

Из вида операторов Q_0 и Q_0^* несложно заключить, что правая часть (4.7) может быть записана в виде правой части (4.4). Теорема доказана.

Автор глубоко признателен В. А. Ильину и М. Б. Оразову за полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Гараджаев А. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 2. С. 277—281.
2. Соболев С. Л. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3—50.
3. Александрян Р. А. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 455—505.
4. Зеленьяк Т. И. Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Новосибирск, 1970.
5. Зеленьяк Т. И., Капитонов Б. В., Сказка В. В., Фокин М. В. О проблеме С. Л. Соболева в теории малых колебаний вращающейся жидкости. Новосибирск, 1983. (Препринт: № 471).
6. Копачевский Н. Д. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. Харьков, 1978. (Препринт: № 38—77).
7. Ralston J. V. // J. of math. anal. and appl. 1973. Vol. 44. P. 366—383.
8. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., 1965.
9. Рапопорт И. М. Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью. М., 1967.
10. Оразов М. Б. // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1980. С. 148—151.
11. Копачевский Н. Д. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 5. С. 1065—1068.
12. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М., 1974.
13. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, 1978. Т. 2.
14. Оразов М. Б., Радзиевский Г. В. // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 572—587.
15. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
16. Гохберг И. Ц. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 5. С. 1055—1082.
17. Радзиевский Г. В. // Мат. сб. 1973. Т. 91, № 3. С. 310—335.
18. Параска В. И. // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 4. С. 621—631.
19. Гасымов М. Г. // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. 1971. Т. 6, № 2—3. С. 131—147.
20. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., 1984.
21. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., 1979.
22. Рапопорт И. М. Колебание упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М., 1967.
23. Радзиевский Г. В. // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. С. 396—420.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

УДК 517.95

В. Н. ДЕНИСОВ

О СТАБИЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ ОТ РАЗНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая работа посвящена выяснению необходимых и достаточных условий стабилизации средних Чезаро — Рисса по времени от решения задачи Коши для волнового уравнения, уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (ЭПД) и итерированного волнового уравнения.

Необходимые и достаточные условия стабилизации средних Рисса по времени от решения задачи Коши для уравнения ЭПД при $u(x, 0) =$

$=u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, 0 \leq k \leq N-1$ (и, в частности, волнового уравнения) получены в работе [1]. Отметим, что в работе [1] не налагается никаких требований на порядок роста функции $u_0(x)$ на бесконечности. Условия стабилизации средних по времени от решения задачи Коши для равномерно гиперболического уравнения дивергентного вида в *предположении ограниченности* функции $u_0(x)$ изучены в работе [2].

Будем для краткости обозначать множества точек $\{x \in E^N, t \geq 0\}$, $\{x \in E^N, t > 0\}$ символами $\{t \geq 0\}$ и $\{t > 0\}$ соответственно.

В полупространстве $\{t \geq 0\}$ рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \text{ в } \{t > 0\}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), x \in E^N, \quad (2)$$

где $u_1(x)$ — заданная функция из класса *) $C^{[N/2]+1}(E^N)$. Решение сформулированной задачи существует и единственно [3, с. 379].

Отметим, что в случае задачи Коши (1), (2) нет оснований ожидать результата, аналогичного результату работы [1], ибо даже в случае, когда начальная скорость $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ в задаче (1), (2) является гармонической функцией, отвечающее ей решение $u(x, t) = tu_1(x)$ не имеет предела средних Рисса по времени, в то время как $u_1(x)$ очевидно имеет предел шаровых средних Рисса любого неотрицательного порядка, равный $u_1(x)$. Этот факт сразу же вытекает из формулы среднего значения, справедливой для любой гармонической в E^N функции.

Нам потребуются некоторые результаты относительно свойств шаровых интегральных средних Чезаро — Рисса.

Пусть $f(x)$ — непрерывная в E^N функция. Для фиксированных $m > 0$, $\alpha > -1$ введем при $R > 0$ семейство интегральных средних

$$\sigma_R^\alpha(x, f, m) = \int_{r \leq R} \left(1 - \frac{r^m}{R^m}\right)^\alpha f(y) dy / \int_{r \leq R} \left(1 - \frac{r^m}{R^m}\right)^\alpha dy, r = |x - y|.$$

Переходя к сферическим N -мерным координатам с центром в точке x и используя обозначение **)

$$M(x, \rho, f) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\theta} f(x + \rho\theta) d\theta, \omega_N = 2\pi^{N/2} [\Gamma(N/2)]^{-1},$$

для среднего значения функции $f(x)$ по поверхности сферы радиуса ρ с центром в точке x , получим

$$\sigma_R^\alpha(x, f, m) = \frac{C_1}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^m}{R^m}\right) M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho, \quad (3)$$

где $C_1 = m/B(N/m, \alpha + 1)$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x шаровые средние Чезаро — Рисса $\sigma^\alpha(x, f, m)$; если в этой точке существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^\alpha(x, f, m) = A(x). \quad (4)$$

*) Символ $[A]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее вещественное число A , $\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

**) Символ $\int_{\theta} \dots d\theta$ обозначает интеграл по всем углам на поверхности N -мерной сферы с центром в точке x .

З а м е ч а н и е 1. Используя классические результаты из книги Г. Харди [4, с. 144], легко установить, что шаровые средние $\sigma_R^\alpha(x, f, m)$ являются регулярными средними и обладают свойством включения по порядку α , т. е. если в точке x существует при некотором α предел (4), то при любом $\alpha' > \alpha$ существует равный ему предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^{\alpha'}(x, f, m) = A(x).$$

Имеет место следующая теорема о равносильности методов суммирования.

Т е о р е м а 1. Пусть $\alpha > -1$, $m > 0$, $n > 0$, $f(x)$ — непрерывная в E^N функция.

I. Для того чтобы в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существовал предел *)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^m}{R^m}\right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho = A(x), \quad (5)$$

где $C_1 = m/B(N/m, \alpha + 1)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{C_1'}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^n}{R^n}\right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho = A(x), \quad (6)$$

где $C_1' = n/B(N/n, \alpha + 1)$.

