и $x = b$ и k условий на границах $y = 0$ и $y = \Delta(x)$. Если граница $y = \Delta(x)$ заранее не известна, то требуется одно дополнительное граничное условие. При наличии же на границах особых точек соответствующие граничные условия могут отсутствовать — их заменяют условия регулярности решения.

Умножая каждое уравнение системы (1) на некоторую кусочно-непрерывную функцию $f(y)$ и интегрируя его по y от $y = 0$ до $y = \Delta(x)$, получим интегральные соотношения для $i = 1, 2, \ldots, k$ (индекс i опускаем):

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta(x)} f(y) P dy - \Delta'(x) f(\Delta) P_\Delta + f(\Delta) Q_\Delta - f(0) Q_0 - \tag{3}$$
$$- \int_0^{\Delta(x)} f'(y) Q\, dy = \int_0^{\Delta(x)} f(y) F\, dy.$$

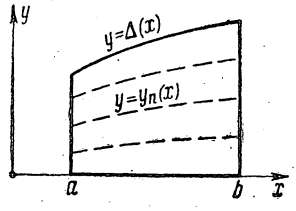
Здесь

$$P_\Delta = P\,[x, y, u_1(x, y), \ldots, u_k(x, y)]\,|_{y=\Delta(x)}.$$

Аналогичный смысл имеют Q_0 и Q_Δ.

Заметим, что функция $f(y)$ может иметь конечное число точек разрыва первого рода. Тогда $\int\limits_0^{\Delta(x)} f'(y)\,Q\,dy$ следует заменить на $\int\limits_0^{\Delta(x)} Q\,df$.

В методе интегральных соотношений решение строится в различных приближениях. Рассмотрим N-е приближение. Разобьем область интегрирования на N полос, для чего между границами $y = 0$ и $y = \Delta(x)$ проведем $N - 1$ линий (фиг. 1):



Фиг. 1

$$y = y_n(x) = \frac{n}{N}\,\Delta(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1),$$

причем $y_0 = 0$, $y_N(x) = \Delta(x)$.

Функции P, Q, F будем представлять при помощи некоторых интерполяционных формул через их значения P_n, Q_n, F_n на границах полос $y = y_n(x)$. Например,

$$P(x, y, u_1, \ldots, u_k) \approx \sum_{n=0}^{N} P_n(x)\,Z_n(y), \tag{4}$$

где

$$P_n(x) = P(x, y_n, u_{1n}, \ldots, u_{kn}),$$
$$u_{\nu n} = u_\nu(x, y_n), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

$Z_n(y)$ — интерполяционные функции, конкретный вид которых зависит от выбора интерполяционных формул (т. е. от вида базисных функций).

Аналогично представляются функции Q и F.

Выберем теперь для каждого значения i систему из N линейно независимых функций $f_n(y)$:

$$\{f_n(y)\}_i \equiv \{f_1(y), f_2(y), \ldots, f_N(y)\}_i. \tag{5}$$

Система этих функций должна быть замкнута. Системы функций $\{f_n(y)\}_i$ для различных значений i могут совпадать.

В N-м приближении запишем интегральные соотношения вида (3) для каждой функции $f_n(y)$ из системы (5). Всего будем иметь kN линейно независимых интегральных соотношений. Подынтегральные функции P, Q, F заменим далее соответствующими интерполяционными выражениями типа (4). Тогда интегралы, входящие в интегральные соотношения, представятся так:

$$\int\limits_0^{\Delta(x)} f_n(y)\,P\,dy \approx \Delta(x) \sum_{n=0}^{N} C_n\,P_n(x), \tag{6}$$

где C_n — численные коэффициенты, зависящие от выбора интерполяционных формул и вида функций $f_n(y)$ и являющиеся, по существу, обобщенными коэффициентами Котеса.

Подставив выражения (6) в интегральные соотношения вида (3), получим систему kN обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной x (так называемую аппроксимирующую систему) относительно $k(N+1)$ неизвестных функций $u_{\nu n}(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, k$; $n = 0, 1, 2, \ldots N$) на границах полос $y = y_n(x)$. Эту систему замыкают k граничных условий на внешних границах $y_0 = 0$ и $y_N = \Delta(x)$. Граничные же условия при $x = a$ и $x = b$ дадут полную систему граничных условий для аппроксимирующей системы.

Полученная аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется каким-либо численным методом на электронной вычислительной машине.

Отметим, что в выражения (6) функции $P_n(x)$ входят линейно. Поэтому аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений будет линейной относительно производных dP_n/dx и, значит, ее легко привести к расчетной форме путем простого разрешения относительно этих производных. Такое разрешение системы можно проводить на самой электронной вычислительной машине.

Функции $f_n(y)$ выбираются, вообще говоря, достаточно произвольно. Рассмотрим два следующих частных случая.

1. Если в качестве $f_n(y)$ взять δ-функции Дирака

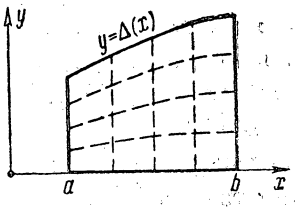
$$f_n(y) = \delta(y - y_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N),$$

то будем иметь известный метод прямых, в котором производные по y заменены конечно-разностным выражением, отвечающим выбранным интерполяционным формулам (4).

2. Если взять «ступенчатые» функции

$$f_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < y_{n-1}, \\ 1 & \text{при } y_{n-1} \leqslant y \leqslant y_n, \\ 0 & \text{при } y > y_n, \end{cases}$$

то получим простой метод интегральных соотношений. При этом законы сохранения, выраженные системой (1), будут записаны для полос в виде таких интегральных соотношений:



Фиг. 2

$$\frac{d}{dx}\int_{y_{n-1}}^{y_n} P\,dy - y'_n P_n + y'_{n-1} P_{n-1} + Q_n - Q_{n-1} = \int_{y_{n-1}}^{y_n} F\,dy.$$

Именно по такой схеме была решена большая группа задач газовой динамики.

Возможна еще одна форма метода интегральных соотношений. В двумерных задачах область интегрирования можно разбивать не на полосы, а на подобласти (см. фиг. 2) и проводить интегрирование по двум направлениям, аппроксимируя при этом функции по двум переменным. Аппроксимирующая система становится тогда системой нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, и ее решают численно на электронной вычислительной машине. Указанная схема применялась в ряде задач.

Наконец, метод интегральных соотношений можно обобщить на случай

трехмерных уравнений в частных производных. Здесь возможны два подхода. При первом подходе исходную систему уравнений умножают на некоторую функцию, зависящую от двух из рассматриваемых переменных (аналог функции $f_n(y)$ в двумерном случае), и интегрируют по этим двум переменным. Применяя к полученным двойным интегралам какие-либо квадратурные формулы, приходят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по третьей переменной.

При втором подходе исходная система уравнений сначала интегрируется по одной из переменных и подынтегральные функции представляются по этой переменной какими-либо интерполяционными выражениями, коэффициенты которых будут зависеть от двух остальных переменных. Тогда аппроксимирующая система будет системой уравнений в частных производных по этим двум переменным и ее можно решать методом интегральных соотношений, развитым для двумерных задач.

В трехмерном случае возможно также комбинирование метода интегральных соотношений с методом конечных разностей или с методом характеристик.

§ 2. Особенности метода интегральных соотношений и некоторые вопросы его практического применения

Подчеркнем характерные особенности метода интегральных соотношений и преимущества, которые они дают.

Отличительной чертой метода интегральных соотношений является то обстоятельство, что здесь решение задачи разбивается на два отдельных этапа. Первый этап состоит в сведении точной системы дифференциальных уравнений в частных производных к аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем на втором этапе, который можно рассматривать независимо, проводится численное интегрирование этой аппроксимирующей системы.

В этом методе аппроксимируется, по сути дела, интеграл. При этом несколько повышается точность аппроксимации за счет уменьшения коэффициента остаточного члена. Кроме того, интеграл представляет собой более гладкую функцию, чем подынтегральная функция, из-за чего при небольшом числе узлов интерполяции для интеграла быстрее достигается хорошее представление. Наконец, интеграл будет допускать непрерывное представление и в том случае, когда подынтегральная функция имеет разрыв первого рода.

В методе интегральных соотношений исходные уравнения берутся в дивергентной форме. Такая форма удобна и полезна, потому что при этом интегрирование по одной из переменных проводится точно. Кроме того, как легко убедиться, интегральные соотношения, построенные по уравнениям в дивергентной форме и выражающие законы сохранения, остаются справедливыми и при переходе через поверхность разрыва. Таким образом, если в рассматриваемой газодинамической задаче имеется несколько поверхностей разрыва и трудно следить за каждой из них, то методом интегральных соотношений можно вести сквозной счет, а потом по градиентам «рвущихся» величин выстраивать эти поверхности.

В методе интегральных соотношений область интегрирования разби-

вается, вообще говоря, кривыми линиями и сам метод применим к областям произвольного вида — конечным и бесконечным, с прямолинейными и криволинейными границами, а также в случае неизвестных границ. Последнее имеет особое значение при решении задач газовой динамики, где обычно формы ударных волн или границы областей влияния заранее не известны.

Наконец, в методе интегральных соотношений имеется довольно произвольный выбор интерполяционных выражений и функций $f_n(y)$, которые следует выбирать с учетом характера решения. Это позволяет получать достаточно точные результаты уже при сравнительно невысоком номере приближения N.

