Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, О количестве максимальных независимых множеств в полных $q$-арных деревьях, *Дискрет. матем.*, 2016, том 28, выпуск 4, 139–149

DOI: 10.4213/dm1398

Дискретная математика

том 28 выпуск 4 * 2016

УДК 519.172.1 DOI 10.4213/dm1398

# О количестве максимальных независимых множеств в полных $q$-арных деревьях

© 2016 г. Д. С. Талецкий*, Д. С. Малышев**

Исследуется асимптотическое поведение величины $\mathrm{mi}(T_{q,n})$ — количества максимальных независимых множеств в полном $q$-арном дереве высоты $n$. Доказано, что для некоторых констант $\alpha_2$ и $\beta_2$ при $n \longrightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $\mathrm{mi}(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$. Доказано также, что для любого достаточно большого $q$, некоторых трёх попарно различных констант $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ и константы $b_q$ при $k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические соотношения: $\mathrm{mi}(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \mathrm{mi}(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \mathrm{mi}(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 16-31-60008-мол_а_дк, и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

**Ключевые слова:** максимальное независимое множество, полное $q$-арное дерево

## 1. Введение

*Независимым множеством* в графе называется произвольное множество его попарно не смежных вершин. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению. Для обозначения максимального независимого множества графа мы будем использовать сокращение «м.н.м.». Количество независимых множеств (соответственно, максимальных независимых множеств) графа $G$ принято обозначать $i(G)$ (соответственно, $\mathrm{mi}(G)$).

Исследованию асимптотики количества независимых множеств в графах из параметрически заданных классов (в зависимости от параметров класса) посвящено множество работ. Так, А.Д. Коршунов и А.А. Сапоженко получили асимптотику количества независимых множеств в $n$-мерном кубе [3]. Н. Калкин и Г. Вилф получили слабую асимптотику количества независимых множеств в плоской прямоугольной

*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, e-mail: dmitalmail@gmail.com

**Место работы: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

решётке [4]. В.П. Воронин и Е.В. Демакова получили асимптотику количества независимых множеств в полных бинарных деревьях [1]. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай рассматривали случай полных $q$-арных деревьев. Полное $q$-арное дерево высоты $n$ мы обозначаем через $T_{q,n}$. П. Киршенхофер, Х. Продингер и Р. Тишай доказали в [5] существование таких констант $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$ $(\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2})$, что для любого $q \in \{2,3,4\}$ при $n \longrightarrow \infty$ выполнена асимптотика $i(T_{q,n}) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$ и для любого $q \geqslant 5$ при $k \longrightarrow \infty$ справедливы асимптотики $i(T_{q,2k}) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}$ и $i(T_{q,2k+1}) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}$.

Целью настоящей работы является исследование поведения величины $\mathrm{mi}(T_{q,n})$ при $n \longrightarrow \infty$ в зависимости от $q \geqslant 2$. Основными её результатами являются следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Существуют такие константы $\alpha_2$ и $\beta_2$, что при $n \longrightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $mi(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$.*

**Теорема 2.** *Для любого достаточно большого $q$ существуют такие три попарно различные константы $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ и константа $b_q$, что при $k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические соотношения*

$$mi(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \quad mi(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, \quad mi(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}.$$

## 2. Асимптотика количества м.н.м. в деревьях $T_{q,n}$

Доказательства теорем 1 и 2 составляют содержание этого раздела работы. Эти доказательства не разбиваются на леммы и теоремы, а представляются в форме подразделов, каждый из которых является отдельной смысловой частью общего рассуждения.

**2.1. Вывод рекуррентного соотношения для количества м.н.м. в деревьях $T_{q,n}$.** Введём переобозначение: $\mathrm{mi}(q,n) = \mathrm{mi}(T_{q,n})$. Количество м.н.м. дерева $T_{q,n}$, каждое из которых содержит его корень $r$, мы обозначим через $\mathrm{mi}_+(q,n)$. Количество м.н.м. дерева $T_{q,n}$, каждое из которых не содержит вершину $r$, мы обозначим через $\mathrm{mi}_-(q,n)$. Очевидно, что $\mathrm{mi}(q,n) = \mathrm{mi}_+(q,n) + \mathrm{mi}_-(q,n)$.