II. Если сходимость в (5) является равномерной по x на каждом компакте K области $G \subset E^N$, то предельная функция $A(x)$ является гармонической в области G .

С л е д с т в и е. Если сходимость в (5) является равномерной по x на каждом компакте $K \subset E^N$, то предельная функция $u_1(x, t) = tA(x)$, где $A(x)$ определена равенством (5), является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$u_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = A(x), \quad x \in E^N. \quad (7)$$

В полупространстве $\{t \geq 0\}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (ЭПД)

$$\Delta u^k(x, t) = \frac{k}{t} \frac{\partial}{\partial t} u^k(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^k(x, t) \quad \text{в } \{t > 0\}, \quad (8)$$

$$u^k(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u^k}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in E^N, \quad (9)$$

где $k > N - 1$ (случай $0 \leq k \leq N - 1$ рассмотрен в работе [1]); $u_0(x)$ — заданная функция из класса $C^2(E^N)$. В работе [5] доказано, что при $k > N - 1$ решение задачи Коши (8), (9) существует, единственно и представимо в виде

$$u^k(x, t) = \frac{2}{B(N/2, (k+1-N)/2)t^N} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^{(k-N-1)/2} M(x, \tau, u_0) \tau^{N-1} d\tau, \quad (10)$$

т. е. в наших обозначениях $u^k(x, t) = \sigma_t^{(k-N-1)/2}(x, u_0, 2)$.

*) Символами C_i , $i = 1, 2, \dots$, будут обозначаться постоянные, которые определяются из условий нормировки соответствующих средних к единице и указываются в явном виде в их первой записи. Символами B и Γ обозначаются интегралы Эйлера первого и второго рода.

Таким образом, вопрос о существовании предела при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши (8), (9) в силу формулы (10) равносильно вопросу о существовании предела при $t \rightarrow \infty$ средних Рисса $\sigma_t^{(k-N-1)/2}(x, u_0, 2)$ от начальной функции. Применяя теорему 1, получаем утверждение.

Теорема 1'. Пусть $m > 0$, $k > N-1$, $u_0(x) \in C^2(E^N)$, $u(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения ЭПД (8), (9). Для того чтобы в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существовал предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = A(x) \quad (11)$$

решения задачи Коши (8), (9), необходимо и достаточно, чтобы в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существовал предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^{(k-N-1)/2}(x, u_0, m) = A(x) \quad (12)$$

шаровых средних Чезаро — Рисса порядка $(k-N-1)/2$ от начальной функции $u_0(x)$.

З а м е ч а н и е. Из формулы (10) при $\alpha = (k-N-1)/2$ и результатов работы [5] следует, что шаровые интегральные средние $\sigma_R^\alpha(x, u_0, 2)$ дважды непрерывно дифференцируемой функции $u_0(x)$ являются решением следующей задачи Коши в полупространстве $\{x \in E^N, R \geq 0\}$:

$$\Delta_x \sigma_R^\alpha(x, u_0, 2) = \frac{2\alpha + N + 1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(x, u_0, 2) + \frac{\partial^2}{\partial R^2} \sigma_R^\alpha(x, u_0, 2) \text{ в } \{R > 0\}, \quad (8')$$

$$\sigma_R^\alpha(x, u_0, 2)|_{R=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(x, u_0, 2)|_{R=0} = 0, \quad x \in E^N. \quad (9')$$

другими словами, $u(x, t) = \sigma_t^{2\alpha+N+1}(x, u_0, 2)$, $\alpha > -1$. Этот факт вместе с теоремами 1 и 1' настоящей работы позволяет выразить в терминах существования предела $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ решения задачи Коши (8), (9) все те утверждения (или условия), которые выражены в терминах существования предела (4) шаровых средних Чезаро — Рисса начальной функции $u_0(x)$.

Рассмотрим задачу Коши (1), (2) для волнового уравнения. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $m > 0$, $n > 0$, $\alpha \geq (N-3)/2$, $u(x, t)$ — решение задачи Коши (1), (2) с начальной функцией $u_1(x)$ из класса $C^{[N/2]+1}(E^N)$. Тогда существование в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) предела

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^{\alpha-(N-3)/2}(x, u_1, m) = A(x) \quad (13)$$

шаровых средних Чезаро — Рисса порядка $\alpha - (N-3)/2$ начальной функции $u_1(x)$ является необходимым и достаточным условием существования в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \frac{C_2}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^n}{t^n} \right)^\alpha u(x, \tau) d\tau \right\} = A(x), \quad (14)$$

где $C_2^{-1} = B(2/n, \alpha+1)/n$.

З а м е ч а н и е 1. Если сходимость в (13) является равномерной по x на каждом компакте $K \subset E^N$, то (14) можно представить в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_2}{t^2} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^n}{t^n}\right)^\alpha [u(x, \tau) - u_1(x, \tau)] d\tau = 0 \quad (14')$$

предела средних по времени от разности решений уравнения (1) с начальными условиями (2) и (7) соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Предельное равенство (14) очевидно можно записать в следующем эквивалентном виде при $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{C_2}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^n}{t^n}\right)^\alpha u(x, \tau) d\tau = t [A(x) + \beta(x, t)], \quad (14'')$$

где в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(x, t) = 0$. Предельные равенства (14), (14'), (14'') показывают, что обычные средние по времени от решения задачи Коши (1), (2) $\sigma_t^\alpha(x, u(x, \cdot), m)$ не имеют конечного предела при $t \rightarrow \infty$. Поэтому более естественными являются регулярные средние по времени (14), которые определяются и *нормируются на решении* задачи Коши (1), (2) с учетом того факта, что $u(x, t) = t$ при $u_1(x) \equiv 1$.

Пусть $l = 1, 2, \dots$ В пространстве $\{t \geq 0\}$ рассмотрим задачу Коши для итерированного волнового уравнения *)

$$\square^l u(x, t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)^l u(x, t) = 0 \text{ в } \{t > 0\}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} u(x, 0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2l - 2, \quad \frac{\partial^{2l-1}}{\partial t^{2l-1}} u(x, 0) = g(x), \quad x \in E^N. \quad (16)$$

В предположении достаточной гладкости функции $g(x)$ решение задачи Коши (15), (16) существует и единственно [6].