Остановимся теперь на некоторых вопросах практического применения метода интегральных соотношений. Поскольку метод интегральных соотношений нашел наибольшие приложения в гидромеханике, то, разбирая эти вопросы, мы будем чаще всего иметь в виду именно такие приложения (подробно они рассматриваются в разделе III).

При решении методом интегральных соотношений исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных можно записывать, вообще говоря, в любых координатах. Однако удобнее пользоваться такой ортогональной системой координат, в которой одна из криволинейных границ — контур тела — представляет собой координатную линию. Так, для эллиптических контуров надо применять эллиптические координаты. При рассмотрении контуров общего вида следует вводить специальные координаты (например, типа (11), см. ниже). В последнем случае удобна также система координат s, n, где s — длина дуги, измеряемая вдоль контура, n — нормаль к контуру. При некоторых схемах решения по методу интегральных соотношений бывает необходимо сделать параллельными две какие-либо границы, скажем $\theta = \theta_т(\psi)$ и $\theta = \theta_в(\psi)$. Это может быть достигнуто введением координаты

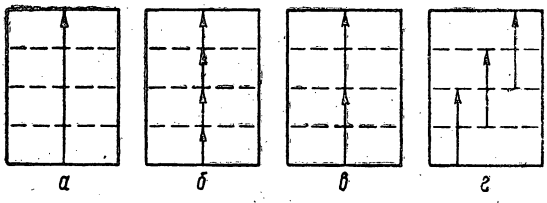
$$\zeta = \frac{\theta - \theta_т}{\theta_в - \theta_т}.$$

Если в физической плоскости область интегрирования бесконечна, то можно сделать эту область конечной, переходя к некоторой новой независимой переменной.

В исходную систему, записанную в дивергентной форме, следует по возможности вместо некоторых дифференциальных уравнений вводить известные интегралы. Это позволяет уменьшить число дифференциальных уравнений и тем самым сократить количество вычислений. Надо отметить, что математически эквивалентные системы не всегда равноценны с точки зрения численного решения соответствующих им аппроксимирующих систем. Поэтому в исходной системе следует сохранять те уравнения, которые характеризуют существо явления. Например, при расчете сверхзвукового обтекания конуса под углом атаки (см. ниже, раздел III, § 2, п. 2), когда применяются сферические координаты r, θ, ψ, интеграл Бернулли надо вводить вместо уравнения количества движения в проекции на r, т. е. в направлении основного течения, поскольку два других уравнения движения описывают более тонкий и более важный в данной задаче эффект — поперечное течение.

При построении аппроксимирующей системы в методе интегральных соотношений существенную роль играет выбор направления аппроксимации и ее вид. Оказывается, что получаемое здесь решение дает в направлении интегрирования аппроксимирующей системы более точное распределение искомых функций, чем в направлении, по которому они аппроксимируются. Это обстоятельство надо учитывать при выборе направления аппроксимации, так как по одному направлению функции могут меняться резче, чем по другому. Во всех случаях область влияния аппроксимирующей системы должна совпадать или быть больше области влияния исходной системы.

Разбиение области интегрирования на полосы может проводиться либо равноотстоящими линиями, либо в зоне резкого изменения функций промежуточные линии можно проводить более часто. Обычно используется «сквозная» интерполяция по значениям исходных функций на границах всех полос (см. фиг. 3*а*). Можно также применять «кусочную» интерполяцию. Например, поперек каждой отдельной полосы функции можно представлять линейно (фиг. 3*б*), поперек двух соседних полос — параболически (фиг. 3*в*). Это позволяет значительно упростить вид аппроксимирующих систем, а необходимую точность можно обеспечить здесь за счет большего числа полос. Такие аппроксимации удобны при решении задач Коши (расчет пограничного слоя или течения в сверхзвуковой области), и они могут оказаться надежнее «сквозных» аппроксимаций в областях, где существуют линии слабых разрывов. Возможно также применение кусочных перекрывающих друг друга аппроксимаций (фиг. 3*г*).



Фиг. 3

В тех случаях, когда в исходную систему вводятся известные интегралы или когда она имеет особенность на бесконечности (вид которой для аппроксимирующей системы иногда бывает иным), при составлении интегральных соотношений могут появиться «лишние» уравнения в аппроксимирующей системе. При желании таких лишних уравнений можно избежать. Для этого на границах области вводят в рассмотрение производные от аппроксимирующих функций и повышают степень аппроксимации без увеличения числа полос. Такой же прием можно использовать и в некоторых других случаях, когда лишних уравнений нет, например когда границей области служит ударная волна, на которой производные всех величин выражаются через угол наклона волны.

Относительно выбора интерполяционных формул надо сказать, что система базисных функций интерполяционных формул должна быть системой Чебышева. Обычно употребляется полиномиальная или тригонометрическая интерполяция. Интерполяционные формулы должны учитывать характер изменения представляемых функций, и в частности их симметрию, поведение в особых точках и асимптотику. Например, в задаче о дозвуковом обтекании эллипсов, которая решалась в эллиптических координатах

ξ, η (см. ниже, раздел III, § 1, п. 1), можно применять по η как полиномиальную, так и тригонометрическую аппроксимацию (8). Но только в последнем случае удается точно удовлетворить требуемым условиям на бесконечности.

Обсудим еще вопрос об единообразии аппроксимаций. Количество аппроксимаций, вообще говоря, должно равняться числу основных уравнений, по которым составляются интегральные соотношения. В ряде задач в этих уравнениях присутствуют правые части, которые можно аппроксимировать либо независимо как одно целое («независимая аппроксимация»), либо вычислять их по аппроксимациям, примененным в левых частях («единая аппроксимация»). В первом случае аппроксимирующая система получается существенно проще. Надо отметить, что с увеличением N оба подхода дают близкие результаты.

Иногда может оказаться, что независимая аппроксимация при малом N приводит даже к лучшим результатам. Это имело место, например, при решении методом интегральных соотношений мезонного уравнения (см. [8])

$$\Delta u - u - u^3 = 0.$$

В осесимметричном случае это уравнение в переменных $t = 1/r$, θ, где r, θ — полярные координаты, записывается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{t^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{t^4}(u + u^3).$$

Интегральные соотношения составляются в квадранте $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ до лучей $\theta_n = \text{const}$ и имеют вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^{\theta_n} u \sin\theta \, d\theta + \frac{\sin\theta_n}{t^2} \frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{1}{t^4} \int_0^{\theta_n} (u + u^3) \sin\theta \, d\theta.$$

Используя независимую аппроксимацию, представим каждую из функций u и u^3 тригонометрическими полиномами по $\cos n\theta$. Такая независимая аппроксимация (в отличие от единой) приводит здесь к аппроксимирующей системе, имеющей на оси $\theta = 0$ при любом N ту же особенность, что и исходное дифференциальное уравнение. Это обстоятельство обеспечивает более быструю сходимость численного решения.

Выше при описании обобщенного метода интегральных соотношений мы уже говорили о требованиях, предъявляемых к системе функций $\{f_n(y)\}_i$. Добавим еще, что если подынтегральные функции имеют особенность в области интегрирования, то функции $f_n(y)$, естественно, должны выбираться таким образом, чтобы была обеспечена сходимость всех интегралов в интегральных соотношениях. Функции $f_n(y)$ играют роль «весов» для интегральных соотношений. Например, в случае резко меняющихся функций применение в качестве $f_n(y)$ функции $[1 - (y - y_n)^2]^N$ может повысить точность (особенно при небольшом номере приближения). Заметим также, что использование функций $f_n(y)$ облегчает приведение аппроксимирующей системы к каноническому виду.

Аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, является нелинейной и интегрируется численно на электронной вычислительной машине по стандартным программам. В случае

задачи Коши никаких трудностей при этом не возникает. Решение же краевой задачи либо сводится к многократному решению задачи Коши и подбору краевых условий при помощи интерполяций (что делает сама машина), либо здесь применяются итерационные схемы.

Обычно (хотя это и не обязательно) проводится последовательное решение аппроксимирующих систем для все увеличивающегося номера приближения N. Тогда можно применять линеаризацию относительно уже найденного решения в предыдущем приближении, а краевую задачу для полученной линейной системы можно решать, например, методом прогонки. Для решения краевой задачи можно пользоваться также известным методом Пуанкаре — Лайтхилла — Го [9], в котором линеаризация уравнений проводится одновременно с некоторой деформацией независимых переменных. Применение этого метода к решению задачи о сверхзвуковом обтекании затупленных тел, которое строится при помощи интегральных соотношений, описано в недавно опубликованной работе Вальо-Лорена [10].

В некоторых случаях требуется построить решение в окрестности особых точек. Регулярные особые точки проходятся, например, при помощи соответствующих рядов. Если же область не ограничена и часть краевых условий задана на бесконечности, то определяется асимптотика аппроксимирующей системы, с которой и склеивается численное решение в конечной части области.

Сделаем еще несколько замечаний относительно сходимости метода интегральных соотношений и контроля его точности.

В общем случае нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных доказать сходимость метода интегральных соотношений не удается. По-видимому, ее можно доказать для линейных систем, что уже, например, сделано для частного случая — метода прямых.

Обычно рассматривают практическую сходимость метода интегральных соотношений, о которой судят по убыванию разности решений в двух последовательных приближениях.