Пусть $MIS$ — некоторое м.н.м. дерева $T_{q,n}$. Удалив корень $r$ дерева $T_{q,n}$ и всех потомков $r$, мы получим множество из $q^2$ его поддеревьев, каждое из которых изоморфно $T_{q,n-2}$. Поэтому, если $r \in MIS$, то множество $MIS \setminus \{r\}$ является дизъюнктным объединением $q^2$ множеств, каждое из которых является м.н.м. своего поддерева $T_{q,n-2}$. Обратно, если в каждом из данных $q^2$ поддеревьев взять м.н.м., добавить вершину $r$ к объединению этих множеств, то мы получим некоторое м.н.м. дерева $T_{q,n}$, содержащее вершину $r$. Поэтому справедливо равенство $\mathrm{mi}_+(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-2))^{q^2}$.

Удалив корень $r$ дерева $T_{q,n}$, мы получим множество из $q$ его поддеревьев, каждое из которых изоморфно $T_{q,n-1}$. Если же $r \notin MIS$, то множеству $MIS$ принадлежит некоторый из корней этих $q$ поддеревьев, поскольку $MIS$ максимально по включению.

Обратно, если в каждом из этих $q$ поддеревьев взять м.н.м., причём хотя бы одно из этих множеств содержит корень своего поддерева, то объединение этих множеств будет м.н.м. дерева $T_{q,n}$, не содержащим вершины $r$. Значит, $\mathrm{mi}_-(q,n)$ равно разности количества способов выбрать набор из $q$ множеств, каждое из которых — м.н.м. дерева, изоморфного $T_{q,n-1}$, и количества способов выбрать набор из $q$ множеств, каждое из которых — м.н.м. дерева, изоморфного $T_{q,n-1}$ и не содержащего его корень. Поэтому $\mathrm{mi}_-(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}_-(q,n-1))^q$. Это равенство (используем ранее полученное равенство $\mathrm{mi}_+(q,n-1) = (\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2}$) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{mi}_-(q,n) &= (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}_-(q,n-1))^q = \\
&= (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}(q,n-1) - \mathrm{mi}_+(q,n-1))^q = \\
&= (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}(q,n-1) - (\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2})^q.
\end{aligned}$$

Объединяя ранее полученные соотношения для $\mathrm{mi}_+(q,n)$ и $\mathrm{mi}_-(q,n)$, получаем равенство

$$\mathrm{mi}(q,n) = (\mathrm{mi}(q,n-2))^{q^2} + (\mathrm{mi}(q,n-1))^q - (\mathrm{mi}(q,n-1) - (\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2})^q. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что $\mathrm{mi}(q,0) = 1, \mathrm{mi}(q,1) = 2, \mathrm{mi}(q,2) = 2^q$.

**2.2. Частичное решение полученного рекуррентного уравнения.** Для того, чтобы частично решить уравнение (1) с заданными начальными условиями, рассмотрим величину $a(q,n) \triangleq \frac{\mathrm{mi}(q,n)}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q}$.

Очевидно, что

$$\frac{(\mathrm{mi}(q,n-2))^{q^2}}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q} = \frac{1}{(a(q,n-1))^q} \text{ и } \frac{(\mathrm{mi}(q,n-3))^{q^2}}{\mathrm{mi}(q,n-1)} = \frac{1}{a(q,n-1)\cdot(a(q,n-2))^q}.$$

Поэтому равенство (1) и его начальные условия можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
a(q,n) &= \frac{1}{(a(q,n-1))^q} + 1 - \left(1 - \frac{1}{a(q,n-1)\cdot(a(q,n-2))^q}\right)^q, \\
a(q,1) &= 2, \\
a(q,2) &= 1.
\end{aligned} \quad (2)$$

Нетрудно показать (например, индукцией по $n$), что для любого $q$ последовательность $\{a(q,n)\}$ ограничена сверху и снизу.

Поскольку $a(q,n) = \frac{\mathrm{mi}(q,n)}{(\mathrm{mi}(q,n-1))^q}$, то $\ln(a(q,n)) = \ln(\mathrm{mi}(q,n)) - q\cdot\ln(\mathrm{mi}(q,n-1))$. Поэтому при любом $n \geqslant 3$ и любом $i \in \{0,\ldots,n-3\}$ выполнено равенство $q^i \cdot \ln(a(q,n-i)) = q^i \cdot \ln(\mathrm{mi}(q,n-i)) - q^{i+1}\cdot\ln(\mathrm{mi}(q,n-i-1))$. Значит, $\ln(\mathrm{mi}(q,n)) -$