Используя теорему 1 настоящей работы, лемму 1 работы [1] и результаты работы [6], получаем следующий результат.

Т е о р е м а 3. Пусть $l = 1, 2, \dots$, $u(x, t)$ — решение задачи Коши (15), (16) для итерированного волнового уравнения с начальной функцией $g(x)$ из класса $C^k(E^N)$, где $k = l[(N+2)/2]$. Пусть $m > 0$, $n > 0$, $\alpha \geq \lambda_1$, где $\lambda_1 = (N-1-2l)/2$ при $1 \leq l < (N-1)/2$ и $\lambda_1 = -1 + \delta$, $\delta > 0$ при $l \geq (N-1)/2$. Тогда существование в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) предела

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^{\alpha - (N-1-2l)/2}(x, g, m) = A(x) \quad (17)$$

средних Чезаро — Рисса порядка $\alpha - (N-1-2l)/2$ начальной функции $g(x)$ является необходимым и достаточным условием существования в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{2l-1}} \left\{ \frac{C_3}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^n}{t^n}\right)^\alpha u(x, \tau) d\tau \right\} = A(x). \quad (18)$$

З а м е ч а н и е. Как и в теореме 2, предельное равенство (18) можно записать в виде предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_3}{t^{2l}} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^n}{t^n}\right)^\alpha [u(x, \tau) - u_1(x, \tau)] d\tau = 0, \quad (18')$$

*) $\square^l u = \square(\square^{l-1} u)$.

$$C_3 = \Gamma(2l)n/B(\alpha+1, 2l/n),$$

средних по времени от разности решений $u(x, t)$ и $u_1(x, t)$ уравнения (15) с начальными условиями (16) и условиями $\frac{\partial^i}{\partial t^i} u_1(x, 0) = 0$, $i=0, 1, \dots, 2l-2$, $\frac{\partial^{2l-1}}{\partial t^{2l-1}} u_1(x, 0) = A(x)$ соответственно. Предельные равенства (18) и (18') показывают, что обычные средние по времени от решения задачи (15), (16) $\sigma_t^\alpha(x, u(x, \cdot), t)$ не имеют конечного предела при $t \rightarrow \infty$ и что более естественными при изучении стабилизации являются средние (18), определенные на решении задачи Коши (15), (16) и нормированные с учетом того, что $u(x, t) = t^{2l-1}/(2l-1)!$ при $g(x) \equiv 1$.

Переходим к доказательству сформулированных результатов. При доказательстве теорем нам потребуется ряд вспомогательных результатов, представляющих и самостоятельный интерес. Имеет место следующее утверждение о связи интегральных средних $\sigma_R^\alpha(x, f, m)$ и $\sigma_R^\alpha(x, f, n)$.

Лемма 1. Пусть $\alpha > -1$, $\alpha = p + \kappa$, где p — целое, а κ удовлетворяет неравенствам $0 < \kappa \leq 1$, $f(x)$ — непрерывная в E^N функция. Тогда при любых положительных m и n справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sigma_R^\alpha(x, f, n) - C_4 \sigma_R^\alpha(x, f, m) &= C_5 \int_0^1 y^{m(p+1)+N} \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy^m} \right)^{p+1} \times \\ &\times \left[(1-y^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{1-y^n}{1-y^m} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] \sigma_{Ry}^{p+1}(x, f, m) dy, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_R^\alpha(x, f, m) - C_6 \sigma_R^\alpha(x, f, n) &= C_7 \int_0^1 y^{n(p+1)+N} \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy^n} \right)^{p+1} \times \\ &\times \left[(1-y^n)^\alpha \left\{ \left(\frac{1-y^m}{1-y^n} \right)^\alpha - \left(\frac{m}{n} \right)^\alpha \right\} \right] \sigma_{Ry}^{p+1}(x, f, n) dy, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$C_4 = \left(\frac{n}{m} \right)^{\alpha+1} B(N/m, \alpha+1) / B(N/n, \alpha+1),$$

$$C_5 = (-1)^p \frac{n}{m} \Gamma(N/m) / B(N/n, \alpha+1) \cdot \Gamma(N/m+p+2),$$

$$C_6 = \left(\frac{m}{n} \right)^{\alpha+1} B(N/n, \alpha+1) / B(N/m, \alpha+1),$$

$$C_7 = (-1)^p \frac{m}{n} \Gamma(N/n) / B(N/m, \alpha+1) \cdot \Gamma(N/n+p+2).$$

Доказательство. Докажем вначале формулу (19). Имеет место равенство

$$\begin{aligned} L &\equiv \frac{1}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^n}{R^n} \right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho - \\ &- \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \frac{1}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^m}{R^m} \right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho = \\ &= R^{-N-m\alpha} \int_0^R (R^m - \rho^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha - \right. \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{n}{m}\right)^\alpha \} M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho. \quad (21)$$

Интегрируя по частям в правой части последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} L = & R^{-N} \left(\frac{R^m - \rho^m}{R^m} \right)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha - \right. \\ & \left. - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \int_0^\rho M(x, y, f) y^{N-1} dy \Big|_{\rho=0+0}^{\rho=R-0} - \\ & - R^{-N-m\alpha} \int_0^R \frac{d}{d\rho} \left[(R^m - \rho^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] \int_0^\rho M(x, y, f) y^{N-1} dy d\rho. \quad (21') \end{aligned}$$

