Математические заметки

Том 106 выпуск 4 октябрь 2019

УДК 515.12

Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер

А. А. Заитов, А. Я. Ишметов

В работе построено подпространство $I_f(X)$ пространства идемпотентных вероятностных мер на заданном компакте X. Установлено, что если исходный компакт X стягиваем, то $I_f(X)$ также является стягиваемым компактом. Показано, что шейпы компактов X и $I_f(X)$ равны. Далее, доказано, что для компакта X компакт $I_f(X)$ является абсолютным окрестностным ретрактом тогда и только тогда, когда X – абсолютный окрестностный ретракт.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: идемпотентная мера, компакт, абсолютный окрестностный ретракт, шейп.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12166

1. Введение. Традиционную математику над числовыми полями можно трактовать как квантовую науку. Имеется и ее "классический аналог" – идемпотентная математика, т.е. математика над полуполями (и полукольцами) с идемпотентным сложением. Для идемпотентных полуполей выполнены все стандартные аксиомы, кроме наличия вычитания; вместо этого выполняется свойство идемпотентности сложения: $x + x = x$. Типичным примером является алгебра Max-Plus, состоящая из вещественных чисел (и символа "минус бесконечность", играющего роль нуля) и имеющая операцию maximum в качестве сложения и обычное сложение в качестве (нового) умножения.

Напомним [1], что множество S называется *полукольцом*, если в нем определены следующие две операции: $\oplus$ – сложение и $\odot$ – умножение, удовлетворяющие следующим условиям:

- сложение $\oplus$ и умножение $\odot$ ассоциативны;
- сложение $\oplus$ коммутативно;
- умножение $\odot$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z \qquad \text{и} \qquad (x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$$

для всех $x, y, z \in S$.

Единицей полукольца S называется такой элемент $\mathbf{1} \in S$, что $\mathbf{1} \odot x = x \odot \mathbf{1} = x$ для всех $x \in S$. *Нулем* полукольца S называется такой элемент $\mathbf{0} \in S$, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ и $\mathbf{0} \oplus x = x \oplus \mathbf{0} = x$ для всех $x \in S$. Полукольцо S называется *идемпотентным*

© А. А. Заитов, А. Я. Ишметов, 2019

полукольцом, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$. (Идемпотентное) полукольцо S с элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется (*идемпотентным*) *полуполем*, если для любого ненулевого элемента множества S существует обратный элемент.

Изложим деквантование Маслова. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – поле вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – полуполе неотрицательных вещественных чисел (относительно обычных операций сложения и умножения). Рассмотрим отображение $\Phi_h \colon \mathbb{R}_+ \to S = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, определенное равенством

$$\Phi_h(x) = h \ln x, \qquad h > 0. \tag{1.1}$$

Перенесем обычные операции сложения и умножения из $\mathbb{R}$ в S с помощью отображения Φ_h. Пусть

$$u = \Phi_h(x) = h \ln x, \qquad v = \Phi_h(y) = h \ln y.$$

Тогда

$$\Phi_h(x+y) = h \ln(x+y) = h \ln(e^{u/h} + e^{v/h}),$$
$$\Phi_h(xy) = h \ln(xy) = h \ln x + h \ln y.$$

Положим

$$u \oplus_h v = \Phi_h(x+y) \qquad \text{и} \qquad u \odot v = \Phi_h(xy),$$

т.е.

$$u \oplus_h v = h \ln(e^{u/h} + e^{v/h}) \qquad \text{и} \qquad u \odot v = u + v.$$

Образ $\Phi_h(0) = -\infty$ обычного нуля 0 является нулем $\mathbf{0}$ и образ $\Phi_h(1) = 0$ обычной единицы 1 – единицей $\mathbf{1}$ в S относительно этих операций. Таким образом, S приобретает структуру полукольца $\mathbb{R}^{(h)}$, изоморфного $\mathbb{R}_+$.

Непосредственная проверка показывает, что

$$u \oplus_h v \to \max\{u, v\} \qquad \text{при} \quad h \to 0.$$

Несложно проверить, что S образует полукольцо относительно сложения $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и умножения $u \odot v = u + v$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = -\infty$ и единицей $\mathbf{1} = 0$. Обозначим это полукольцо через $\mathbb{R}_{\max}$; оно является идемпотентным полуполем. Переход из $\mathbb{R}^{(h)}$ к предельному состоянию $\mathbb{R}_{\max}$ при $h \to 0$ и процедура квантования аналогичны. Здесь параметр h играет роль постоянной Планка. Поэтому полуполе $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}^{(h)}$ рассматривают как “квантовый” объект, а $\mathbb{R}_{\max}$ – как результат его деквантования. Изложенный переход из $\mathbb{R}_+$ к $\mathbb{R}_{\max}$ называется *деквантованием Маслова*. Идемпотентная математика продвинута весьма далеко (в частности, построен идемпотентный функциональный анализ [1]) и имеет многочисленные приложения (в особенности в задачах оптимизации и оптимального управления [2], [3]).