$q^{n-2} \cdot \ln(\mathrm{mi}(q,2)) = \sum\limits_{i=0}^{n-3} (\ln(a(q,n-i)) \cdot q^i)$ для любого $n \geqslant 3$. Иными словами,

$$\ln(\mathrm{mi}(q,n)) = \sum_{i=3}^{n} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{n-i}) = q^n \cdot \sum_{i=3}^{n} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i}) =$$
$$= q^n \cdot \left( \sum_{i=3}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i}) - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i}) \right) =$$
$$= q^n \cdot \left( \sum_{i=3}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i}) - \sum_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{n-i}) \right).$$

Поскольку при любом $q$ последовательность $\{a(q,n)\}$ ограничена и сверху, и снизу некоторыми положительными константами (что с очевидностью следует из выполнения неравенств $(\mathrm{mi}(q,n-1))^q \leqslant \mathrm{mi}(q,n) \leqslant 2 \cdot (mi(q,n-1))^q$), то определена сумма $\sum\limits_{i=3}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{-i})$ сходящегося числового ряда, которую мы обозначим через $\ln(\beta_q)$. Поэтому $\ln(\mathrm{mi}(q,n)) = q^n \cdot \ln(\beta_q) + \ln(\alpha_{q,n})$ для некоторого числа $\alpha_{q,n}$, то есть справедливо соотношение

$$\mathrm{mi}(q,n) = \alpha_{q,n} \cdot (\beta_q)^{q^n}. \tag{3}$$

Цель наших дальнейших рассуждений — доказать сходимость последовательности $\{\alpha_{2,n}\}$ и сходимость подпоследовательности $\{\alpha_{q,3k+r}\}$ для любого $r \in \{0,1,2\}$ и любого достаточно большого $q$. Поскольку $\ln(\alpha_{q,n}) = -\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} (\ln(a(q,i)) \cdot q^{n-i})$, для доказательства данных двух фактов достаточно доказать сходимость последовательности $\{a(2,n)\}$ и подпоследовательностей $\{a(q,3k)\}$, $\{a(q,3k{+}1)\}$, $\{a(q,3k{+}2)\}$ при больших $q$.

Тем самым, для некоторой константы $\alpha_2$ при $n \longrightarrow \infty$ справедлива асимптотика $\mathrm{mi}(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$.

Для любого достаточно большого $q$ существуют такие попарно различные константы $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$, что

$$\mathrm{mi}(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, \quad \mathrm{mi}(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}},$$
$$\mathrm{mi}(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}} \text{ при } k \to \infty.$$

**2.3. Случай $q = 2$.** В этом разделе мы докажем, что последовательность $\{a(2,n)\}$ имеет предел. Введём обозначение: $g(t_1,t_2) \triangleq 1 + \frac{1}{t_1^2} - (1 - \frac{1}{t_1 t_2^2})^2$. На луче $[1,+\infty)$ существует единственное такое $l$, что $l = g(l,l)$. Для этого достаточно заметить, что функция $h(t) \triangleq t - g(t,t)$ имеет производную $h'_t = 1 + \frac{2}{t^3} + 2 \cdot (1 - \frac{1}{t^3}) \cdot \frac{3}{t^4}$, положительную и непрерывную в каждой точке этого луча, причём $h(1) = -1$ и $h(2) = \frac{97}{64}$. Можно показать, что $l = 1.29...$, поскольку $h(1.29) = -0.025...$ и $h(1.3) = 0.005...$

Функция $g(t_1,t_2)$ имеет частные производные

$$g'_{t_1}(t_1,t_2) = -\frac{2}{t_1^3} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^2}\right) \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2^2} \ \text{ и } \ g'_{t_2}(t_1,t_2) = -2 \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^2}\right) \cdot \frac{2}{t_1 t_2^3}.$$

Определим числа $A \triangleq g'_{t_1}(l,l) = -1.296...$ и $B \triangleq g'_{t_2}(l,l) = -0.764....$ Очевидно, что $a(2,n) = g(a(2,n-1), a(2,n-2))$ для любого $n \geqslant 3$. Положим $\epsilon_n \triangleq a(2,n) - l$. Из формулы Тейлора следует, что $\epsilon_n = A \cdot \epsilon_{n-1} + B \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2)$. Поэтому

$$\epsilon_{n+1} = A \cdot \epsilon_n + B \cdot \epsilon_{n-1} + O(\epsilon_n^2 + \epsilon_{n-1}^2) = (A^2 + B) \cdot \epsilon_{n-1} + AB \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2)$$