Основным контролем точности метода должна быть проверка удовлетворения исходных уравнений при подстановке в них полученного приближенного численного решения. Можно использовать и другие косвенные способы оценки точности, как то:

а) сравнение с точным решением, известным для некоторых частных случаев (например, для обтекания конуса под нулевым углом атаки, обтекания тела потоком несжимаемой жидкости, ламинарного несжимаемого пограничного слоя и т. д.);

б) проверка в процессе численного решения известных точных соотношений, которые имеют место в рассматриваемой задаче и не используются в численном расчете (интегралы исходной системы, постоянство расхода в трубке тока, постоянство энтропии на линиях тока, углы подхода линий $M=\text{const}$ к ударной волне и т. д.);

в) решение одной и той же задачи при помощи различных схем метода интегральных соотношений или при помощи другого численного метода (например, метода характеристик);

г) использование «лишних» уравнений в аппроксимирующей системе (ес-

ли они имеются), которые с увеличением номера приближения должны удовлетворяться все с большей точностью.

Опыт решения различных газодинамических задач при помощи метода интегральных соотношений показал, что в большинстве случаев при рационально составленной схеме решения достаточная точность получается уже во втором или третьем приближениях.

III. Решение задач газовой динамики методом интегральных соотношений

При помощи метода интегральных соотношений был решен большой цикл задач из области газовой динамики. В основном проводились расчеты двумерных (плоских, осесимметричных, конических) стационарных течений газа. Рассматривались задачи внешнего и внутреннего обтекания в случае потенциального движения, задачи обтекания тел вихревым потоком совершенного или реального газа при наличии ударных волн, задачи расчета пограничного слоя на телах, обтекаемых вязким газом. Уравнения, описывающие такие течения газа, имели различный тип — эллиптический, параболический, гиперболический и смешанный. Кроме того, в настоящее время метод интегральных соотношений применяется к расчету трехмерного сверхзвукового обтекания тела вращения под углом атаки, а также нестационарного течения в случае взрыва с противодавлением.

Ниже будет описан ряд задач газовой динамики, которые решены или решаются сейчас методом интегральных соотношений. Последовательно будет рассмотрен расчет потенциальных течений, течений с ударными волнами и течений вязкого газа. При этом будет изложена постановка каждой задачи и схема ее решения методом интегральных соотношений. Графики с конкретными результатами расчетов, в основном уже опубликованные в различных статьях, приводиться не будут.

§ 1. Потенциальные течения газа

1. Дозвуковое обтекание эллипсов и эллипсоидов вращения

Решение этой задачи для случая симметричного обтекания, когда скорость на бесконечности V_∞ параллельна оси тела, было получено в работе [11] простым методом интегральных соотношений.

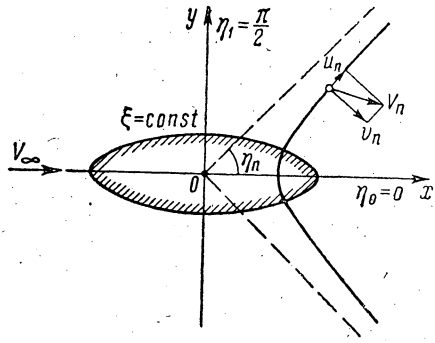
Здесь удобно ввести эллиптические координаты ξ, η (фиг. 4). Тогда в плоском случае уравнения задачи — уравнение неразрывности и уравнение отсутствия вихря — будут иметь такой вид:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+\frac{\partial\omega}{\partial\eta}=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\xi}-\frac{\partial\mu}{\partial\eta}=0, \tag{7}$$

где $\chi = H_{\mathrm{II}}\rho u$, $\omega = H_{\mathrm{I}}\rho v$, $\lambda = H_{\mathrm{II}} v$, $\mu = H_{\mathrm{I}} u$, $H_{\mathrm{I}} = H_{\mathrm{II}} = H = \sqrt{\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta}$ — параметры Ламэ, u, v — составляющие скорости по координатным линиям, $\rho = \rho_{\text{тор}}\,[1-(u^2+v^2)/V^2_{\text{макс}}]^{1/(\varkappa-1)}$ — плотность, $\varkappa$ — показатель адиабаты, $\rho_{\text{тор}}$ — плотность торможения, $V_{\text{макс}}$ — максимальная скорость в газе.

В случае, когда скорость в поле течения всюду дозвуковая, система уравнений (7) будет принадлежать к эллиптическому типу. Краевые условия ставятся на бесконечности, где имеет место равномерный поток, и на обтекаемом теле, где должна обращаться в нуль нормальная скорость (условие непротекания).

В силу симметрии здесь можно рассматривать один квадрант $0 \leqslant \eta \leqslant \pi/2$, где в N-м приближении проводится $N-1$ равноотстоящих по η гипербол $\eta = \eta_n$. В составленных $2N$ независимых интегральных соотношениях применяются следующие тригонометрические аппроксимации:



Фиг. 4

$$\chi = \sum_{n=0}^{N-1} a_{2n+1}(\xi)\cos(2n+1)\eta,$$
$$\lambda = \sum_{n=1}^{N-1} b_{2n+1}(\xi)\sin(2n+1)\eta, \tag{8}$$

где a_{2n+1} и b_{2n+1} зависят линейно от значений χ_n и λ_n на границах полос. Эти аппроксимации, исходящие из известного решения для обтекания эллипса несжимаемой жидкостью, обеспечивают быструю сходимость решения. Кроме того, аппроксимации такого вида позволяют получить в особой точке на бесконечности равномерный поток и тем самым точно выполнить краевые условия.

Численное интегрирование аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений по ξ проводится от тела до некоторого достаточно большого эллипса, где решение склеивается с решением линеаризованного уравнения Прандтля для потенциала возмущения.

Подобным же образом было рассмотрено осесимметричное обтекание эллипсоидов. В работе [11] были проведены, в частности, расчеты критических чисел Маха $M_{кр}$ для эллипсов и эллипсоидов при $N = 1, 2, 3$.

Описанный метод был распространен в [12] на случай дозвукового обтекания эллипса с циркуляцией. Здесь интегральные соотношения составляются в области $-\pi/2 \leqslant \eta \leqslant \pi/2$, а подынтегральные функции с учетом симметрии аппроксимируются так:

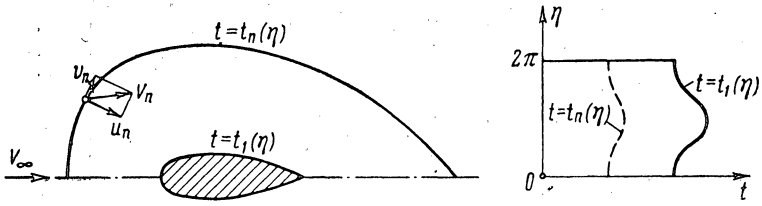
$$\chi = \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\eta + b_n \sin n\eta),$$
$$\lambda = \sum_{n=0}^{N+1} (\alpha_n \cos n\eta + \beta_n \sin n\eta), \tag{9}$$

где

$$a_n = \beta_n = 0 \text{ при четном } n,$$
$$b_n = \alpha_n = 0 \text{ при нечетном } n.$$

2. Обтекание произвольного симметричного профиля и тела вращения дозвуковым потоком газа на нулевом угле атаки

Для решения этой задачи в [13] также применялась эллиптическая система координат с фокусами, расположенными внутри контура тела. Для того чтобы иметь дело с конечной областью, проводится преобразование независимой переменной $t = e^{-\xi}$. В области интегрирования (из-за



Фиг. 5

симметрии достаточно рассматривать полуплоскость $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$) между заданным контуром обтекаемого тела $t = t_1(\eta)$ и бесконечностью в N-м приближении строится $N - 1$ промежуточных линий (см. фиг. 5):

$$t = t_n(\eta) = \frac{N - n + 1}{N} t_1(\eta) \qquad (n = 2, 3, \ldots, N).$$

Таким образом, в отличие от предыдущей задачи, здесь аппроксимации в интегральных соотношениях проводятся не по переменной η, а по t. В этих аппроксимациях учитывается характер течения на бесконечности, поэтому они имеют вид

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{N+1+j} a_n(\eta) \left(\frac{t}{t_1}\right)^n, \tag{10}$$

причем для плоского течения ($j = 0$) без циркуляции $a_1 = 0$, а для осесимметричного течения ($j = 1$) $a_1 = a_2 = 0$.

В этой схеме аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений содержит одно лишнее уравнение для одной из составляющих скорости на бесконечности. Это лишнее уравнение позволяет оценить погрешности приближения. Расчеты показывают, что получающаяся из-за этого некоторая неравномерность потока на бесконечности быстро уменьшается с каждым более высоким приближением.

Указанным методом был рассчитан ряд примеров. В частности, для контроля был проведен расчет обтекания несжимаемой жидкостью симметричного профиля Жуковского; полученные здесь результаты при $N = 2$ очень хорошо совпадают с данными точного решения. Было рассчитано также течение около эллипсоида вращения, причем расчеты велись по двум схемам: по только что рассмотренной общей схеме и по схеме, описанной выше в п. 1 и пригодной только для эллипсоидов; в этом случае также имеет место хорошее соответствие результатов уже при $N = 2 \div 3$.