В настоящей статье построим функтор I_f идемпотентных вероятностных мер (п. 2) и рассмотрим следующие задачи:

- о стягиваемости пространства идемпотентных вероятностных мер (п. 3);
- о воздействии функтора идемпотентных вероятностных мер на абсолютные (окрестностные) ретракты (п. 4).

В традиционной математике идемпотентной вероятностной мере соответствует вероятностная мера. Понятие идемпотентной меры (меры Маслова) находит многочисленные применения в различных областях математики, математической физики и экономики. В частности, такие меры возникают в задачах динамической оптимизации [4]; аналогия между интегрированием Маслова и оптимизацией отмечена

также в [5]. В [6] утверждается, что использование мер Маслова для моделирования неопределенности в математической экономике может быть настолько же релевантным, насколько и использование классической теории вероятностей. В отличие от случая вероятностных мер, рассмотрению которых посвящена обширная литература (см. [7]), геометрические и топологические свойства пространств идемпотентных мер практически не исследованы.

2. Конструкция функтора I_f. Пусть X – компактное хаусдорфово пространство ($\equiv$ компакт), $C(X)$ – банахова алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями и sup-нормой. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам

$$\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}, \quad \varphi \odot \psi = \varphi + \psi, \qquad \text{где} \quad \varphi, \psi \in C(X).$$

Напомним, что функционал $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ называется [8] *идемпотентной вероятностной мерой* на X, если он обладает следующими свойствами:

(1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X – постоянная функция;

(2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;

(3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех φ, $\psi \in C(X)$.

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X.

Предложение 1. *Идемпотентная вероятностная мера непрерывна.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *сохраняет порядок*, т.е. неравенство $\varphi \leqslant \psi$ влечет $\mu(\varphi) \leqslant \mu(\psi)$, где $\varphi, \psi \in C(X)$. Действительно, так как неравенство $\varphi \leqslant \psi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi \oplus \psi = \psi$, то имеем

$$\mu(\varphi) \leqslant \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi) = \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\psi).$$

Кроме того, свойство (2) означает, что всякая идемпотентная вероятностная мера $\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ *слабо аддитивна*, т.е.

$$\mu(\varphi + \lambda_X) = \mu(\varphi) + \lambda \qquad \text{для всех} \quad \varphi \in C(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть теперь $\varphi, \psi \in C(X)$ – функции такие, что $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда

$$-\varepsilon_X < \psi - \varphi < \varepsilon_X, \qquad \varphi - \varepsilon_X < \psi < \varphi + \varepsilon_X,$$
$$\mu(\varphi) - \varepsilon < \mu(\psi) < \mu(\varphi) + \varepsilon, \qquad |\mu(\psi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon.$$

Предложение 1 доказано.

Ясно, что $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ – тихоновского произведения числовых прямых. Базу окрестностей идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ относительно индуцированной из $\mathbb{R}^{C(X)}$ в $I(X)$ топологии образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \bigl\{\nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\bigr\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \ldots, n$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, индуцированная топология и топология поточечной сходимости на $I(X)$ совпадают. Для компакта X топологическое пространство $I(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом [8].

Пусть X, Y – компакты, $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение. Определим отображение $I(f)\colon I(X) \to I(Y)$ по формуле

$$I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f).$$

Так как композиция непрерывных отображений непрерывна, то из предложения 1 вытекает, что отображение $I(f)$ непрерывно. Таким образом, конструкция I переводит компакты в компакты и непрерывные отображения – в непрерывные, т.е. I образует функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Более того, конструкция I является нормальным функтором [8].

Напомним, что функтор $F\colon \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Comp}$, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, называется [9; определение 14] *нормальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) F непрерывен ($F(\lim S) = \lim F(S)$);
2) F сохраняет вес ($wX = wF(X)$);
3) F мономорфен (т.е. сохраняет инъективность отображений);
4) F эпиморфен (т.е. сохраняет сюръективность отображений);
5) F сохраняет пересечения ($F(\bigcap_\alpha X_\alpha) = \bigcap_\alpha (F(X_\alpha))$);
6) F сохраняет прообразы ($F(f^{-1}) = F(f)^{-1}$);
7) F сохраняет точку и пустое множество ($F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $F(\varnothing) = \varnothing$).