Так как $\lim_{\rho \rightarrow 0+0} \int_0^\rho M(x, y, f) y^{N-1} dy = 0$, то нижняя подстановка в (21') при $\rho = 0+0$ обращается в нуль для любого $\alpha > -1$. Для доказательства обращения в нуль верхней подстановки в (21') при $\rho = R-0$ отдельно рассмотрим случай, когда α удовлетворяет неравенствам $-1 < \alpha < 0$. Полагая при этом $\beta = -\alpha$ и совершая замену переменной $\rho = Ry$ в (21'), получим

$$\begin{aligned} L = & \lim_{y \rightarrow 1-0} R^{-N} \frac{1}{(1-y^m)^\beta} \left[\left(\frac{1-y^m}{1-y^n} \right)^\beta - \left(\frac{m}{n} \right)^\beta \right] \int_0^{Ry} M(x, z, f) z^{N-1} dz - \\ & - R^{-N} \int_0^1 \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{(1-y^m)^\beta} \left\{ \left(\frac{1-y^m}{1-y^n} \right)^\beta - \left(\frac{m}{n} \right)^\beta \right\} \right] \int_0^{Ry} M(x, z, f) z^{N-1} dz dy. \quad (21'') \end{aligned}$$

Совершая замену переменной $q = 1-y$ под знаком предела и разлагая функцию

$$\varphi(q) = \frac{1}{(1-(1-q)^m)^\beta} \left(\left(\frac{1-(1-q)^m}{1-(1-q)^n} \right)^\beta - \left(\frac{m}{n} \right)^\beta \right)$$

по формуле Маклорена, элементарно получим равенство $\lim_{q \rightarrow 0+0} \varphi(q) = 0$, из которого следует обращение в нуль верхней подстановки в (21''). Поэтому равенство (21'') приобретает вид

$$\begin{aligned} L = & -R^{-N} \int_0^1 \frac{d}{dy} \left[(1-y^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{1-y^n}{1-y^m} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] \times \\ & \times \int_0^{Ry} M(x, z, f) z^{N-1} dz dy. \end{aligned}$$

Это представление для разности интегралов L элементарно преобразуется к искомой формуле (19).

Итак, при $-1 < \alpha < 0$ формула (19) доказана. При $\alpha = 0$ имеют место равенства

$$\sigma_R^0(x, f, m) = \sigma_R^0(x, f, n) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_0^R M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho,$$

из которых немедленно вытекает справедливость равенства (19) при $\alpha=0$. Поэтому в дальнейшем при доказательстве леммы 1 будем считать, что $\alpha>0$.

При $\alpha>0$ факт обращения в нуль верхней подстановки при $\rho=R-0$ в (21') вытекает из предельных равенств

$$\lim_{\rho \rightarrow R-0} (R^m - \rho^m)^\alpha = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow R-0} \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha = \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha.$$

Поэтому равенство (21') можно записать в виде

$$L = -R^{-N-m\alpha} \int_0^R \frac{d}{d\rho} \left[(R^m - \rho^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] \int_0^\rho M(x, z, f) z^{N-1} dz d\rho. \quad (22)$$

Интегрируя $p+1$ раз по частям в правой части (22) и учитывая при этом формулу

$$\begin{aligned} & \int_0^\rho m y_i^{m-1} dy_i \int_0^{y_i} \dots \int_0^{y_i} m y_i^{m-1} dy_i \int_0^{y_i} z^{N-1} M(x, z, f) dz = \\ & = \frac{1}{i!} \int_0^\rho (\rho^m - y^m)^i y^{N-1} M(x, y, f) dy = A_i \rho^{mi+N} \sigma_\rho^i(x, f, m), \end{aligned}$$

где $A_i = \Gamma(N/m) / \Gamma(i+N/m+1) \cdot m$, получим представление

$$\begin{aligned} L = & R^{-N-m\alpha} \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left(\frac{d}{d\rho^m} \right)_i \left[(R^m - \rho^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] A_i \rho^{N+mi} \sigma_\rho^i(x, f, m) \Big|_{\rho=0+0}^{\rho=R-0} + (-1)^{p+2} A_{p+1} \times \right. \\ & \times \int_0^R \rho^{N+m(p+1)} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho^m} \right)^{p+1} \left[(R^m - \rho^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] \sigma_\rho^{p+1}(x, f, m) d\rho \Big) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (23) \end{aligned}$$

Докажем, что все нижние и все верхние подстановки в равенстве (23) обращаются в нуль. В каждом слагаемом в сумме Σ_1 внеинтегральных членов в (23) сделаем замену переменной $\rho = Ry^{1/m}$. При этом получим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \left(\frac{d}{dy} \right)_i \left[(1-y)^\alpha \left\{ \left(\frac{1-y^{n/m}}{1-y} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right\} \right] \times \\ & \times A_i y^{N/m+mi} \sigma_{Ry^{1/m}}^i(x, f, m) \Big|_{y=0+0}^{y=1-0}. \quad (24) \end{aligned}$$

Факт обращения в нуль всех нижних подстановок в (24) следует из того, что для любого $i=1, 2, \dots, p+1$ и любого натурального $j, 1 \leq j \leq i$, в силу того, что $\alpha > p, m > 0, n > 0$, справедливо равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{i+N/m} \left(\frac{d}{dy} \right)_i \left[\left(\frac{1-y^{n/m}}{1-y} \right)^\alpha - \left(\frac{n}{m} \right)^\alpha \right] = 0.$$

Отметим далее, что все слагаемые в сумме (24), номера i которых не превосходят p , очевидно обращаются в нуль при $y=1-0$, так как в i -м слагаемом содержится i -кратное повторное дифференцирование по y функции

$$h(y) = (1-y^{n/m})^\alpha - (n/m)^\alpha (1-y)^\alpha, \quad \alpha = p + \kappa, \quad 0 < \kappa \leq 1,$$

которое приводит к функции, имеющей при $y=1-0$ нуль порядка $\alpha-i$. Таким образом, остается доказать обращение в нуль при $y=1-0$ последнего $p+1$ слагаемого в сумме (24). Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \chi(y) = \left(\frac{d}{dy}\right)^{p+1} h(y) = & -(p+\kappa) \frac{n}{m} \left(\frac{d}{dy}\right)^p \left[y^{\frac{n}{m}-1} (1-y^{n/m})^{p+\kappa-1}\right] - \\ & - (-1)^{p+1} \left(\frac{n}{m}\right)^{p+\kappa} (p+\kappa)(p+\kappa-1) \dots \kappa (1-y)^{\kappa-1}. \end{aligned}$$