3. Симметричное обтекание тел, движущихся со скоростью звука

Метод интегральных соотношений для решения этой задачи смешанного типа был разработан в [14], [15], где был рассмотрено обтекание звуко-

вым потоком газа (число Маха набегающего потока $M_\infty = 1$) плоских и осесимметричных тел с эллиптическим, а также с произвольным контуром. Решение строится в ортогональных координатах ξ, η, причем

$$\xi = r - r_{\text{т}}(\theta), \quad \int \frac{d\eta}{r'_{\text{т}}(\eta)} = -\frac{1}{r} + \int \frac{d\theta}{r'_{\text{т}}(\theta)}, \tag{11}$$

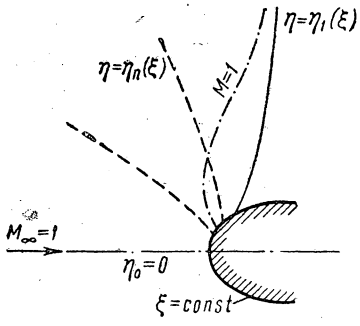
где $r = r_{\text{т}}(\theta)$ — уравнение контура тела в полярных координатах. Таким образом, линия $\xi = 0$ представляет собой контур тела, а на бесконечности эти координаты переходят в полярные. Для случая эллиптического контура вместо этих координат просто берутся эллиптические координаты.

В изучаемом течении (рассматривается только верхняя полуплоскость) можно выделить минимальную область влияния, границами которой служат ось $\eta = 0$, часть контура тела и полубесконечная характеристика $\eta = \eta_1(\xi)$, имеющая не известную заранее форму и касающаяся на бесконечности звуковой линии $M = 1$ (фиг. 6). Течение в этой области является потенциальным и описывается, например, в плоском случае по-прежнему системой уравнений (7), но в которой H_{I} и H_{II} надо рассматривать как параметры Ламэ для принятых ортогональных координат (11).

Однако на звуковой линии эти уравнения меняют свой тип. Краевые условия представляют собой условие симметрии на оси $\eta = 0$, условие обращения в нуль нормальной составляющей скорости на теле и условие равномерного звукового потока на бесконечности; кроме того, на граничной характеристике должно выполняться дифференциальное соотношение совместности.

При решении этой задачи область влияния разбивается линиями

$$\eta_n(\xi) = \frac{N - n + 1}{N}\eta_1(\xi) \qquad (n = 2, 3, \ldots, N),$$



Фиг. 6

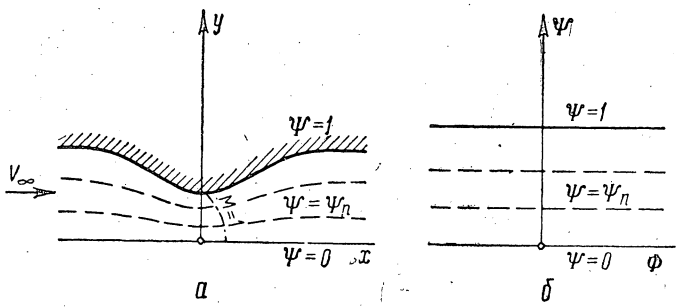
проходящими между граничной характеристикой и осью (фиг. 8). Подынтегральные функции χ и λ в интегральных соотношениях представляются с учетом симметрии следующими интерполяционными полиномами:

$$\chi = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos n\frac{\pi}{2}\frac{\eta}{\eta_1}, \qquad \lambda = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\frac{\pi}{2}\frac{\eta}{\eta_1}. \tag{12}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений по ξ будет иметь только одну особую точку на бесконечности, в которую, если интегрирование проводится от тела, надо входить. Аппроксимации (12) обеспечивают на бесконечности особенность, отвечающую равномерному звуковому потоку, и позволяют выполнить условие непротекания на всем контуре тела. Таким образом, здесь в любом приближении решение определяется при точном выполнении всех краевых условий в точном рассмотрении области влияния.

4. Течение в дозвуковой и трансзвуковой части сопла

Расчет течения в дозвуковой и трансзвуковой части плоского симметричного сопла рассматривали Я. И. Алихашкин и В. П. Радченко [16]. В их постановке требуется для заданной формы сопла найти такое значение скорости на бесконечности V_∞, при котором по всему сечению горла сопла (фиг. 7*а*) достигаются звуковые скорости (вид звуковой линии получается при этом в результате расчета).



Фиг. 7

В качестве исходных дифференциальных уравнений берутся уравнения Чаплыгина

$$\frac{\partial X}{\partial \Psi} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \Phi} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \Phi} = 0,$$

где для воздуха при $\varkappa = 1.4$

$$X = -W^{-5} + \frac{1}{3} W^{-3} + W^{-1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-W}{1+W},$$

$$\Omega = W + \frac{1}{3} W^3 + \frac{1}{5} W^5 + \frac{1}{2} \ln \frac{1-W}{1+W},$$

$$W = (1 - V^2 / V^2_{\text{макс}})^{1/2}.$$

Независимыми переменными здесь служат потенциал скорости Φ и функция тока Ψ, а зависимыми — модуль вектора скорости V и угол его наклона к оси сопла ϑ. К этим уравнениям добавляется еще условие обтекания стенки сопла (заданной уравнением $s = s_{\text{т}}(\vartheta)$, где s — длина дуги):

$$\frac{d\vartheta}{d\Phi} = \frac{1}{V s'_{\text{т}}(\vartheta)}.$$

В переменных Φ, Ψ область течения представляет собой бесконечную полосу (фиг. 7*б*), которая для составления интегральных соотношений разбивается линиями тока $\Psi = \text{const}$. Аппроксимации подынтегральных функций проводятся степенными полиномами по Ψ с учетом симметрии. Аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений по Φ имеет в околозвуковой области в горле сопла подвижные особые точки на линиях тока. Требование регулярности течения в этих особых точках дает условия для определения потока на бесконечности. Численное интегрирование аппроксимирующей системы начинается от некоторого достаточно большого отрицательного значения Φ, где используется асимптотическое решение этой системы.

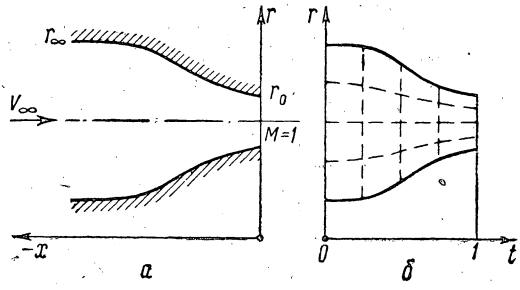
Авторы провели расчеты по первому приближению . В настоящее время

рассматривается второе приближение. Подобную схему, но в иных переменных, можно использовать и в случае осесимметричного сопла.

Иной подход к расчету дозвуковой части сопла применил Ван Жу-цюань [17]. Он рассматривал кольцевое осесимметричное сопло с плоской поверхностью перехода (фиг. 8*а*). В этом случае задаются значения скорости на бесконечности V_∞, а также уравнение контура сопла в виде

$$r = r_\infty + \frac{k(r_0 - r_\infty)}{k + x^4}.$$

При таком уравнении контура сопла удовлетворяются необходимые условия для получения плоской поверхности перехода ($r_0'' = r_0^{\wedge} = r_0''' = 0$), а параметр k позволяет выбрать такие формы сопла, для которых выполняются и достаточные условия. С увеличением номера приближения надо вводить в уравнение контура сопла дополнительные параметры, характеризующие его форму.



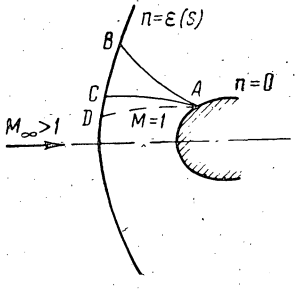
Фиг. 8

Для решения задачи автор пользовался методом интегральных соотношений по двум переменным. Область течения, которая преобразуется к конечной путем введения переменной $t = e^x$ ($-\infty \leqslant x \leqslant 0$), разбивается на подобласти (фиг. 8*б*). Интегральные соотношения составляются по этим подобластям, а подынтегральные функции аппроксимируются полиномами по t и r, причем в аппроксимациях учитываются граничные условия. Тогда задача сводится к системе конечных нелинейных уравнений, которая решалась численным методом, аналогичным методу Ньютона.

§ 2. Течения газа с ударными волнами

1. Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа

В этом случае перед телом образуется отошедшая ударная волна, форма и положение которой неизвестны (фиг. 9). Течение за ударной волной будет смешанным: по одну сторону от переходной линии ($M = 1$) — дозвуковым (уравнения эллиптического типа), а по другую — сверхзвуковым (уравнения гиперболического типа). Область влияния будет ограничена характеристикой первого (AB) или второго (AC), семейства проходящими между ударной волной и телом. Метод интегральных соотношений позволяет построить численное решение прямой задачи о сверхзвуковом обтекании носовой части затупленного тела, т. е. определить ударную волну и поле течения за ней для тела заданной формы. Этот метод имеет преимущество по сравнению с широко распространенными обратными метода-



Фиг. 9

ми, в которых задается ударная волна и находится соответствующее ей тело; в последнем случае приходится иметь дело с численным решением неустойчивой задачи Коши в эллиптической области.

Исходную систему дифференциальных уравнений удобно записывать либо в координатах s, n, где s — длина дуги, измеряемая вдоль тела, n — нормаль к телу, либо в координатах s, $\zeta = n/\varepsilon(s)$, где $n = \varepsilon(s)$ — уравнение ударной волны. В системе s, n легко осуществляется переход от одной формы тела к другой, что позволяет вести расчет тела с произвольным контуром (гладким или с изломом) по единой программе. Кроме того, в этих координатах аппроксимирующая система имеет простой вид, а получаемые расчетные данные можно непосредственно использовать для расчета пограничного слоя или теплопередачи. В системе s, ζ ударная волна становится параллельной телу, что дает возможность составлять интегральные соотношения вдоль s от оси симметрии до граничной характеристики.