Расшифруем это определение. Пусть $S = \{X_\alpha, p_\alpha^\beta; \mathfrak{A}\}$ – обратный спектр компактов, $\lim S = \varprojlim S$ – его предел. Согласно теореме Куроша предел обратного спектра непустых компактов непуст [10; теорема 3.13] и является компактом [10; предложение 3.12]. Под воздействием функтора F на компакты X_α и на отображения p_α^β, $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \prec \beta$, образуется обратный спектр

$$F(S) = \{F(X_\alpha), F(p_\alpha^\beta); \mathfrak{A}\}.$$

Пусть $\lim F(S)$ – предел этого спектра. Условие 1 требует, чтобы выполнялось равенство $F(\lim S) = \lim F(S)$. Для топологического пространства X через wX обозначают его вес, т.е. наименьшую из мощностей баз пространства X. Условие 2 требует, чтобы весы компактов X и $F(X)$ были равны. Мономорфность функтора F (условие 3) позволяет считать $F(A)$ подпространством $F(X)$ для замкнутого $A \subset X$. Отождествление $F(A)$ с подпространством $F(X)$ осуществляется вложением $F(i_A)$, где $i_A\colon A \to X$ – тождественное вложение. Условие 4 требует, что если $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение “на”, то $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ также было непрерывным “на” отображением. Для мономорфного функтора F условия 5 и 6 расшифровываются так: для любого семейства $\{X_\alpha\}$ замкнутых подмножеств произвольного компакта X выполнено равенство (условие 5)

$$F\left(\bigcap_\alpha X_\alpha\right) = \bigcap_\alpha F(X_\alpha);$$

для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и любого замкнутого B в Y выполнено равенство (условие 6)

$$F(f^{-1}(B)) = F(f)^{-1}F(B).$$

Условие сохранения точки означает, что F переводит одноточечное пространство в одноточечное.

Пусть X – некоторый компакт, F – функтор и $x \in F(X)$. *Степенью точки* x называется [9; определение 16] такое наименьшее натуральное число n, что x принадлежит образу $F(f)F(K)$ для некоторого отображения $f\colon K \to X$ n-точечного пространства K. Если такое конечное n не существует, то степень x считается *бесконечной*. *Степенью функтора* F называется максимум степеней всевозможных точек $x \in F(X)$ для всевозможных компактов X и обозначается $\deg F$.

Условие сохранения пересечений позволяет определить для мономорфного функтора F важное понятие носителя. *Носителем* точки $x \in F(X)$ называется [9; определение 18] такое замкнутое подмножество $\operatorname{supp} x \subset X$, что соотношения $A \supset \operatorname{supp} x$ и $x \in F(A)$ эквивалентны для любого замкнутого $A \subset X$. Для сохраняющего пересечения функтора F носитель существует для любого $x \in F(X)$ и определяется из соотношения

$$\operatorname{supp} x = \bigcap \{A \subset X : \overline{A} = A,\ x \in F(A)\},$$

где $\overline{A}$ – замыкание множества A.

Как уже мы отметили, функтор I идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений, нормален, так что для каждого компакта X и для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp} \mu = \bigcap \{A \subset X : \overline{A} = A,\ \mu \in I(A)\}.$$

Для компакта X и положительного целого числа n определим следующее множество:

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\operatorname{supp} \mu| \leqslant n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно [8] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют *идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.*

Пусть $x \in X$ – некоторая точка компакта X. Функционал $\delta_x\colon C(X) \to \mathbb{R}$, определенный по правилу

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x), \qquad \varphi \in C(X),$$

называется *мерой Дирака.* Каждая мера Дирака является идемпотентной вероятностной мерой, причем $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$. Отметим, что

$$X \cong \delta(X) = \{\delta_x : x \in X\} = \{0 \odot \delta_x : x \in X\} = I_1(X).$$

Каждая идемпотентная вероятностная мера μ с конечным носителем представляется в виде

$$\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \cdots \oplus \lambda_n \odot \delta_{x_n}$$

единственным способом (с точностью до перестановки местами), где $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ – носитель μ, т.е. $\operatorname{supp} \mu = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$. Здесь коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям

$$\lambda_i > \mathbf{0} = -\infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_n = \mathbf{1} = 0, \tag{2.1}$$

и называются max-plus *барицентрической массой* соответствующих точек x_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Ясно, что для идемпотентной вероятностной меры μ с конечным носителем включение $x_i \in \operatorname{supp}\mu$ справедливо тогда и только тогда, когда ее max-plus барицентрическая масса $\lambda_i > -\infty$.