Применяя в правой части формулу Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \chi(y) = & -(p+\kappa) \frac{n}{m} \sum_{j=0}^p C_p^j \left(\frac{d}{dy}\right)^j y^{\frac{n}{m}-1} \left(\frac{d}{dy}\right)^{p-j} (1-y^{n/m})^{p+\kappa-1} - \\ & - (-1)^{p+1} \left(\frac{n}{m}\right)^{p+\kappa} (p+\kappa)(p+\kappa-1) \dots \kappa (1-y)^{\kappa-1}, \quad C_p^j = \frac{p!}{j!(p-j)!}. \end{aligned}$$

Поскольку все слагаемые в $\chi(y)$, которые содержат множители $(1-y)$, $(1-y^{n/m})$ в положительной степени, обращаются в нуль при $y=1-0$, остается доказать обращение в нуль при $y=1-0$ выражения

$$\begin{aligned} H(y) = & (-1)^{p+1} (p+\kappa)(p+\kappa-1) \dots \kappa \left[y^{(n/m-1)(p+1)} \left(\frac{n}{m}\right)^{p+1} \times \right. \\ & \left. \times (1-y^{n/m})^{\kappa-1} - \left(\frac{n}{m}\right)^{p+\kappa} (1-y)^{\kappa-1} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Совершая в (25) замену переменной по формуле $y=1-z$ и применяя затем разложение по формуле Маклорена, получим

$$\begin{aligned} H(y) = & H(1-z) = (-1)^{p+1} (p+\kappa)(p+\kappa-1) \dots \kappa \left[(n/m)^{p+1} \times \right. \\ & \times (1-z)^{(n/m-1)(p+1)} (n/m)^{\kappa-1} z^{\kappa-1} (1+o(z))^{\kappa-1} - (n/m)^{p+\kappa} z^{\kappa-1} \Big] = \\ & = (-1)^{p+1} (p+\kappa)(p+\kappa-1) \dots \kappa (n/m)^{p+\kappa} z^{\kappa-1} (1+o(z)-1) = \\ & = (-1)^{p+1} (p+\kappa)(p+\kappa-1) \dots \kappa (n/m)^{p+\kappa} o(z^\kappa) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow 0+0. \end{aligned}$$

Таким образом, все верхние подстановки в (24) обращаются в нуль. Учитывая обращение в нуль всех нижних и верхних подстановок (24), перепишем равенство (23) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L \equiv & \frac{1}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^n}{R^n}\right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho - \left(\frac{n}{m}\right)^\alpha \frac{1}{R^N} \times \\ & \times \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^m}{R^m}\right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho = R^{-N-m\alpha} (-1)^{p+1} A_{p+1} \times \\ & \times \int_0^R \rho^{N+m(p+1)} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho^m}\right)^{p+1} \left[(R^m - \rho^m)^\alpha \left\{ \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^m - \rho^m} R^{m-n}\right)^\alpha - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{n}{m}\right)^\alpha \right\} \right] \sigma_\rho^{p+1}(x, f, m) d\rho. \end{aligned}$$

Совершая в правой части последнего равенства замену переменной $\rho = Ry$ и умножая это равенство на подходящие постоянные, элементарно получаем формулу (19).

Равенство (20) доказывается аналогично, только вместо формулы (21) следует воспользоваться формулой

$$L = \frac{1}{R^N} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^m}{R^m}\right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho - \left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \frac{1}{R^N} \times \\ \times \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^n}{R^n}\right)^\alpha M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho = R^{-N-n\alpha} \int_0^R (R^n - \rho^n)^\alpha \times \\ \times \left[\left(\frac{R^m - \rho^m}{R^n - \rho^n} R^{n-m}\right)^\alpha - \left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \right] M(x, \rho, f) \rho^{N-1} d\rho. \quad (26)$$

Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Применяя разложение по формуле Тейлора с центром в точке $y=1$, легко показать, что функция

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^{p+2} \left[(1 - y^{n/m})^\alpha - \left(\frac{n}{m}\right)^\alpha (1-y)^\alpha \right]$$

имеет интегрируемую особенность при $y=1$. Поэтому функция

$$F(y) = y^{N+m(p+1)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy^m}\right)^{p+1} \left[(1 - y^n)^\alpha - \left(\frac{n}{m}\right)^\alpha (1 - y^m)^\alpha \right],$$

фигурирующая под знаком интеграла в формуле (19), является интегрируемой на сегменте $[0, 1]$.

Доказательство теоремы 1. Основным инструментом доказательства справедливости теоремы 1 будут служить равенства (19) и (20) из леммы 1. Пусть в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел (5). Докажем, что существует понимаемый в том же смысле предел (6). Из существования предела (5) и свойства включения для шаровых средних $\sigma_R^\alpha(x, f, m)$ вытекает, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) справедливо равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^{p+1}(x, f, m) = A(x), \quad p+1 \geq \alpha, \quad \alpha > p. \quad (27)$$

Из непрерывности $f(x)$ и из (27) следует, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) имеет место неравенство

$$|\sigma_R^\alpha(x, f, m)| < C \quad (28)$$

с постоянной C , зависящей от точки x (компакта K). Отсюда при каждом y , удовлетворяющем неравенствам $0 < y \leq 1$, получаем, что в точке x (равномерно по $x \in K \subset E^N$) справедливы соотношения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_{Ry}^{p+1}(x, f, m) = A(x), \quad (27')$$

$$|\sigma_{Ry}^{p+1}(x, f, m)| < C. \quad (28')$$

Так как функция

$$F(y) = y^{N+m(p+1)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy^m}\right)^{p+1} \left[(1 - y^n)^\alpha - \left(\frac{n}{m}\right)^\alpha (1 - y^m)^\alpha \right]$$

интегрируема на сегменте $[0, 1]$, то очевидно имеют место соотношения

$$\int_0^1 |F(y)| dy < \infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_0^\varepsilon |F(y)| dy = 0. \quad (29)$$

Интегрируя по частям, получаем равенство

$$C_5 \int_0^1 F(y) dy = 1 - C_4. \quad (30)$$

Учитывая (27'), (28'), (29), (30) и применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости, легко получаем, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) справедливо предельное равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} C_5 \int_0^1 F(y) \sigma_{Ry}^{\alpha+1}(x, f, m) dy = A(x) (1 - C_4). \quad (31)$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в равенстве (19) и учитывая при этом (5) и (31), получаем, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел (6).