При расчете методом интегральных соотношений сверхзвукового обтекания затупленных тел рассматривались случаи адиабатического течения совершенного газа с постоянной теплоемкостью, а также течения термодинамически равновесной и неравновесной смеси реагирующих газов.

Полная система уравнений, описывающая такие течения, состоит из уравнений движения (13), неразрывности (14), энергии (15), состояния (16) и кинетических уравнений (17) для l компонент. Выпишем последовательно эти уравнения в векторной форме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} \times \mathbf{V} + \frac{\nabla V^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \tag{13}$$

$$\nabla(\rho\mathbf{V}) = 0, \tag{14}$$

$$\rho\mathbf{V}\left(\nabla h - \frac{\nabla p}{\rho}\right) = 0, \tag{15}$$

$$p = R\rho T \sum_{i=1}^{l} \frac{c_i}{m_i}, \tag{16}$$

$$\nabla(\rho c_i \mathbf{V}) = \omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l). \tag{17}$$

Сюда надо присоединить еще выражение для удельной энтальпии

$$h = \sum_{i=1}^{l} c_i h_i, \qquad h_i = h_i' + h_i^\circ, \qquad h_i' = \int_0^T c_{pi}\, dT.$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\mathbf{V}$, p, ρ, T — скорость, давление, плотность и температура соответственно, R — универсальная газовая постоянная, ω_i — массовая скорость образования компоненты i в результате химических реакций, c_i, m_i, c_{pi} — массовая концентрация, молекулярный вес и удельная теплоемкость при постоянном давлении компоненты i соответственно, h_i° — энтальпия образования компоненты i, экстраполированная к абсолютному нулю.

Если предположить, что существует локальное равновесие внутренних степеней свободы компонент, то соответствующую им удельную энтропию S' можно определить следующим образом:

$$T\nabla S' = \nabla h' - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Тогда уравнение энергии (15) запишется в виде

$$\nabla(\rho S' \mathbf{V}) = -\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{l} \omega_i h^\circ_i.$$

Систему (13) — (17) можно упростить, если включить в нее все известные интегралы. В частности, вместо некоторых кинетических уравнений целесообразно ввести уравнение Дальтона

$$\sum_{i=1}^{l} c_i = 1$$

и уравнения материального баланса. Вводя интеграл Бернулли

$$h + \frac{V^2}{2} = h_{\text{тор}}$$

вместо уравнения движения в проекции на s или вместо уравнения энергии, получим две эквивалентные системы исходных уравнений. Первая система использовалась при решении в координатах s, n, а вторая — в s, ζ. Краевые условия на контуре тела, ударной волне, оси симметрии и условия регулярности или условия на граничной характеристике полностью замыкают задачу.

Для совершенного газа уравнение энергии (15) удобно брать в форме

$$S = S_{\text{в}}(\Psi),$$

где Ψ — функция тока, $S_{\text{в}}$ — значение энтропии непосредственно за ударной волной. Кроме того, в этом случае

$$h = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho}, \qquad S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\varkappa} + \text{const},$$

где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, $\varkappa$ — показатель адиабаты. Тогда из исходной системы легко исключаются p, ρ, T, и система будет состоять из четырех уравнений со следующими неизвестными функциями: u, v (составляющие скорости V вдоль n и s), S, Ψ.

В случае течения равновесной смеси реагирующих газов значения равновесных концентраций c_i определяются из решения нелинейной алгебраической системы уравнений термодинамики, которая получается из условий $\omega_i = 0$. В исходную систему (13) — (17) в этом случае можно и не вводить величин c_i. Тогда энтальпия и уравнение состояния запишутся в таком виде:

$$h = h(p, T), \quad \rho = \rho(p, T).$$

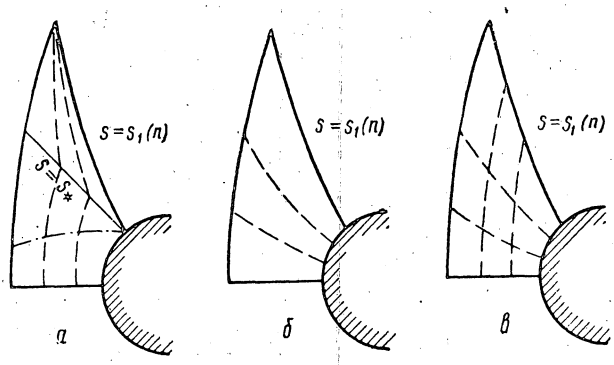
Эти зависимости для каждой конкретной смеси газов берутся из термодинамических таблиц, которые для расчетов удобно аппроксимировать. Для воздуха такие аппроксимации построены, например, И. Н. Наумовой [18]. Уравнение энергии для равновесных течений записывается так же, как и для совершенного газа.

Таким образом, расчет течений совершенного газа или равновесных течений реального газа можно проводить по общим уравнениям, имеющим место для неравновесного случая.

При решении рассматриваемой задачи методом интегральных соотношений применялись три типа схем построения аппроксимирующих систем.

Схема I.

Исходная система уравнений записывается в координатах s, n. Область интегрирования (фиг. 10*а*) разбивается на полосы равноотстоящими по n линиями, проведенными между телом $n = 0$ или граничной характеристикой $s = s_1(n)$ и ударной волной $n = \varepsilon(s)$. Подынтегральные функции заменяются интерполяционными полиномами по n. Аппроксимирующая система в N-м приближении имеет на оси симметрии ($s = 0$) N произвольных



Фиг. 10

параметров, а в поле течения N особых точек, через которые проходит единственное регулярное решение. Из условия регулярности решения в особых точках однозначно определяются произвольные параметры при $s = 0$. Расположение особых точек таково, что область влияния аппроксимирующей системы всегда больше минимальной области влияния точной системы уравнений.

Рассматривались два варианта схемы. В первом из них область интегрирования ограничивается сверху предельным лучом $s = s_* = \text{const}$. Во втором случае область ограничивается сверху характеристикой, первого семейства, проходящей между ударной волной и телом. Расчеты по обоим вариантам схемы I дают близкие результаты.

Схема I выгодна для расчетов течений при больших значениях числа Маха M_∞. В ней более точно определяются ударная волна и распределение газодинамических параметров на теле. Для $M_\infty = 4 \div 6$ достаточная точность в области носовой части тела имеет место уже при $N = 2$, а для $M_\infty > 10$ можно ограничиться первым приближением ($N = 1$). Хорошие результаты получаются здесь и при расчете тел сложной формы. Схема I уже при малых N дает приемлемые начальные данные для досчета сверхзвуковой области течения методом характеристик, поскольку возмущения в начальных данных на граничном луче или характеристике быстро затухают вниз по потоку. Следует заметить, что в этой схеме краевые условия задачи на всех границах выполняются точно.

Схема I решения задачи о сверхзвуковом обтекании носовой части затупленного тела потоком совершенного газа была разработана для плоского случая в [19], [20] и для осесимметричного случая в [21], причем здесь применялись полярные координаты. Течения реального газа рассматриваются в [22], где были проведены расчеты обтекания сферы потоком воздуха с учетом равновесной диссоциации и ионизации. По схеме I

рассчитывалось обтекание носовых частей тел, имевших различный контур — гладкий, с разрывом кривизны, с изломом. Результаты таких расчетов для круговых цилиндров и для эллипсоидов вращения опубликованы, соответственно, в [23] и [24]. Кроме того, по начальным данным, полученным в этой схеме решения, были проведены расчеты сверхзвуковой части течения на затупленных телах методом характеристик [25], [26], в частности были рассчитаны подробные таблицы течений около затупленных конусов [27].

Случай затупленного тела вращения, контур которого имеет излом, рассмотрел также А. П. Базжин [28], который применял схему I на носовой части в координатах s, $t = 2\Psi/\rho_\infty V_\infty r_в^2$ (где Ψ —функция тока, $r_в$ — расстояние от оси течения до некоторой точки на ударной волне), а в точке излома — в координатах θ, t (где θ — полярный угол).

Схема II.

Исходная система уравнений записывается в координатах s, ζ, в которых распрямляются контур тела ($\zeta = 0$) и ударная волна ($\zeta = 1$). Промежуточные линии (фиг. 10*б*) проводятся равноотстоящими по s между осью симметрии $s = 0$ и граничной характеристикой $s = s_1(\zeta)$. Аппроксимирующие полиномы по s строятся с учетом симметрии. Ударная волна представляется полиномом четной степени. Аппроксимирующая система не имеет в этом случае особых точек, но в N-м приближении соответствующая краевая задача содержит $N + 1$ неизвестных параметров на ударной волне (значения ε на границах полос) и $N + 1$ условий на теле (условия непротекания) для их определения.

Эта схема выгодна в тех случаях, когда представляемые функции изменяются по s более слабо, чем по n, что имеет место, например, при малых значениях числа Маха M_∞ или в неравновесных течениях. Для тел с нерезко меняющейся кривизной схема II дает хорошую точность уже при небольших N. Краевые условия задачи на ударной волне и теле в этой схеме выполняются лишь в отдельных точках, число которых растет с N.