Для каждого $n \in \{1, 2, \dots, \}$ конструкция I_n образует функтор, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. Иными словами, для произвольного компакта X топологическое пространство $I_n(X)$, рассматриваемое как подпространство $I(X)$, является компактом, и для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ компактов отображение $I_n(f)\colon I_n(X) \to I_n(Y)$, определенное как сужение $I_n(f) = I(f)|_{I_n(X)}$, также непрерывно. Как уже было отмечено, множество $I_\omega(X)$ всюду плотно в $I(X)$, следовательно, подпространство $I_\omega(X) \subset I(X)$ не является компактом. Легко видеть, что функторы I_n идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем имеют конечную степень:

$$\deg I_n = n, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Построим функтор I_f идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и бесконечной степенью:

$$\deg I_f = \infty.$$

Для компакта X множество $I_f(X)$ состоит из идемпотентных вероятностных мер, носители которых конечны, причем если носитель меры μ состоит из n точек x_1, $x_2, \dots, x_n$, то max-plus-барицентрические массы всех кроме одной из этих точек не больше $-\ln(n+1)$. По определению

$$I_f(X) = \Bigg\{\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \\ \text{существует } i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ такой, что} \\ \lambda_i \leqslant -\ln(n+1) \text{ для всех } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}\Bigg\}.$$

Легко видеть, что из (2.1) вытекает $\lambda_{i_0} = 0$. Для непустого компакта множество $I_f(X)$ непусто. Из определения элементов пространства $I_f(X)$ следует, что множество $\delta(X)$ мер Дирака лежит в $I_f(X)$. Для произвольного компакта X подпространство $I_f(X) \subset I(X)$ является компактом, и для каждого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ компактов отображение $I_f(f)\colon I_f(X) \to I_f(Y)$, определенное как ограничение $I_f(f) = I(f)|_{I_f(X)}$, также непрерывно. Таким образом, конструкция I_f образует функтор $I_f\colon \mathfrak{Comp} \to \mathfrak{Comp}$.

Приведем конструкцию [7], [11] функтора P_f – традиционного аналога функтора I_f. Для компакта X множество $P_f(X)$ состоит из (обычных) вероятностных мер (т.е. линейных, неотрицательных, нормированных функционалов $C(X) \to \mathbb{R}$), носители которых конечны, причем если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, \dots, x_n$, то барицентрическая масса хотя бы одной из этих точек не меньше $1 - 1/(n+1)$. По определению

$$P_f(X) = \Bigg\{\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i} \in P_\omega(X) : \\ \text{существует } i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ такой, что } \alpha_{i_0} \geqslant 1 - \frac{1}{n+1}\Bigg\}.$$

Легко убедиться в том, что если $\alpha_{i_0} \geqslant 1 - 1/(n+1)$ для некоторого $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, то $\alpha_i \leqslant 1/(n+1)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$. Из определения (1.1) отображения Φ_h при $h = 1$ вытекает равенство

$$\Phi_1\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln \frac{1}{n+1} = -\ln(n+1),$$

что оправдывает рассмотрение неравенства $\lambda_i \leqslant -\ln(n+1)$ в построении функтора I_f.

3. Стягиваемость пространства идемпотентных вероятностных мер. В этом пункте установлено, что если X – стягиваемый компакт, то $I_f(X)$ – также стягиваемый компакт.

Подмножество Y топологического пространства X называется [12; с. 14] *ретрактом* пространства X, если существует такое отображение $r\colon X \to Y$ (называемое *ретракцией* пространства X в Y), что ограничение $r|_Y\colon Y \to Y$ есть тождественное отображение $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ (т.е. $r(y) = y$ для всех $y \in Y$). Если $r\colon X \to Y$ – ретракция и существует такая гомотопия $h\colon X \times [0,\,1] \to Y$, что $h(x, 0) = x$, $h(x, 1) = r(x)$ для всех $x \in X$, то r называют *деформационной ретракцией*, а Y – *деформационным ретрактом* пространства X. Деформационная ретракция $r\colon X \to F$ называется *сильно деформационной ретракцией*, если для гомотопии $h\colon X \times [0,1] \to Y$ имеем

$$h(x,t) = x \qquad \text{для всех} \quad x \in F, \quad t \in [0,1].$$

Пространство Y называют *абсолютным ретрактом* (и пишут $Y \in \mathrm{AR}$), если для каждого гомеоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество hY какого бы то ни было пространства X, множество hY есть ретракт пространства X. Пространство Y называют *абсолютным окрестностным ретрактом* (и пишут $Y \in \mathrm{ANR}$), если для каждого гомеоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество hY какого бы то ни было пространства X, существует такая окрестность U множества hY (в X), что hY является ретрактом для U.