и

$$\begin{aligned}\epsilon_{n+2} = A \cdot \epsilon_{n+1} + B \cdot \epsilon_n + O(\epsilon_{n+1}^2 + \epsilon_n^2) = (A^2 + B) \cdot \epsilon_n + AB \cdot \epsilon_{n-1} + O(\epsilon_n^2 + \epsilon_{n-1}^2) = \\ = (A^3 + 2AB) \cdot \epsilon_{n-1} + (A^2B + B^2) \cdot \epsilon_{n-2} + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2).\end{aligned}$$

Значит, справедливо неравенство

$$|\epsilon_{n+2}| \leqslant (|A^3 + 2AB| + |A^2B + B^2|) \cdot \max(|\epsilon_{n-1}|, |\epsilon_{n-2}|) + O(\epsilon_{n-1}^2 + \epsilon_{n-2}^2). \qquad (4)$$

Число $|A^3+2AB|+|A^2B+B^2| = 0.896...$ меньше единицы. Константа $C^*$, скрытая в символе $O$, может быть оценена через максимум модулей значений вторых производных функции $g(t_1, t_2)$ на квадрате $[1,2]^2$ и через числа $A, B$. Вычислив первые несколько членов последовательности $\{a(2,n)\}$ (см. таблицу 2 из третьего раздела этой работы), можно убедиться в том, что существует такое $n^*$, для которого остаточный член $C^* \cdot (\epsilon_{n^*-1}^2 + \epsilon_{n^*-2}^2)$ в формуле (4) не превосходит $\frac{1}{10} \cdot \max(|\epsilon_{n^*-1}|, |\epsilon_{n^*-2}|)$. Тем самым, $|\epsilon_{n^*+2}| \leqslant (|A^3 + 2AB| + |A^2B + B^2| + \frac{1}{10}) \cdot \max(|\epsilon_{n^*-1}|, |\epsilon_{n^*-2}|)$. Поэтому существует такое число $0 < w < 1$, что для любого $n \geqslant n^*$ выполнено неравенство $|\epsilon_{n+2}| \leqslant w \cdot \max(|\epsilon_{n-1}|, |\epsilon_{n-2}|)$, из которого следует, что $\epsilon_n = O(w^{-n})$. Значит, последовательность $\{a(2,n)\}$ сходится к $l$ с экспоненциальной по $n$ скоростью. Теорема 1 доказана.

**2.4. Разрешимость одной системы нелинейных уравнений.** В этом подразделе мы рассматриваем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x = f(z,y), \\ y = f(x,z), \\ z = f(y,x), \end{cases} \qquad (5)$$

где $f(t_1,t_2) \triangleq \frac{1}{t_1^q} + 1 - \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^q}\right)^q$, и показываем, что эта система имеет решение $(x_q^*, y_q^*, z_q^*)$ при любом достаточно большом $q$. Отметим, что в обозначениях данной функции и производных от неё в списках аргументов мы не будем явно указывать аргумент $q$.

Мы будем работать со следующей системой уравнений, которая является следствием системы (5):

$$\begin{cases} x = f(f(y,x), y), \\ y = f(x, f(y,x)). \end{cases} \qquad (6)$$

Введём обозначения:

$$f_1(t_1,t_2) \triangleq t_1 - f(f(t_2,t_1), t_2), \quad f_2(t_1,t_2) \triangleq t_2 - f(t_1, f(t_2,t_1)),$$

$$Tr \triangleq \left\{ (t_1,t_2): \ 1 \leqslant t_1 \leqslant 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}, 1 \leqslant t_2 \leqslant 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}, t_1 \leqslant t_2 \right\}.$$

Докажем, что треугольник $Tr$ содержит решение системы (6) в качестве своей внутренней точки. Очевидно, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f_1(t_1,t_2) &= t_1 - \frac{1}{f^q(t_2,t_1)} - 1 + \left(1 - \frac{1}{f(t_2,t_1)t_2^q}\right)^q, \\ f_2(t_1,t_2) &= t_2 - \frac{1}{t_1^q} - 1 + \left(1 - \frac{1}{t_1 f^q(t_2,t_1)}\right)^q. \end{aligned} \tag{7}$$