При помощи схемы II рассматривался уже упоминавшийся предельный случай — обтекание тел звуковым потоком газа $M_\infty = 1$ (см. [14], [15]), когда ударная волна отходит от тела на бесконечно большое расстояние. Так же были проведены расчеты слабой отошедшей ударной волны (волна предполагалась искривленной, но течение за ней — потенциальным). Сейчас эта схема применяется к расчету неравновесных течений. Схема III.

Область интегрирования разбивается на подобласти (фиг. 10 *в*) Функции аппроксимируются по двум направлениям, и задача сводится к решению системы трансцендентных уравнений. Такая схема решения применялась в 1952 г. П. И. Чушкиным при расчете сверхзвукового обтекания клина с отошедшей ударной волной.

Эта схема может оказаться полезной при расчете течения перед затупленным телом с учетом излучения, так как схемы I и II приводят здесь к необходимости решать краевые задачи высокого порядка. Однако надо иметь в виду, что эта схема дает меньшую точность, чем две первые схемы.

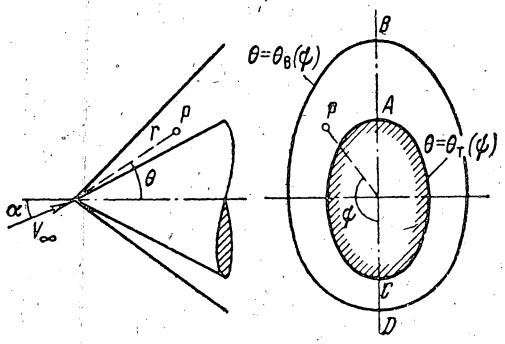
В последнее время появился ряд работ [29], [30], [31], [32], [33] различных авторов по применению метода интегральных соотношений к рас-

чету сверхзвукового обтекания носовой части затупленного тела потоком газа. Во всех этих работах (за исключением статьи Трауготта [31], предложившего применять для произвольного тела координаты s, n), по существу, описываются схемы решения, аналогичные схемам, ранее опубликованным в [19], [20], [21], а приводимые результаты расчетов менее полны и менее точны, чем результаты расчетов, выполненных в Вычислительном центре Академии наук СССР.

Отметим еще, что сейчас А. П. Базжин решает методом интегральных соотношений задачу о сверхзвуковом обтекании носовой части произвольного плоского затупленного профиля, расположенного под углом атаки.

2. Сверхзвуковые конические течения без осевой симметрии

Метод интегральных соотношений был применен также к расчету сверхзвуковых конических течений без осевой симметрии — как в случае обтекания конуса произвольного вида, так и в случае обтекания кругового конуса под углом атаки α. Рассматривались течения с присоединенной конической ударной волной, вершина которой совпадает с вершиной обтекаемого конуса, но форма которой заранее не известна (фиг. 11).



Фиг. 11

Решение строится в сферических координатах r, θ, ψ. В силу коничности течение не зависит от координаты r, и его можно рассматривать, например, на сфере единичного радиуса. В систему уравнений задачи в случае совершенного газа включаются уравнение неразрывности, два уравнения движения в проекции на линии $\theta = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, интеграл Бернулли (который заменяет уравнение движения в проекции на линию $r = \text{const}$) и уравнение энтропии. Последнее можно брать в виде дифференциального уравнения или в виде уравнения $S = \text{const}$ на поверхности тока. Общая форма дифференциальных уравнений системы такова:

$$\frac{\partial P(\theta, \psi)}{\partial \theta} + \frac{\partial Q(\theta, \psi)}{\partial \psi} = F(\theta, \psi). \tag{18}$$

Эту систему нужно интегрировать в области между обтекаемым конусом, заданным уравнением $\theta = \theta_т(\psi)$, и искомой ударной волной $\theta = \theta_в(\psi)$ при определенных краевых условиях на конусе (условие непротекания) и на волне (условия на сильном разрыве). Будем рассматривать только случай конуса с симметричным поперечным сечением, поэтому $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$.

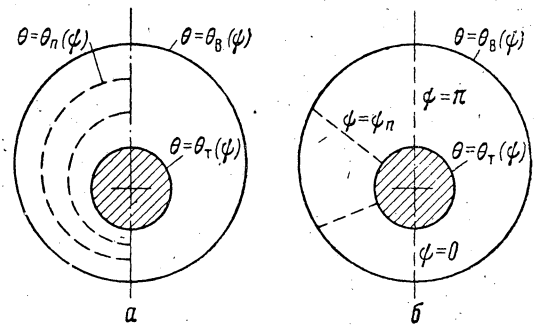
Исходная система уравнений представляет собой систему смешанного типа. Однако, в отличие от задачи об обтекании носовой части затупленного тела, течение здесь не является непрерывно ускоряющимся, и это усложняет его расчет. Еще одна трудность возникает из-за того, что энтро-

пия S имеет особую точку A (фиг. 11), в которой сходятся линии постоянной энтропии, причем одной из этих линий является контур тела. В случае кругового конуса, расположенного под углом атаки, эта особая точка находится на подветренной стороне тела. Для конусов же общего вида может быть несколько таких точек, и тогда энтропия на поверхности тела будет кусочно-постоянной.

В рассматриваемой задаче, как и в задаче обтекания затупленного тела с отошедшей ударной волной, возможно применение трех схем метода интегральных соотношений.

Схема I.

Область интегрирования между поверхностью тела и ударной волной (фиг. 12*а*) делится на полосы равноотстоящими по θ линиями $\theta = \theta_n(\psi)$. После интегрирования и проведения аппроксимаций по θ степенными полиномами получается аппроксимирующая система $4N$ обыкновенных дифференциальных уравнений по ψ с краевыми условиями на меридиональных плоскостях симметрии $\psi = 0$ и $\psi = \pi$.



Фиг. 12

В N-м приближении, в том случае, когда линия тока CD, определяющая значение энтропии на теле, лежит в плоскости $\psi = 0$, имеется $2N$ неизвестных параметров в краевых условиях при $\psi = 0$ и для их определения столько же известных условий при $\psi = \pi$. В первом приближении неизвестными параметрами при $\psi = 0$ служат величина угла $\theta_в$ и составляющая скорости V_r, а условия при $\psi = \pi$ имеют вид $d\theta_в/d\psi = V_\psi = 0$. В каждом следующем приближении добавляются два неизвестных параметра (составляющие скорости $V_{\theta n}$ и V_{rn} на линии $\theta = \theta_n(\psi)$) и два условия ($V_{\psi n} = 0$, $S_n = S_B$). Если линия тока CD подходит к поверхности конуса в произвольном месте, то в N-м приближении появляется один дополнительный неизвестный параметр — значение энтропии на поверхности тела, который находится в результате расчета поля течения.

Схема I рассматривалась в работе [34], где были проведены расчеты при $N = 1$ обтекания кругового конуса под углом атаки α и эллиптического конуса при $\alpha = 0$, а также расчеты при $N = 2$ осесимметричного течения около кругового конуса (для сравнения с точным решением). При небольших значениях угла атаки α и высоких M_∞ удовлетворительную точность дает уже первое приближение. Но при больших α оказывается, что линия параболичности, т. е. линия, на которой составляющая скорости $\sqrt{V_\theta^2 + V_\psi^2}$ равна местной скорости звука, подходит к поверхности конуса, и тогда условия при $\psi = \pi$ перестают влиять вверх по течению. Аппроксимирующая система при этом имеет особую точку, и непосредственно применять эту схему дальше нельзя. Здесь надо сопрягать метод интегральных соотношений с методом характеристик.

В схеме I энтропия на конусе постоянна, но она не имеет особенности в точке A. Однако с увеличением числа полос, используя условие $S_n = S_B$, можно все лучше приближаться к нужной картине распределения энтропии в поле течения.

Схема II.

В этой схеме проводится распрямление рассматриваемой области течения при помощи введения переменной $\zeta = (\theta - \theta_т)/(\theta_в - \theta_т)$. Новая область интегрирования $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ разбивается в N-м приближении на N полос при помощи лучей $\psi = \psi_n = \text{const}$ (фиг. 12*б*).

Для решения применяется обобщенный метод интегральных соотношений. Уравнения типа (18) умножаются в зависимости от их четности на $\sin n\psi$ или $\cos n\psi$ ($n = 1, 2, \ldots, N$), а затем интегрируются по ψ. Для подынтегральных функций (также в соответствии с их четностью) используются тригонометрические аппроксимации вида

$$\mathcal{F}_{\text{чет}}(\zeta, \psi) = \sum_{n=0}^{N+1} a_n(\zeta) \cos n\psi,$$

$$\mathcal{F}_{\text{нечет}}(\zeta, \psi) = \sum_{n=1}^{N} b_n(\zeta) \sin n\psi.$$

Аппроксимирующая система состоит из $4N$ обыкновенных дифференциальных уравнений по θ для составляющих скорости V_r, V_θ, V_ψ и энтропии S на лучах $\psi = \text{const}$. Эту систему интегрируют численно, идя от ударной волны к телу по лучам $\psi = \text{const}$. Неизвестными параметрами при решении краевой задачи служат N значений угла ударной волны $\theta_в$ на рассматриваемых лучах, которые подбираются по соответствующему числу условий непротекания на поверхности конуса.