Пусть X и Y – два компакта, лежащие в метризуемых пространствах M и N соответственно, где $M, N \in \mathrm{AR}$. Последовательность отображений $f_k\colon M \to N$, $k = 1, 2, \dots$, называется [12; с. 17] *фундаментальной последовательностью* из X в Y, если для каждой окрестности V компакта Y (в N) существует такая окрестность U компакта X (в M), что

$$f_k|_U \simeq f_{k+1}|_U \qquad \text{в } V \text{ для почти всех } k = 1, 2, \dots .$$

Здесь “для почти всех” означает “для всех, кроме конечного числа”. Соотношение $f_k|_U \simeq f_{k+1}|_U$ означает, что существует такая гомотопия $\varphi_k\colon U \times [0,1] \to V$, что

$$\varphi_k(x,0) = f_k(x), \quad \varphi_k(x,1) = f_{k+1}(x) \qquad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Эту фундаментальную последовательность обозначают через $\{f_k, X, Y\}_{M,N}$ или коротко через $\mathbf{f}$ и пишут $\mathbf{f}\colon X \to Y$ в M, N. Говорят, что фундаментальная последовательность $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ *порождена* отображением $f\colon X \to Y$, если

$$f_k(x) = f(x) \qquad \text{для всех} \quad x \in X, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Пусть X и Y – замкнутые подмножества метризуемых AR-пространств M и N соответственно. Говорят [12; с. 29], что пространства X и Y *фундаментально эквивалентны* (относительно M, N), если существуют такие две фундаментальные последовательности $\mathbf{f}\colon X \to Y$ и $\mathbf{g}\colon Y \to X$, что

$$\mathbf{gf} = \mathrm{id}_{X,M}, \qquad \mathbf{fg} = \mathrm{id}_{Y,N}\,.$$

Отношение фундаментальной эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому класс всех пространств распадается на попарно не пересекающиеся классы пространств, которые называются *шейпами* [12; с. 31]. Два пространства принадлежат одному и тому же шейпу тогда и только тогда, когда они фундаментально эквивалентны. Шейп, содержащий пространство X, называют *шейпом пространства* X и обозначают через $\mathrm{Sh}(X)$. Понятие шейпа – топологическое, т.е. два гомеоморфных пространства имеют один и тот же шейп. Известно, что для двух окрестностных ретрактов A и B справедливо $\mathrm{Sh}(A) = \mathrm{Sh}(B)$ тогда и только тогда, когда они гомотопически эквивалентны.

Возьмем произвольную меру

$$\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_f(X).$$

Пусть $\lambda_{i_0} = 0$. Тогда $\lambda_i \leqslant -\ln(n+1)$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}$. Идемпотентной вероятностной мере μ сопоставим точку $\delta_{x_{i_0}}$ компакта $\delta(X)$. Полученное соответствие $I_f(X) \to \delta(X)$ обозначим через $r^{I(X)}_{\delta(X)}$. Отображение $r^{I(X)}_{\delta(X)}\colon I_f(X) \to \delta(X)$ определено корректно. Из построения отображения $r^{I(X)}_{\delta(X)}$ следует, что $r^{I(X)}_{\delta(X)}(\delta_x) = \delta_x$ для каждой $x \in X$, т.е. точки пространства $\delta(X)$ при отображении $r^{I(X)}_{\delta(X)}$ остаются неподвижными. Этим установлено, что $r^{I(X)}_{\delta(X)}$ – ретракция. Следующий результат усиливает это утверждение.