Понятно, что при $q \longrightarrow \infty$ для любых $(t_1,t_2) \in Tr$ справедливы асимптотики

$$f(t_1,t_2) \sim 2, \quad t_1^q \sim 1, \quad t_2^q \sim 1. \tag{8}$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} f'_{t_1}(t_1,t_2) &= -\frac{q}{t_1^{q+1}} - q \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{t_1^2 t_2^q}, \\ f'_{t_2}(t_1,t_2) &= -q \cdot \left(1 - \frac{1}{t_1 t_2^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{q}{t_1 t_2^{q+1}}, \\ \frac{df(t,t)}{dt} &= -\frac{q}{t^{q+1}} - q \cdot \left(1 - \frac{1}{t^{q+1}}\right)^{q-1} \cdot \frac{q+1}{t^{q+2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из равенств (7) и (9) и асимптотик (8) следует, что в любой точке $(t_1,t_2) \in Tr$ для любого достаточно большого $q$ одновременно выполнены неравенства

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_1}(t_1,t_2) > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_1}(t_1,t_2) > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2}(t_1,t_2) > 0. \tag{10}$$

Докажем, что для любого $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$ выполнено неравенство

$$\frac{df_3}{dt}(t) < 0, \tag{11}$$

где $f_3(t) \triangleq f_1(1,t) = -\frac{1}{f^q(t,1)} + (1 - \frac{1}{f(t,1)t^q})^q$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{df_3}{dt}(t) &= q \cdot \frac{f'_t(t,1)}{f^{q+1}(t,1)} + q \cdot \left(1 - \frac{1}{f(t,1)t^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{(f(t,1)t^q)'_t}{f^2(t,1)t^{2q}} = \\ &= q^2 \cdot \frac{-\frac{1}{t^{q+1}} - (1-\frac{1}{t})^{q-1} \cdot \frac{1}{t^2}}{f^{q+1}(t,1)} + q^2 \cdot (1 - \frac{1}{f(t,1)t^q})^{q-1} \cdot \frac{t^{q-1} - (t-1)^{q-1}}{f^2(t,1)t^{2q}} = \\ &= \frac{q^2}{f^2(t,1)t^{q+1}} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{f(t,1)t^q}\right)^{q-1} - \frac{1}{f^{q-1}(t,1)}\right) - q^2 \cdot \frac{(1-\frac{1}{t})^{q-1} \cdot \frac{1}{t^2}}{f^{q+1}(t,1)} - \\ &\quad - q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{f(t,1)t^q}\right)^{q-1} \cdot \frac{(t-1)^q}{f^2(t,1)t^{2q}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что $1 - \frac{1}{f(t,1)t^q} < \frac{1}{f(t,1)}$ при любом $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$. Отсюда и из формулы (12) следует, что $\frac{df_3}{dt}(t) < 0$ для любого $t \in [1, 1 + (\frac{3}{2})^{-q}]$.

Рассмотрим функции $f_1(t,t)$ и $f_2(t,t)$. При любом достаточно большом $q$ они обе монотонно возрастают на отрезке $[1, 1+(\frac{3}{2})^{-q}]$. Это следует из (7), (8) и (9). Оценим значения функций $f_1(t_1,t_2)$ и $f_2(t_1,t_2)$ в вершинах треугольника $Tr$. Имеем: $f_1(P_1)=0$ и $f_2(P_1)=\left(1-\frac{1}{2^q}\right)^q-1<0$, где $P_1 \triangleq (1,1)$. Значение функции $f_1(t_1,t_2)$ в точке $P_2 \triangleq (1, 1+(\frac{3}{2})^{-q})$ равно

$$\left(1-\frac{1}{f(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)\cdot(1+(\frac{3}{2})^{-q})^q}\right)^q-\frac{1}{f^q(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)}.$$

Это число является отрицательным, так как $f(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)<1+\frac{1}{1+(\frac{3}{2})^{-q}}$. Значение функции $f_2(t_1,t_2)$ в точке $P_2$ равно $(\frac{3}{2})^{-q}+\left(1-\frac{1}{f^q(1+(\frac{3}{2})^{-q},1)}\right)^q-1$. Из выполнения асимптотик (8) следует, что при любом достаточно большом $q$ справедливо неравенство $f_2(P_2)>0$. По аналогии можно показать, что для любого достаточно большого $q$ выполняются неравенства $f_1(P_3)>0$ и $f_2(P_3)>0$, где $P_3 \triangleq (1+(\frac{3}{2})^{-q}, 1+(\frac{3}{2})^{-q})$.