Итак, необходимость в части I теоремы 1 доказана. Доказательство достаточности проводится совершенно аналогично, только вместо равенства (19) следует воспользоваться равенством (20). Часть I теоремы 1 доказана.

Докажем вторую часть теоремы 1. В силу эквивалентности пределов (5) и (6) при различных m и n , доказанной в первой части этой теоремы, достаточно доказать гармоничность предела (5) при некотором конкретном выборе m . Положим $m=2$ и докажем, что предельная функция $A(x)$ в равенстве

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^\alpha(x, f, 2) = A(x) \quad (32)$$

является гармонической в области G . Учитывая тот факт, что шаровые средние $\sigma_R^\alpha(x, f, 2)$ удовлетворяют уравнению ЭПД (8) с параметром $k=2\alpha+N+1$, и применяя неоднородную формулу среднего значения [3, с. 235], получим равенство

$$\begin{aligned} \sigma_R^\alpha(x, f, 2) &= \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{r=\rho} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) dS_y - \\ &- \frac{1}{\omega_N(N-2)} \int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) \frac{1}{R^k} \frac{\partial}{\partial R} R^k \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) dy. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь рассматривается случай $N \geq 3$. Доказательство для случаев $N=1$ и $N=2$ проводится аналогично, но требует отдельной записи. Так как по условию предел (5) существует равномерно по x на компакте $K \subset G$, то очевидно, что для любого шара $\{|x-y| \leq \rho\}$ радиуса ρ , целиком лежащего в K , существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{r=\rho} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) dS_y = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{r=\rho} A(y) dS_y. \quad (34)$$

Тогда в силу формулы (33) существует предел

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) \frac{1}{R^k} \frac{\partial}{\partial R} R^k \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) dy = A_1(x). \quad (35)$$

Достаточно доказать, что предел (35) равен нулю хотя бы при одном выборе последовательности $R \rightarrow \infty$. Действительно, переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ в равенстве (33) и учитывая при этом (34) и тот факт, что $A_1(x) = 0$, получим, что $A(x)$ удовлетворяет формуле среднего значения:

$$A(x) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{r=\rho} A(y) dS_y,$$

поэтому [3, с. 236] $A(x)$ является гармонической в области G функцией. Запишем равенство (35) в виде

$$\int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) \frac{\partial}{\partial R} R^k \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) dy = \\ = R^k [A(x) + \beta_1(x, R)], \quad (36)$$

где $\beta_1(x, R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ равномерно по x на каждом компакте $K' \Subset K$. Пусть R_ν и $R_{\nu+2}$ — последовательности чисел, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu \leq R_\nu \leq \nu + 1, \quad \nu + 2 \leq R_{\nu+2} \leq \nu + 3, \quad \nu \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

Очевидно, что $1 \leq R_{\nu+2} - R_\nu \leq 3$. Проинтегрируем (36) по R в пределах от R_ν до $R_{\nu+2}$ и поделим обе части полученного равенства на ν^k . При этом получим

$$A_1(x) \frac{R_{\nu+2}^{k+1} - R_\nu^{k+1}}{\nu^k (k+1)} + \int_{R_\nu}^{R_{\nu+2}} \frac{R^k}{\nu^k} \beta_1(x, R) dR = \\ = \int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) \left[\frac{R^k}{\nu^k} \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) \Big|_{R=R_{\nu+2}} - \right. \\ \left. - \frac{R^k}{\nu^k} \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) \Big|_{R=R_\nu} \right] dy. \quad (38)$$

Учитывая неравенства (37), элементарно получаем, что при $\nu \rightarrow \infty$ величина

$$\beta(\nu) = (R_{\nu+2}^{k+1} - R_\nu^{k+1}) / \nu^k (k+1)$$

заклучена в пределах $1 \leq \beta(\nu) \leq 3$. В силу ограниченности последовательности $\beta(\nu)$ можно считать, что последовательности $R_{\nu+2}$ и R_ν выбраны так, что существует предел $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta(\nu)$. Применяя к интегралу в левой части (38) теорему о среднем и учитывая, что $\beta_1(x, R) \rightarrow 0$ равномерно по $x \in K' \Subset K$ при $R \rightarrow \infty$, элементарно получаем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{R_\nu}^{R_{\nu+2}} \frac{R^k}{\nu^k} \beta_1(x, R) dR = 0.$$

Таким образом, предел при $\nu \rightarrow \infty$ левой части равенства (38) равен $A_1(x) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta(\nu)$, $1 \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta(\nu) \leq 3$. Докажем, что предел при $\nu \rightarrow \infty$ правой части (38) равен нулю. Учитывая существование предела (5) и применяя теорему о среднем, будем иметь

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\nu}^{\nu+3} \left\{ \int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) \frac{\partial}{\partial R} \sigma_R^\alpha(y, f, 2) dy \right\} dR = \\ = 3 \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) \frac{\partial}{\partial R_*} \sigma_{R_*}^\alpha(y, f, 2) dy = \\ = 3 \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{r \leq \rho} (r^{-N+2} - \rho^{-N+2}) [\sigma_{\nu+3}^\alpha(y, f, 2) - \sigma_\nu^\alpha(y, f, 2)] dy = 0, \quad (39)$$

$$R_* \in [\nu, \nu+3].$$

Учитывая равенства (5) и (39) и очевидные предельные соотношения $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (R_{\nu+2}/\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (R_\nu/\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (R_*/\nu) = 1$, получаем, что предел при $\nu \rightarrow \infty$ правой части равенства (38) равен нулю. Таким образом, переходя к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ в равенстве (38), получаем $A_1(x) \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta(\nu) = 0$. Так как $1 \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \beta(\nu) \leq 3$, то отсюда вытекает, что $A_1(x) = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

Приступая к доказательству остальных теорем, отметим, что теорема 1' является прямым следствием теоремы 1 и равенства (10), а теорема 2 является частным случаем теоремы 3 при $l=1$. Таким образом, нам остается доказать теорему 3.