Теорема 1. *Для произвольного компакта X подпространство $\delta(X)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $I_f(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h\colon I_f(X) \times [0,1] \to I_f(X)$, определенное формулой

$$\begin{aligned} h(\mu, t) = h_t(\mu) = {} & (\ln(1-t) - \ln t \oplus \ln(1-t)) \odot \mu \\ & \oplus (\ln t - \ln t \oplus \ln(1-t)) \odot r^{I(X)}_{\delta(X)}(\mu), \qquad (\mu, t) \in I_f(X) \times [0,1]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что отображение h определено корректно. Более того, $h_0 = \mathrm{id}_{I_f(X)}$ и $h_1 = r^{I(X)}_{\delta(X)}$, т.е. h – гомотопия, связывающая отображений $\mathrm{id}_{I_f(X)}$ и $r^{I(X)}_{\delta(X)}$. Далее, имеем

$$h(\delta_x, t) = (\ln(1-t) - \ln t \oplus \ln(1-t)) \odot \delta_x \oplus (\ln t - \ln t \oplus \ln(1-t)) \odot r^x_f(\delta_x) = \delta_x,$$

т.е.

$$h_t(\delta_x) = \delta_x \qquad \text{для всех} \quad \delta_x \in \delta(X), \quad t \in [0,1].$$

Итак, $\delta(X)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $I_f(X)$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и утверждения (5.4) из [12; с. 32] получим

Следствие 1. *Для произвольного компакта X имеет место равенство*

$$\mathrm{Sh}(X) = \mathrm{Sh}(I_f(X)).$$

Лемма 1. *Для произвольного конечного компакта X множество $I_f(X)$ является окрестностным ретрактом компакта $I(X)$.*

Доказательство. Для каждой меры Дирака δ_x, $x \in X$, построим окрестность

$$O\delta_x = \left\{\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(X) : \lambda_i = 0 \text{ при } x_i = x \text{ и } \lambda_i < -\ln 2 \text{ при } x_i \neq x\right\}$$

и рассмотрим открытое в $I(X)$ множество $\bigcup_{x\in X} O\delta_x$. Очевидно, что $O\delta_x \cap O\delta_y = \varnothing$ при $x \neq y$. Кроме того, имеем $I_f(X) \subset \bigcup_{x\in X} O\delta_x$. Покажем, что $I_f(X)$ – ретракт множества $\bigcup_{x\in X} O\delta_x$.

Если

$$\nu \in \bigcup_{x\in X} O\delta_x, \qquad \text{где} \quad \nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathbf{1}, \quad \lambda_i \geqslant \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то очевидно, что $\lambda_{i_0} = 0$ для единственного i_0 и, следовательно, $r^{I(X)}_{\delta(X)}(\nu) = \delta_{x_{i_0}}$. Определим отображение $r\colon \bigcup_{x\in X} O\delta_x \to I_f(X)$ по правилу

$$r(\nu) = \begin{cases} 0 \odot \delta_{x_{i_0}} \oplus \bigoplus\limits_{\substack{i=1,\\ i\neq i_0}}^{n} (-\ln(n+1)) \odot \delta_{x_i}, \\ \qquad \text{если } \lambda_i \geqslant -\ln(n+1) \text{ для некоторого } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}, \\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, \qquad \text{если } \lambda_i \leqslant -\ln(n+1) \text{ для всех } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in O_{\delta_x}, \qquad \lambda_{i_0} = 0, \quad \lambda_i < -\ln 2 \quad \text{при всех} \quad i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}.$$

Отображение r определено корректно. Оно непрерывно. Кроме того, $r(\mu) = \mu$ для любой меры $\mu \in I_f(X)$. Значит, отображение r является ретракцией. Лемма 1 доказана.

Напомним [13; с. 29] что множество $A \subset X$ называется *стягиваемым по пространству X в множество $B \subset X$*, если вложение $i_A\colon A \to X$ гомотопно некоторому отображению $f\colon A \to X$ такому, что $f(A) \subset B$. Если при этом B состоит из одной точки, то говорят, что A *стягиваемо по X*.

Ясно, если существует гомотопия $h\colon A \times [0;1] \to A$ такая, что $h(y,0) = i_A$, и $h(y,1) = \{\text{точка}\}$, то A стягиваемо по X.