Отображение $F(t_1,t_2) \triangleq (f_1(t_1,t_2), f_2(t_1,t_2))$ переводит катет $P_1P_2$ треугольника $Tr$ в некоторую кривую $S_1$, соединяющую точки $F(P_1)$ и $F(P_2)$. По неравенствам (10) и (11) при проходе кривой $S_1$ от $F(P_1)$ до $F(P_2)$ уменьшается абсцисса и возрастает ордината. Катет $P_2P_3$ переводится в кривую $S_2$, при прохождении которой от $F(P_2)$ до $F(P_3)$ увеличиваются и абсцисса, и ордината (ввиду выполнения тех же неравенств). Поскольку для любого $t \in [1, 1+(\frac{3}{2})^{-q}]$ выполнены неравенства $\frac{df_1(t,t)}{dt}>0$ и $\frac{df_2(t,t)}{dt}>0$, то $P_1P_3$ отображением $F$ переводится в кривую $S_3$, при прохождении которой от $F(P_1)$ к $F(P_3)$ растут и абсцисса, и ордината.

Точка $F(P_1)$ лежит в нижней полуплоскости на оси ординат, точка $F(P_2)$ лежит во втором квадранте, а точка $F(P_3)$ — в первом. Поэтому криволинейный треугольник $Tr'$, ограниченный кривыми $S_1, S_2$ и $S_3$, содержит начало координат в качестве своей внутренней точки. Отображение $F$ является непрерывным на $Tr$, поэтому оно переводит $Tr$ в $Tr'$. Значит, существует решение $(x_q^*, y_q^*, z_q^*)$ системы (6), являющееся внутренней точкой $Tr$. Тем самым, $1<x_q^*<y_q^*<1+(\frac{3}{2})^{-q}$ и $z_q^*=2-O((\frac{3}{2})^{-q})$.

**2.5. Случай больших $q$.** В этом подразделе работы мы покажем, что для любого достаточно большого $q$ при $k \longrightarrow \infty$ справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} a(q,3k+1) &\longrightarrow z_q^*,\\ a(q,3k+2) &\longrightarrow x_q^*,\\ a(q,3k+3) &\longrightarrow y_q^*. \end{aligned}$$

Из формулы (2) и определения функции $f(t_1,t_2)$ следует, что $a(q,n)=f(a(q,n-1), a(q,n-2))$. Введём обозначения

$$\begin{aligned} \zeta_{k,q} &\triangleq a(q,3k+1)-z_q^*,\\ \eta_{k,q} &\triangleq a(q,3k+2)-x_q^*,\\ \theta_{k,q} &\triangleq a(q,3k+3)-y_q^*. \end{aligned}$$

Из соотношений (2) следует, что $\max(|\zeta_{0,q}|, |\eta_{0,q}|, |\theta_{0,q}|) \longrightarrow 0$ при $q \longrightarrow \infty$ и

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1,q} + z_q^* &= f(\theta_{k,q} + y_q^*, \eta_{k,q} + x_q^*), \\ \theta_{k,q} + y_q^* &= f(\eta_{k,q} + x_q^*, \zeta_{k,q} + z_q^*), \\ \eta_{k,q} + x_q^* &= f(\zeta_{k,q} + z_q^*, \theta_{k-1,q} + y_q^*). \end{aligned} \tag{13}$$

Из (13), равенств $z_q^* = f(y_q^*, x_q^*), y_q^* = f(x_q^*, z_q^*), x_q^* = f(z_q^*, y_q^*)$ и формулы Тейлора следует, что

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1,q} = f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot \theta_{k,q} + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot \eta_{k,q} + O(\theta_{k,q}^2 + \eta_{k,q}^2), \\ \theta_{k,q} = f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot \eta_{k,q} + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) \cdot \zeta_{k,q} + O(\eta_{k,q}^2 + \zeta_{k,q}^2), \\ \eta_{k,q} = f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{k,q} + f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Из (2.5) следуют равенства

$$\begin{gathered} \eta_{k,q} = f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot \zeta_{k,q} + f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2), \\ \theta_{k,q} = (f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*)) \cdot \zeta_{k,q} + \\ + f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2), \\ \zeta_{k+1,q} = (f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) + f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*) + \\ + f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*) \cdot f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)) \cdot \zeta_{k,q} + (f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*) + \\ + f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*) \cdot f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)) \cdot \theta_{k-1,q} + O(\zeta_{k,q}^2 + \theta_{k-1,q}^2). \end{gathered} \tag{15}$$