Для расчета конических течений методом интегральных соотношений можно применять также схему III, основанную на двойном интегрировании исходной системы уравнений по переменным θ и ψ и сведении ее к системе трансцендентных уравнений. Отметим, что в схемах II и III не удается обеспечить нужное распределение энтропии с особенностью в точке A. Чтобы получить такое распределение S, надо при построении численного решения выделять область вблизи точки A, задавая там особенность требуемого типа.

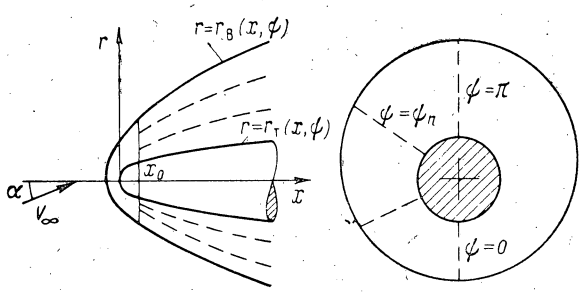
Метод интегральных соотношений можно распространить еще на один случай конического течения — случай сверхзвукового обтекания треугольного крыла под углом атаки; здесь возможно построить решение как для верхней, так и для нижней поверхностей крыла. Наконец, укажем, что расчет конических течений реального газа проводится аналогично рассмотренному выше расчету течения реального газа около затупленного тела.

3. Обтекание тела вращения, расположенного под углом атаки в сверхзвуковом потоке газа

Эта задача является трехмерной задачей, что вызывает определенные трудности при ее численном решении. Здесь будет рассмотрен расчет чисто

сверхзвуковой области течения, где приходится решать задачу Коши для системы уравнений гиперболического типа. Опишем кратко применение метода интегральных соотношений к численному решению данной трехмерной задачи для гладких тел (рассмотрено П. И. Чушкиным).

Решение проводится в цилиндрической системе координат x, r, ψ (фиг. 13). Предполагается, что начальные данные известны на некоторой плоскости $x = x_0$, расположенной в сверхзвуковой области. Если тело имеет заостренную носовую часть, то ее заменяют конусом и находят начальные данные в результате расчета конического течения. Для затупленного тела, имеющего сферическую носовую часть, начальные данные могут быть взяты из расчета обтекания сферы с отошедшей ударной волной.



Фиг. 13

В случае совершенного газа в качестве уравнений задачи берутся уравнение неразрывности, два уравнения движения, интеграл Бернулли (вместо уравнения движения в проекции на ось x) и уравнение для энтропии. Проводится преобразование координат для распрямления тела и ударной волны:

$$\zeta = \frac{r - r_т}{r_в - r_т},$$

где $r = r_т(x, \psi)$ и $r = r_в(x, \psi)$ — уравнения тела и ударной волны соответственно.

Дифференциальные уравнения задачи будут иметь вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial \zeta} + \frac{\partial R}{\partial \psi} = F, \tag{19}$$

где все функции зависят от x, ζ, ψ. Для этих уравнений ставятся обычные краевые условия — условия непротекания на поверхности тела и известные условия на ударной волне.

Здесь будет рассмотрен случай тела вращения $r = r_т(x)$, для которого рассчитываемая область течения определяется неравенствами

$$x > x_0, \qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \pi.$$

Решение в случае тела с поперечным сечением общего вида связано, по существу, с дополнительными техническими усложнениями.

Применим подход, аналогичный подходу В. В. Сычева [35]. Проведем в рассматриваемой области течения $N - 1$ промежуточных равноотстоящих меридиональных плоскостей $\psi = \psi_n = \text{const}$. Далее в уравнениях вида (18) четные и нечетные функции от ψ представим по их значениям на

этих меридиональных плоскостях тригонометрическими выражениями

$$\mathcal{F}_{\text{чет}}(x, \zeta, \psi) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x, \zeta) \cos n\psi,$$

$$\mathcal{F}_{\text{нечет}}(x, \zeta, \psi) = \sum_{n=1}^{N-1} b_n(x, \zeta) \sin n\psi.$$

После подстановки этих аппроксимаций в уравнения (19) придем к системе уравнений в частных производных по x и ζ, имеющих дивергентную форму

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{N} c_n a_n(x, \zeta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \sum_{n=1}^{N-1} d_n b_n(x, \zeta) = G(x, \zeta), \tag{20}$$

где c_n и d_n — числовые коэффициенты.

Таким образом, исходная система трехмерных уравнений сводится к системе двумерных уравнений, связывающей функции, рассматриваемые на отдельных меридиональных плоскостях. К последней системе применяется метод интегральных соотношений, развитый для задач в двух переменных, причем аппроксимации проводятся по ζ степенными полиномами. В конечном счете получается аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений по x, которая связывает ряд функций на линиях, представляющих собой сечение ударной волны и поверхности тела $N + 1$ меридиональными плоскостями, и на промежуточных линиях, лежащих в тех же меридиональных плоскостях. Для этой системы решается задача Коши.

Для частного случая расчета сверхзвуковой области на теле вращения (с заостренной или затупленной носовой частью произвольной формы), обтекаемой под нулевым углом атаки, соответствующая аппроксимирующая система выводится из общей аппроксимирующей системы, если принять в ней условие независимости всех функций от ψ.

Решение системы двумерных уравнений в частных производных (20), имеющей гиперболический тип, можно проводить также численным методом характеристик, который в этом случае применяется на отдельных, связанных между собой меридиональных плоскостях. Здесь необходимо пользоваться таким методом характеристик, в котором решение строится по слоям, ограниченным плоскостями $x = \text{const}$.

Надо сказать, что описанным выше трехмерным методом можно решать и двумерную задачу о сверхзвуковом обтекании конуса под углом атаки, определяя решение в результате установления автомодельности по x.

Отметим еще, что рассмотренная схема метода интегральных соотношений непосредственно распространяется и на расчет дозвуковой области на носовой части затупленного тела в трехмерном случае, где, очевидно, целесообразнее брать координаты s, n, ψ. Однако здесь фактическое решение существенно усложняется из-за наличия краевой задачи высокого порядка для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 3. Расчет течений вязкого газа

При помощи обобщенного метода интегральных соотношений был проведен расчет как несжимаемого, так и сжимаемого ламинарного пограничного слоя на плоских и осесимметричных телах с учетом излучения и теплопроводности.

Рассмотрим в качестве примера плоский случай. Исходная система уравнений для сжимаемого ламинарного пограничного слоя при помощи переменных Дородницына

$$\xi = \int_0^x U \frac{p}{p_{\text{тор}}} dx, \qquad \eta = \frac{U}{\sqrt{\nu_{\text{тор}}}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_{\text{тор}}} dy$$

приводится к виду

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\dot{U}}{U} \frac{h - u^2}{\tau_e} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \tag{22}$$

$$u \frac{\partial h}{\partial \xi} + w \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Pr}}\left(b \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) - \bar{U}^2 \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1\right) \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b \frac{\partial u^2}{\partial \eta}\right) \tag{23}$$

и имеет граничные условия

$$u = w = 0 \qquad \text{при } \eta = 0,$$
$$u \to 1, \qquad h \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty.$$

К этим условиям надо еще добавить условие баланса тепла на стенке ($\eta = 0$).

Здесь приняты следующие обозначения:

$$w = \frac{\tilde{U}}{U \sqrt{\nu_{\text{тор}}}} + \frac{\dot{U}}{U} \eta u, \qquad h = u^2 \bar{U}^2 + \tau,$$

$$\dot{U} = \frac{dU}{d\xi}, \qquad \bar{U}^2 = \frac{U^2}{2 J c_p T_{\text{тор}}},$$

$$\tau = \frac{T}{T_{\text{тор}}}, \qquad b = b(\tau) = \frac{\nu \rho}{\tau \nu_{\text{тор}} \rho_{\text{тор}}},$$

U — скорость на внешней границе пограничного слоя,
u — касательная составляющая скорости, отнесенная к U,
$\tilde{U}$ — величина, связанная с нормальной составляющей скорости,
p, ρ, T — давление, плотность, температура соответственно,
h — энтальпия,
ν — кинематический коэффициент вязкости,
Pr — число Прандтля,
J — механический эквивалент тепла,
c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Индексы «тор» и «e» относятся к параметрам торможения и параметрам на внешней границе поля соответственно.

Для составления интегральных соотношений умножим уравнение (22) на некоторую функцию $f(u)$, которая будет определена ниже, а уравнение (21) — на $f'(u)$ и сложим их. Интегрируя полученную комбинацию по η поперек пограничного слоя и переходя затем к переменной

u $(0 \leqslant u \leqslant 1)$, выведем первое интегральное соотношение

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \Theta u f(u)\,du = \frac{\dot{U}}{U\tau_e}\left[\int_0^1 \Theta(1-u^2) f'(u)\,du - \right. \tag{24}$$

$$\left. - \int_0^1 \Theta(1-h) f'(u)\,du\right] - \frac{b_0 f'(0)}{\Theta_0} - \int_0^1 \frac{b}{\Theta} f''(u)\,du.$$

Здесь $\Theta = 1/\frac{\partial u}{\partial \eta}$ — величина, обратно пропорциональная коэффициенту трения, а индексом «0» обозначены значения величин на теле. Аналогично, умножая уравнение (21) на $(1-\Theta) f'(u)$, уравнение (22) — на $(1-\Theta) f(u)$, уравнение (23) — на $f(u)$, складывая их и интегрируя по η поперек слоя, придем ко второму интегральному соотношению (которое мы здесь не приводим). Эти два интегральных соотношения содержат две искомые функции Θ и $\omega = \Theta(1-h)$. После определения этих функций по ним можно найти другие интересующие нас характеристики пограничного слоя.