Пространство X называется [13; с. 31] *локально стягиваемым* в точке $x_0 \in X$, если всякая окрестность U точки x_0 содержит окрестность U_0, стягиваемую по U к точке. Пространство X называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

Теорема 2. *Функтор I_f сохраняет стягиваемость компактов, т.е. если X – стягиваемый компакт, то $I_f(X)$ – также стягиваемый компакт.*

Доказательство. Мы покажем больше: функтор I_f сохраняет гомотопность отображений. Пусть h_0, $h_1\colon X \to Y$ – гомотопные отображения, $h\colon X \times [0,\,1] \to Y$ – гомотопия, связывающая отображений h_0, h_1, т.е. $h(x,0) = h_0(x)$, $h(x,1) = h_1(x)$. Вложение $i_{t_0}\colon X \times \{t_0\} \to X \times I$, определенное равенством $i_{t_0}(x,\,t_0) = (x,\,t_0)$, $x \in X$, определяет вложение

$$I_f(i_{t_0})\colon I_f(X \times \{t_0\}) \to I_f(X \times I).$$

Но для каждого $t_0 \in [0,1]$ пространство $I_f(X \times \{t_0\})$ естественно гомеоморфно $I_f(X) \times \{t_0\}$. Этот гомеоморфизм можно осуществить, как легко видеть, с помощью соответствия $\mu_{t_0} \leftrightarrow (\mu, t_0)$, где

$$\mu_{t_0} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{(x_i,t_0)} \in I_f(X \times \{t_0\}) \qquad \text{и} \qquad \mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_f(X).$$

Определим теперь отображение $I_f(h)\colon I_f(X) \times [0,1] \to I_f(Y)$ равенством

$$I_f(h)\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, t\Bigr) = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h(x_i,t)}.$$

Имеем

$$I_f(h)\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, 0\Bigr) = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h(x_i,0)} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h_0(x_i)} = I_f(h_0)\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}\Bigr),$$
$$I_f(h)\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}, 1\Bigr) = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h(x_i,1)} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{h_1(x_i)} = I_f(h_1)\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}\Bigr),$$

т.е.

$$I_f(h)(\mu,0) = I_f(h_0)(\mu), \quad I_f(h)(\mu,1) = I_f(h_1)(\mu) \qquad \text{для любой} \quad \mu \in I_f(X).$$

Иными словами, $I_f(h)$ – гомотопия, связывающая отображений $I_f(h_0)$ и $I_f(h_1)$. Таким образом, функтор I_f сохраняет гомотопность отображений. Теорема 2 доказана.

4. Абсолютные окрестностные ретракты компактов и функтор I_f. В данном пункте установлено, что для компакта X пространство $I_f(X)$ является абсолютным окрестностным ретрактом тогда и только тогда, когда X – абсолютный окрестностный ретракт.

Лемма 2. *Для компакта X множество $I_f(X)$ является окрестностным ретрактом пространства $I_\omega(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$O_{\delta_x} = \Bigl\{\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \\ \lambda_i = 0 \text{ при } x_i = x \text{ и } \lambda_i < -\ln 2 \text{ при } x_i \neq x,\ i \in \{1,\dots,n\},\ n = 1,2,\dots\Bigr\}.$$

Имеет место $O_{\delta_x} \cap O_{\delta_y} = \varnothing$ при $x \neq y$. Очевидно, что пересечение

$$\bigcap_{x\in X} (I_\omega(X) \setminus O_{\delta_x}) = \left\{ \mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \lambda_i \geqslant -\ln 2,\ i \in \{1,\dots,n\},\ n = 1,2,\dots \right\}$$

замкнуто в $I_\omega(X)$. По построению имеем $I_f(X) \subset \bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$. Значит, $\bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$ – открытая окрестность компакта $I_f(X)$ в $I_\omega(X)$. Так как $O_{\delta_x} \cap O_{\delta_y} = \varnothing$ при $x \neq y$, то для $\nu \in \bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$ существует единственная $x \in X$ такая, что $\nu \in O_{\delta_x}$. Построим отображение $r\colon \bigcup_{x\in X} O_{\delta_x} \to I_f(X)$ по формуле (3.1). Легко видеть, отображение r является ретракцией. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть X – $A(N)R$-компакт. Тогда $I_f(X)$ –* ANR-*компакт.*

Доказательство. Так как всякий абсолютный ретракт является абсолютным окрестностным ретрактом, то достаточно установить справедливость заключения теоремы для абсолютных окрестностных ретрактов.

Пусть X – окрестностный ретракт некоторого компакта Y, U – открытое в Y множество такое, что $U \supset X$ и существует ретракция $r\colon U \to X$.