Поскольку $x_q^* = 1 + O((\frac{3}{2})^{-q}), y_q^* = 1 + O((\frac{3}{2})^{-q})$ и $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$, то согласно (9) справедливы равенства

$$\begin{gathered} |f'_{t_1}(z_q^*, y_q^*)| = O(\frac{q}{2^q}), \quad |f'_{t_2}(z_q^*, y_q^*)| = O(\frac{q^2}{2^q}), \quad |f'_{t_1}(x_q^*, z_q^*)| = O(q), \\ |f'_{t_2}(x_q^*, z_q^*)| = O(\frac{q^2}{2^q}), \quad |f'_{t_1}(y_q^*, x_q^*)| = O(q), \quad |f'_{t_2}(y_q^*, x_q^*)| = O(q^2). \end{gathered}$$

Поэтому коэффициенты перед $\zeta_{k,q}$ и $\theta_{k-1,q}$ в формулах (2.5) являются экспоненциально убывающими по $q$. Напомним, что $\lim\limits_{q\to\infty} \max(|\zeta_{0,q}|, |\eta_{0,q}|, |\theta_{0,q}|) = 0$. Значит, для любого достаточно большого $q$ существует такое $0 < w_q < 1$, что $\max(|\eta_{k,q}|, |\theta_{k,q}|, |\zeta_{k,q}|) = O((w_q)^k)$. Поэтому

$$\begin{gathered} \lim_{k\to\infty} a(q, 3k+1) = z_q^*, \\ \lim_{k\to\infty} a(q, 3k+2) = x_q^*, \\ \lim_{k\to\infty} a(q, 3k+3) = y_q^* \end{gathered}$$

для любого достаточно большого $q$.

Напомним, что $\alpha_{q,n} = \exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q, n+i)) \cdot q^{-i})\right\}$ и что при больших $q$ справедливы соотношения $1 < x_q^* < y_q^* < 1 + (\frac{3}{2})^{-q}$ и $z_q^* = 2 - O((\frac{3}{2})^{-q})$. Если $n + 1 \equiv 0$

(mod 3) и $n, q$ достаточно велики, то

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q,n+i))\cdot q^{-i}) \approx$$
$$\approx \left(\frac{y_q^*}{q}+\frac{y_q^*}{q^4}+\frac{y_q^*}{q^7}+\dots\right)+\left(\frac{z_q^*}{q^2}+\frac{z_q^*}{q^5}+\frac{z_q^*}{q^8}+\dots\right)+\left(\frac{x_q^*}{q^3}+\frac{x_q^*}{q^6}+\frac{x_q^*}{q^9}+\dots\right).$$

Последняя сумма равна $y_q^*\cdot\frac{q^2}{q^3-1}+z_q^*\cdot\frac{q}{q^3-1}+x_q^*\cdot\frac{1}{q^3-1}$. Аналогично, если $n+1\equiv 1 \pmod 3$ и $n, q$ достаточно велики, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q,n+i))\cdot q^{-i})$ близко к $z_q^*\cdot\frac{q^2}{q^3-1}+x_q^*\cdot\frac{q}{q^3-1}+y_q^*\cdot\frac{1}{q^3-1}$. Наконец, если $n+1\equiv 2 \pmod 3$ и $n, q$ достаточно велики, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\ln(a(q,n+i))\cdot q^{-i})$ близко к

$$x_q^*\cdot\frac{q^2}{q^3-1}+y_q^*\cdot\frac{q}{q^3-1}+z_q^*\cdot\frac{1}{q^3-1}.$$

Значит, при больших $q$ три суммы близки к

$$\frac{q^2+2\cdot q+1}{q^3-1},\frac{2\cdot q^2+q+1}{q^3-1},\frac{q^2+q+2}{q^3-1},$$

соответственно. Отсюда следует, что при $q\to\infty$ подпоследовательности $\{\alpha_{q,3k}\},\{\alpha_{q,3k+1}\},\{\alpha_{q,3k+2}\}$ сходятся к трём попарно различным пределам. Теорема 2 доказана.

## 3. Некоторые замечания

Интересен вопрос о том, начиная с какого значения параметра $q$ соотношения в теореме 2 становятся приближенными равенствами с разными константами. Для ответа на него был проведён вычислительный эксперимент, который дал следующие результаты (в ячейках таблиц в дробной части чисел указаны первые три значащие цифры).