Для несжимаемой жидкости, в частности, имеем

$$h \equiv 1, \quad \tau_e \equiv 1, \quad b = 1, \quad \xi = \int_0^x U dx, \quad \eta = \frac{Uy}{\sqrt{\nu_{\text{тор}}}}.$$

Здесь будет только одна искомая функция Θ, и для ее определения служит одно интегральное соотношение (24), которое в этом случае перепишется так:

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^1 \Theta u f(u)\,du = \frac{\dot{U}}{U}\int_0^1 \Theta(1-u^2) f'(u)\,du - \frac{f'(0)}{\Theta_0} - \int_0^1 \frac{1}{\Theta} f''(u)\,du.$$

От функции $f(u)$ требуется, чтобы она достаточно быстро стремилась к нулю при $u \to 1$ и чтобы при этом была обеспечена сходимость интегралов. Известно, что при $u \to 1$ $\Theta = O\left(\frac{1}{1-u}\right)$, поэтому для случая несжимаемой жидкости в N-м приближении в качестве системы функций $\{f_n(u)\}$ возьмем систему степенных функций $\{(1-u)^n\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Разбиение области интегрирования $0 \leqslant u \leqslant 1$ на полосы проводится линиями $u_n = \text{const}$, а подынтегральные функции представляются так:

$$\Theta = \frac{1}{1-u}\sum_{n=0}^{N-1} a_n u^n, \quad \frac{1}{\Theta} = (1-u)\sum_{n=0}^{N-1} b_n u^n. \tag{25}$$

Интегральные соотношения, составленные для каждой функции $f_n(u)$, после подстановки в них аппроксимаций (25) дают для определения величин Θ_n систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой решается задача Коши.

В случае сжимаемого пограничного слоя берется $2N-1$ интегральных соотношений, в которых используется та же система функций $\{f_n(u)\}$, но, кроме аппроксимаций (25), здесь еще проводятся аппроксимации других подынтегральных функций.

Аппроксимирующая система в этом случае состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений для функций Θ_n и ω_n.

Изложенный выше метод был развит А. А. Дородницыным [3] для расчета несжимаемого ламинарного пограничного слоя. Здесь были построены аппроксимирующие системы для $N = 1, 2, 3, 4$, а проведенные расчеты

позволили получить достаточно точные характеристки пограничного слоя (в частности, профили скорости) вплоть до точки отрыва. Ю. Н. Павловский [36] применил метод интегральных соотношений к расчету сжимаемого пограничного слоя в весьма общих случаях. Он дал схемы решения для пограничного слоя на плоских и осесимметричных, заостренных и затупленных телах с учетом теплопроводности и излучения при любом постоянном значении числа Прандтля Pr и любой зависимости вязкости от температуры. Лю Шэнь-цюань [37] провел методом интегральных соотношений расчеты ламинарного пограничного слоя в несжимаемом и сжимаемом случаях при наличии непрерывно распределенного отсоса или вдува.

Надо сказать, что вышеописанный метод без особого труда можно распространить и на такие пограничные слои, в которых теплоемкость при постоянном давлении c_p и число Прандтля Pr не постоянны, а являются заданными функциями температуры.

В заключение отметим, что численный метод интегральных соотношений, который, как показывает сделанный здесь обзор, широко применяется для решения различных задач аэродинамики, естественно, может быть использован для решения других задач механики и физики.

Поступила в редакцию
1. 06. 1962

Цитированная литература

1. А. А. Дородницын. Решение математических и логических задач на быстродействующих вычислительных машинах. Всес. конференция «Пути развития советского матем. машиностр. и приборостр.», 1956 г. Ч. I. М., ВИНИТИ, 1956, 44—52.
2. А. А. Дородницын. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всес. матем. съезда, 1956 г. Т. III. М., Изд-во АН СССР, 1958, 447—453.
3. А. А. Дородницын. Об одном методе решения уравнения ламинарного пограничного слоя. Прикл. механ. и техн. физ., 1960, 1, № 3, 111—118.
4. A. A. Dorodnicyn. A contribution to the solution of mixed problems of transonic aerodynamics. Advances Aeronaut. Sci., Vol. 2. London — New York — Paris — Los Angeles, Pergamon Press, 1959, 832—844.
5. А. А. Дородницын. Численные методы в газовой динамике. Arch. Mech. Stosowanej, 1960, **12**, № 1, 13—28.
6. О. Н. Кацкова, П. И. Чушкин, Ю. Д. Шмыглевский. Некоторые задачи газовой динамики. Всес. конференция «Пути развития советского матем. машиностр. и приборостр.», 1956 г. Ч. III. М., ВИНИТИ, 1958, 106—114.
7. О. М. Белоцерковский, П. И. Чушкин. Решение на электронных счетных машинах некоторых задач аэродинамики больших скоростей. Тр. Всес. совещания по вычисл. матем. и применению средств вычисл. техн., 1958 г. Баку, Изд-во АН АзербССР, 1961, 39—52.
8. П. И. Чушкин. Численное интегрирование мезонного уравнения для случая осевой симметрии. Отчет ВЦ АН СССР. М., 1956.
9. H. S. Tsien. The Poincaré—Lighthill—Kuo method. Advances Appl. Mech., Vol. 4. Academic Press, N. Y., 1956, 281—349 (русск. перев.: Цянь Сюэ-сень. Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Го. В сб. «Проблемы механики», ред. Х. Драйден, Т. Карман. М., Изд-во ин. лит., 1959, 7—62).
10. R. Vaglio-Laurin. On the PLK method and the supersonic blunt-body problem. J. Aero/Space Sci., 1962, **29**, № 2, 185—206, 248.
11. П. И. Чушкин. Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа. В сб. Вычисл. матем.», № 2. М., Изд-во АН СССР, 1956, 20—44.
12. П. И. Чушкин. Дозвуковое обтекание эллипсов с циркуляцией. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 4, 748—751.

13. П. И. Чушкин. Расчет обтекания произвольного профиля и тела вращения в дозвуковом потоке газа (симметричный случай). В сб. «Вычисл. матем.» № 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, 99—110.
14. П. И. Чушкин. Обтекание эллипсов потоком газа со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 3, 517—519.
15. П. И. Чушкин. Расчет некоторых звуковых течений газа. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 3, 353—360.
16. Я. И. Алихашкин, В. П. Радченко. Расчет сопла. Отчет ВЦ АН СССР. М., 1956.
17. Ван Жу-цюань. Расчет осесимметричных кольцевых сопел. Дисс.. М., ВЦ АН СССР, 1962.
18. И. Н. Наумова. Аппроксимация термодинамических функций воздуха. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 2, 295—300.
19. О. М. Белоцерковский. Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 3, 509—512.
20. О. М. Белоцерковский. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 2, 206—219.
21. О. М. Белоцерковский. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине. Прикл. матем. и механ., 1960, **24**, № 3, 511—517.
22. О. М. Белоцерковский. Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного и реального газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 6.
23. О. М. Белоцерковский. Расчет обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. В сб. «Вычисл. матем.» № 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, 149—185.
24. О. М. Белоцерковский. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной (расчетные формулы и таблицы полей течений). М., ВЦ АН СССР, 1961.
25. П. И. Чушкин. Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. Прикл. матем. и механ., 1960, **24**, № 5, 927—930.
26. О. М. Белоцерковский, П. И. Чушкин. Сверхзвуковое обтекание затупленных тел. Arch. Mech. Stosowanej, 1962, **14**, № 3.
27. П. И. Чушкин, Н. П. Шулишнина. Таблицы сверхвукового течения около затупленных конусов. М., ВЦ АН СССР, 1961.
28. А. П. Базжин. Расчет течения перед тупоносым телом вращения, имеющим угловую точку. Инженерный ж. (б. Инженерный сб.), 1961, **1**, № 1, 154—159.
29. Ф. В. Шугаев. Сверхзвуковое обтекание осесимметричных тупых тел с отошедшей ударной волной. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1961, № 2, 46—53.
30. D. L. Chubb. Solution to the flow about a two-dimensional flat plate at infinite Mach number. J. Aero/Space Sci., 1960, **27**, № 1, 68.
31. S. C. Traugott. An approximate solution of the direct supersonic blunt-body problem for arbitrary axisymmetric shapes. J. Aero/Space Sci., 1960, **27**, № 5, 361—370.
32. M. Holt, G. H. Hoffman. Calculation of hypersonic flow past spheres and ellipsoides. Amer. Rocket Soc. (Preprints), 1961, № 209.
33. M. Holt. Direct calculation of pressure distribution of blunt hypersonic nose shapes with sharp corners. J. Aero/Space Sci., 1961, 28, № 11, 872—876.
34. П. И. Чушкин, В. В. Щенников. Расчет некоторых конических течений без осевой симметрии. Инж.-физ. ж., 1960, **3**, № 7, 88—94.
35. В. В. Сычев. Расчет распределения давлений по телам вращения под углом атаки в свехзвуковом потоке газа. В «Сб. теорет. работ по аэродинамике». М., Оборонгиз, 1957, 127—139.
36. Ю. Н. Павловский. Численный расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5 884—901.
37. Л Ю Шэнь-цюань. Расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 5 868—883.