Лемма 2. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши (15), (16) для итерированного волнового уравнения. Тогда при $t > 0$ в каждой точке $x \in E^N$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \frac{C_8}{t^{2l+1}} \int_0^t \tau u(x, \tau) \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^\alpha d\tau = \\ & = \frac{C_9}{t^N} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^{\alpha - \frac{N-1-2l}{2}} M(x, \tau, g) \tau^{N-1} d\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

в котором $\alpha > -1$ при $l \geq (N-1)/2$ и $\alpha > (N-1-2l)/2$ при $1 \leq l < (N-1)/2$,

$$C_8 = 2\Gamma(2l)/B(l+1/2, \alpha+1), \quad C_9 = 2/B(N/2, \alpha - (N-3-2l)/2).$$

Доказательство. Пусть выполняются условия гладкости, наложенные в теореме 3 на начальную функцию $g(x)$. Тогда, как доказано в работе [6], решение задачи Коши (15), (16) существует и представимо в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{t^{2l-1}}{(2l-1)!} M(x, t, g), & \text{если } l = \frac{N-1}{2}, \\ \frac{t^{2l-1}}{(2l-1)!} \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{2l-N-1}{2}} M(x, ty, g) y^{N-1} dy, & \\ \text{если } l > \frac{N-1}{2}, \\ \frac{1}{(2l-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu [t^{2l+2\nu-1} u^{2l+2\nu}(x, t)], & \\ \text{если } 1 \leq l < \frac{N-1}{2}, \end{cases} \quad (41_1)$$

$$(41_2)$$

$$(41_3)$$

где в случае $1 \leq l < (N-1)/2$ число ν обозначает наименьшее целое, для которого справедливо неравенство $2\nu+2l \geq N-1$, а $u^{2l+2\nu}(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения ЭПД (8), (9), в котором k равно $2l+2\nu$, а начальная функция $u_0(x)$ в (9) заменена на $g(x)/(2l+1)(2l+3)\dots(2l+2\nu-1)$ (см. [6]).

Пусть $l = (N-1)/2$ и $\alpha > -1$, тогда, умножая решение $u(x, \tau)$, определенное формулой (41₁), на $(t^2 - \tau^2)^\alpha \tau$ и интегрируя по τ от 0 по t , получим формулу (40). Пусть $l > (N-1)/2$ и $\alpha > -1$, тогда умножим решение $u(x, \tau)$, определенное формулой (41₂), на $(t^2 - \tau^2)^\alpha \tau$ и проинтегрируем по τ от 0 по t , а затем поменяем порядок интегрирования по τ и по ρ , при этом получим

$$\int_0^t \tau u(x, \tau) (t^2 - \tau^2)^\alpha d\tau = \int_0^t \left[\int_\rho^t (t^2 - \tau^2)^\alpha (\tau^2 - \rho^2)^h d\tau \right] M(x, \rho, g) \rho^{N-1} d\rho,$$

где $h = (2l - N - 1)/2$. Совершая замену переменной $\tau^2 = t^2 - (t^2 - \rho^2) \sin^2 y$ и учитывая равенство

$$\int_\rho^t (t^2 - \tau^2)^\alpha (\tau^2 - \rho^2)^h d\tau = (t^2 - \rho^2)^{\alpha+h+1} B(\alpha+1, h+1), \quad (42)$$

получим формулу (40). Пусть $1 \leq l < (N-1)/2$, $\alpha \geq (N-1-2l)/2$, тогда умножим решение $u(x, \tau)$, определенное формулой (41₃), на τ и проинтегрируем по τ от 0 до t , при этом получим

$$\int_0^t \tau u(x, \tau) d\tau = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\nu-1} [t^{2l+2\nu-1} u(x, t)].$$

Мы учли, что нижняя подстановка при $t=0+0$ равна нулю. Обозначим символом $(Iz)(t)$ операцию $(Iz)(t) = \int_0^t \tau z(\tau) d\tau$, а символом $(I^\nu z)(t)$ — результат ν -кратного повторного применения операции I . Полагая $z(t) = \int_0^t \tau u(x, \tau) d\tau$, применим $\nu-1$ раз операцию I к последнему равенству. Учитывая при этом формулу

$$\begin{aligned} (I^\nu z)(t) &= \int_0^t \tau_1 d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \dots \tau_{\nu-1} d\tau_{\nu-1} \int_0^{\tau_{\nu-1}} z(t) dt = \\ &= \frac{1}{2^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{\nu-1} z(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и тот факт, что при каждом применении операции I подстановка при $t=0+0$ обращается в нуль, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{\nu-1} \tau u(x, \tau) d\tau &= t^{2\nu+2l-1} u(x, t) = \\ &= C_{10} \int_0^t (t^2 - \tau^2)^{\frac{2l+2\nu-N-1}{2}} M(x, \tau, g) \tau^{N-1} d\tau, \end{aligned}$$

где $C_{10} = 2/B((2l+2\nu+1-N)/2, N/2) (2l+1) (2l+3) \dots (2l+2\nu-1) \Gamma(2l)$. Пусть $\alpha \geq (N-1-2l)/2$ при $1 \leq l < (N-1)/2$ и пусть $h = \alpha - \nu$. Умножим последнее равенство на $(T^2 - t^2)^\alpha t$ и проинтегрируем по t от 0 до T , а затем поменяем порядок интегрирования по t и по τ , при этом получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_0^T \tau u(x, \tau) \left[\int_\tau^T (T^2 - t^2)^\alpha (t^2 - \tau^2)^{\nu-1} t dt \right] d\tau = \\ = C_{10} \int_0^T \tau^{N-1} M(x, \tau, g) \left[\int_\tau^T (T^2 - t^2)^\alpha (t^2 - \tau^2)^{\frac{2l+2\nu-N-1}{2}} dt \right] d\tau. \end{aligned}$$