Из первой таблицы видно, что распадение последовательности $\{a(q,n)\}$ на три сходящиеся подпоследовательности, номера членов которых соответствуют классам вычетов по модулю 3, маловероятно при $3\leqslant q\leqslant 10$. Результаты вычислительного эксперимента для бо́льших $n$ и тех же $q$ (не представленные в таблицах) подтверждают это наблюдение. Вместе с тем, по таблицам 2—4 просматривается, что $\{a(q,3k)\},\{a(q,3k+1)\},\{a(q,3k+2)\}$ сходятся при $q\in\{11,12,13\}$. Это же экспериментально наблюдается и при бо́льших $q$ и $k$. Тем самым, вычислительный эксперимент позволяет предположить, что теорема 2 (в части распадения на три сходящиеся подпоследовательности) справедлива для любого $q>10$ и не имеет места при $3\leqslant q\leqslant 10$.

| q | n | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
| 2 | 1.178 | 1.284 | 1.303 | 1.300 | 1.298 | 1.298 | 1.298 | 1.298 | 1.298 | 1.298 |
| 3 | 1.045 | 1.194 | 1.445 | 1.510 | 1.290 | 1.106 | 1.329 | 1.411 | 1.118 | 1.252 |
| 4 | 1.008 | 1.226 | 1.805 | 1.374 | 1.028 | 1.037 | 1.038 | 1.040 | 1.042 | 1.044 |
| 5 | 1.004 | 1.466 | 1.566 | 1.021 | 1.001 | 1.765 | 1.000 | 1.790 | 1.019 | 1.363 |
| 6 | 1.008 | 1.790 | 1.108 | 1.000 | 1.309 | 1.039 | 1.000 | 1.000 | 1.001 | 1.082 |
| 7 | 1.036 | 1.691 | 1.000 | 1.193 | 1.410 | 1.213 | 1.000 | 1.694 | 1.000 | 1.960 |
| 8 | 1.222 | 1.113 | 1.000 | 1.896 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.075 |
| 9 | 1.593 | 1.018 | 1.333 | 1.034 | 1.025 | 1.000 | 1.018 | 1.996 | 1.025 | 1.000 |
| 10 | 1.818 | 1.000 | 1.995 | 1.000 | 1.053 | 1.000 | 1.087 | 1.000 | 1.038 | 1.004 |

Таблица 1: Значения некоторых членов последовательности $\{a(q,n)\}$

| q | k | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 11 | 1.942 | 1.922 | 1.913 | 1.909 | 1.906 | 1.904 | 1.904 | 1.904 | 1.904 | 1.904 |
| 12 | 1.966 | 1.958 | 1.956 | 1.955 | 1.955 | 1.955 | 1.955 | 1.955 | 1.955 | 1.955 |
| 13 | 1.979 | 1.976 | 1.976 | 1.976 | 1.976 | 1.976 | 1.976 | 1.976 | 1.976 | 1.976 |

Таблица 2: Значения некоторых членов подпоследовательности $\{a(q,3k+1)\}$

| q | k | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 11 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.0008 | 1.000 |
| 12 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 13 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |

Таблица 3: Значения некоторых членов подпоследовательности $\{a(q,3k+2)\}$

| q | k | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 11 | 1.005 | 1.007 | 1.008 | 1.008 | 1.008 | 1.009 | 1.009 | 1.009 | 1.009 | 1.009 |
| 12 | 1.003 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 |
| 13 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 |

Таблица 4: Значения некоторых членов подпоследовательности $\{a(q,3k)\}$

# Список литературы


1. Воронин, В. П., Демакова, Е. В., “О числе независимых множеств для некоторых семейств графов”, Труды IV Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19–25 июня 2000 г.), 2000, 145–149.
2. Дайняк, А. Б., “О числе независимых множеств в полных $q$-арных деревьях”, Учёные записки Казанского гос. ун-та. Серия Физ.-матем. науки, **151**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2009, 59–64.

3. Коршунов, А. Д., Сапоженко А. А., “О числе двоичных кодов с расстоянием 2”, *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 111–130.
4. Kalkin, N.J., Wilf, H.S., “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM J. Discr. Math.*, **11**:1 (1997), 54–60.
5. Kirschenhofer, P., Prodinger, H., Tichy, R., “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.

Статья поступила 16.06.2016.