Рассмотрим открытое в $I_f(Y)$ множество $\bigcup_{x\in U} O\delta_x$. Ясно, что $I_f(X) \subset \bigcup_{x\in U} O\delta_x$. Как уже было отмечено выше, если $\nu \in \bigcup_{x\in X} O_{\delta_x}$, то существует единственная $x \in X$, что $\nu \in O_{\delta_x}$. Для идемпотентной вероятностной меры

$$\nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{y_i} \in \bigcup_{x\in U} O\delta_x \subset I_f(Y),$$

для которой $\lambda_{i_0} = 0$, положим

$$r_U^Y(\nu) = \left(\lambda_{i_0} \oplus \bigoplus_{y_i \in Y\setminus U} \lambda_i \right) \odot \delta_{y_{i_0}} \oplus \bigoplus_{y_i \in U} \lambda_i \odot \delta_{y_i}.$$

Очевидно, что $r_U^Y(\nu) \in \bigcup_{x\in U} O\delta_x$. Кроме того, $r_U^Y(\nu) = \nu$ для всякой меры $\nu \in I_f(Y)$ такой, что $\operatorname{supp} \nu \subset U$. Так как операция взятия максимума непрерывна, то построенное отображение $r_U^Y\colon \bigcup_{x\in U} O\delta_x \to \bigcup_{x\in U} O\delta_x$ непрерывно. Далее, положим

$$R(r_U^Y(\nu)) = \left(\lambda_{i_0} \oplus \bigoplus_{y_i \in Y\setminus U} \lambda_i \right) \odot \delta_{r(y_{i_0})} \oplus \bigoplus_{y_i \in U} \lambda_i \odot \delta_{r(y_i)}.$$

По построению $R(r_U^Y(\nu)) \in I_f(X)$. Отображение $R\colon \bigcup_{x\in U} O\delta_x \to I_f(X)$ определено корректно. Так как ретракция $r\colon U \to X$ непрерывна, то непрерывно отображение R. Легко проверить, что $R(r_U^Y(\nu)) = \nu$ для всякой меры $\nu \in I_f(X)$. Таким образом, $R \circ r_U^Y\colon \bigcup_{x\in U} O\delta_x \to I_f(X)$ – искомая ретракция. Итак, множество $I_f(X)$ – окрестностный ретракт компакта $I_f(Y)$.

Теперь применение леммы 2 и утверждения (1.3) из работы [13; с. 114] завершает доказательство теоремы 3.

На функториальном языке теорема 3 выглядит так:

Следствие 2. *Функтор I_f сохраняет* ANR-*компакты.*

Из теорем 1 и 3 вытекает важный результат

Следствие 3. *Пусть X – компакт. Множество $I_f(X) \in \mathrm{ANR}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathrm{ANR}$.*

Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за выявленные им недостатки и за его замечания, исправления и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*, Наука, М., 1994.

[2] *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, Contemp. Math., **377**, eds. G. L. Litvinov, V. P. Maslov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[3] Г. Л. Литвинов, “Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. XIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **326**, ПОМИ, СПб., 2005, 145–182.

[4] P. Bernhard, “Max-plus algebra and mathematical fear in dynamic optimization”, *Set-Valued Anal.*, **8**:1-2 (2000), 71–84.

[5] J. P. Aubin, O. Dordan, “Fuzzy systems, viability theory and toll sets”, *Fuzzy Systems*, Handb. Fuzzy Sets Ser., **2**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 1998, 461-488.

[6] J.-P. Aubin, *Dynamic Economic Theory. A Viability Approach*, Stud. Econom. Theory, **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[7] В. В. Федорчук, “Вероятностные меры в топологии”, *УМН*, **46**:1 (277) (1991), 41–80.

[8] М. М. Заричный, “Пространства и отображения идемпотентных мер”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:3 (2010), 45–64.

[9] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36**:3 (219) (1981), 3–62.

[10] В. В. Федорчук, “Вполне замкнутые отображения и их приложения”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **9**:4 (2003), 105–235.

[11] A. A. Zaitov, *Geometrical Properties of the Space $P_f(X)$ of Probability Measures*, 2018, arXiv: 1809.03331.

[12] К. Борсук, *Теория шейпов*, Мир, М., 1976.

[13] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971.

[14] Т. Чепмэн, *Лекции о Q-многообразиях*, Мир, М., 1981.

[15] T. Radul, *Idempotent Measures: Absolute Retracts and Soft Maps*, 2018, arXiv: 1810.09140.

А. А. Заитов
Ташкентский архитектурно-строительный институт,
Узбекистан
E-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

А. Я. Ишметов
Ташкентский архитектурно-строительный институт,
Узбекистан
E-mail: ishmetov_azadbek@mail.ru

Поступило
29.08.2018
После доработки
10.02.2019
Принято к публикации
20.03.2019