Совершая во внутренних интегралах замену переменной $t^2 = T^2 - (T^2 - \tau^2) \sin^2 y$ и учитывая при этом формулу (42) при $h = \alpha - \nu$, $\alpha = \nu - 1$ и $h = \alpha - \nu$, $\alpha = (2l+2\nu-N-1)/2$ соответственно, получим равенство (40). Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши (15), (16) и пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда для того, чтобы в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существовал предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_3'}{t^{2l}} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^\alpha u(x, \tau) d\tau = A(x), \quad (43)$$

где $C_3' = 2\Gamma(2l)/B(l, \alpha+1)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существовал предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_3}{t^{2l}} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^n}{t^n}\right)^\alpha u(x, \tau) = A(x). \quad (44)$$

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству части I теоремы 1. Действительно, полагая в равенстве (21) $m=2$, $n>0$ и заменяя функцию $\rho^{N-1}M(x, \rho, f)$ на решение $u(x, \rho)$ задачи Коши (15), (16), а величину R^{-N} — на R^{-2l} и повторяя после этого рассуждения леммы 1, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{C_3}{R^{2l}} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^n}{R^n}\right)^\alpha u(x, \rho) d\rho - C_{11} \frac{C_3''}{R^{2l}} \int_0^R \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^\alpha u(x, \rho) d\rho = \\ & = C_{12} \int_0^1 y^{2l+2(p+1)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy^2}\right)^{p+1} \left[(1-y^n)^\alpha - \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha (1-y^2)^\alpha \right] \times \\ & \quad \times \left\{ \frac{C_3}{(yR)^{2l}} \int_0^{yR} \left(1 - \frac{z^2}{(yR)^2}\right)^\alpha u(x, z) dz \right\} dy, \end{aligned} \quad (19')$$

где

$$C_{11} = n^{\alpha+1} B(l, \alpha+1) / 2^{\alpha+1} B(2l/n, \alpha+1),$$

$$C_{12} \int_0^1 y^{2l+2(p+1)} \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy^2}\right)^{p+1} \left[(1-y^n)^\alpha - \left(\frac{n}{2}\right)^\alpha (1-y^2)^\alpha \right] dy = 1 - C_{11}.$$

Равенство (19') является аналогом равенства (19). Поменяв местами 2 и n , совершенно аналогично получим аналог равенства (20). Применяя после этого к полученным равенствам рассуждения теоремы 1, получим доказательство леммы 3.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел (17), тогда в силу теоремы 1 существует предел, понимаемый в том же смысле: $\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R^{\alpha-(N-1-2l)/2}(x, g, 2) = A(x)$. Из равенства (40) следует, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_8}{t^{2l+1}} \int_0^t \left(1 - \frac{\tau^2}{t^2}\right)^\alpha \tau u(x, \tau) d\tau = A(x). \quad (45)$$

Заменяя в лемме 1 работы [1] функцию $\rho^l f(x, \rho)$ на функцию $\rho u(x, \rho)$, функцию $\rho^{m_l} f(x, \rho)$ на функцию $u(x, \rho)$ ($u(x, \rho)$ — решение задачи Коши (15), (16)), а величины R^{l+1} и R^{m+1} заменяя на R^{2l+1} и R^{2l} соответственно, получаем, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел (43), но тогда в силу леммы 3 существует в том же смысле предел (44). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел (18), тогда в силу леммы 3 существует понимаемый в том же смысле предел (43). Заменяя в лемме 1 работы [1] функции $\rho^{lf}(x, \rho)$ и $\rho^{mf}(x, \rho)$ на $u(x, \rho)$ и $\rho u(x, \rho)$ соответственно ($u(x, \rho)$ — решение задачи Коши (15), (16)), а величины R^{l+1} , R^{m+1} заменяя на R^{2l} и R^{2l+1} , получаем в силу утверждения леммы 1 работы [1], что существует понимаемый в том же смысле предел (45). Из равенства (40) следует, что в точке x (равномерно по x на каждом компакте $K \subset E^N$) существует предел (17). Достаточность доказана. Теорема 3 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Бицадзе и В. А. Ильину за обсуждение настоящей работы.

Литература

1. Денисов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1986, Т. 22, № 1. С. 31—44.
2. Гушин А. К., Михайлов В. П. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 166. С. 76—90.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л., 1951. Т. 2.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.
5. Weinstein A. // Proc. Fifth Sympos in Appl. Math. Mc. Crawhill. 1954. P. 137—148.
6. Weinstein A. // Annali di Math. Pura ed Applic. 1955. Vol. 39. P. 245—254.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.

УДК 517.95

А. Е. ЕВЖАНОВ

ОЦЕНКА СНИЗУ СУММЫ КВАДРАТОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ САМОСОПРЯЖЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. А. Ильин в работе [1] получил оценку снизу для суммы квадратов фундаментальных функций для произвольной фундаментальной системы функций оператора Лапласа

$$\sum_{|\nu_k - \mu| \leq M} u_n^2(x) \geq \alpha \mu^{N-1}. \quad (1)$$

В настоящей работе получена аналогичная оценка для фундаментальных функций произвольного самосопряженного эллиптического оператора второго порядка

$$Lu \equiv \sum_{ij=1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + cu, \quad (2)$$

коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и $c(x)$ которого определены в G и удовлетворяют условиям $a_{ij}(x) \in C^{(5)}(G)$, $c(x) \in C^{(0)}(G)$,

$$m_0 \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right) \leq \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \xi_i \xi_j \leq m_1 \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right),$$

$$m_0, m_1 > 0.$$

Согласно трактовке, принятой в работах В. А. Ильина и его учеников, фундаментальная система функций определяется следующим образом: полная ортонормированная в N -мерной области G система $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной системой функций самосопря-