УДК 517.9 МАТЕМАТИКА

© А.И. ВАГАБОВ

О СУММИРОВАНИИ n-КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ГЛАВНЫМ ФУНКЦИЯМ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 12 IV 1988)

1. Постановка задачи и основные условия. Суммируемость рядов Фурье по главным функциям нерегулярных обыкновенных дифференциальных операторов затронута в литературе лишь в весьма частных ситуациях. В работе [1] рассмотрен случай оператора с распадающимися граничными условиями; в работе [2] найдено усиление результатов [1] в случае дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Нами рассматривается задача суммирования n-кратных разложений по главным функциям в наиболее широкой постановке для произвольного пучка вида

$$(1)\qquad l(y)\equiv \sum_{i+j\leqslant n} p_{ij}(x)\lambda^i y^{(j)}(x),\qquad p_{0n}(x)\neq 0,\quad a<x<b;$$

$$(2)\qquad U_i(y)\equiv \sum_{\substack{k+j\leqslant n\\ k,j<n}} \lambda^k\left\{\alpha_i^{kj}\frac{d^jy}{dx^j}\bigg|_{x=a}+\beta_i^{kj}\frac{d^jy}{dx^j}\bigg|_{x=b}\right\}=0,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

λ – спектральный параметр.

Ранее подобная задача рассматривалась лишь в весьма частной постановке в случае пучка Келдыша с распадающимися граничными условиями [3]. Обратим внимание на то, что нерегулярные задачи с нераспадающимися краевыми условиями рассматриваются здесь впервые.

Пусть α, β – определяющие $(n\times n)$-матрицы граничных условий (2), см. [4], $\operatorname{rank}\alpha+\operatorname{rank}\beta\geqslant n$, $r_1=\operatorname{rank}\beta\leqslant\operatorname{rank}\alpha=r_2$. Считаем далее, что $p_{ij}(x)\in C^{(j)}[a,b]$. Сформулируем основные требования к пучку (1), (2).

1) Корни уравнения

$$(3)\qquad \sum_{i+j=n} p_{ij}(x)\varphi^j=0$$

различны при всех x, отличны от нуля, их аргументы и аргументы их разностей не зависят от x.

2) Пусть m – наименьшее число такое, что найдутся хотя бы две прямые d_0, d_1, проходящие через начало, разделяющие комплексную плоскость на полуплоскости, внутри каждой из которых число корней уравнения (3) не превосходит m (это число согласно первому условию не зависит от x). Полагаем, что

$$(4)\qquad m\leqslant r_1$$

(d_i могут проходить через φ-корни или не содержать их).

Для формулировки третьего условия рассмотрим прямые $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$, симметричные d_0, d_1 относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов. Пусть $\mathcal{D}_0^+$, $\mathcal{D}_0^-$, $\mathcal{D}_1^+$, $\mathcal{D}_1^-$ – полупрямые, на которые разделяются $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ началом. Для каждой из этих четырех полупрямых произвольно перенумеруем корни уравнения (3), но так, чтобы $\operatorname{Re}\lambda\varphi_i<0$ при $i\leqslant m$; $\operatorname{Re}\lambda\varphi_i=0$ при $m+1\leqslant i\leqslant n-m$; $\operatorname{Re}\lambda\varphi_i>0$ при $i\geqslant n-m+1$, когда λ находится на соответствующей полупрямой.

3) При вышеуказанных нумерациях в четырех случаях считаем, что

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\varphi_1^{j-1}(a) \ldots \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\varphi_\tau^{j-1}(a) & \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{1j}\varphi_{\tau+1}^{j-1}(b) \ldots \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{1j}\varphi_n^{j-1}(b) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj}\varphi_1^{j-1}(a) \ldots \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj}\varphi_\tau^{j-1}(a) & \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{nj}\varphi_{\tau+1}^{j-1}(b) \ldots \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{nj}\varphi_n^{j-1}(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

хотя бы для одного индекса τ такого, что $m \leqslant n-\tau \leqslant r_1$; $m \leqslant \tau \leqslant r_2$.

2. Построения и оценки, связанные с функцией Грина. λ-Плоскость можно разбить на конечное число секторов с вершиной в начале, в каждом из которых при определенной нумерации φ-корней справедливы неравенства $\operatorname{Re}\lambda\varphi_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda\varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda\varphi_n$. Известно [5], что для произвольного из этих секторов S существует фундаментальная система решений уравнения $l(y) = 0$, аналитическая по λ в нем при $|\lambda| \gg 1$ и допускающая асимптотическое представление

$$(5)\qquad \frac{d^{k-1}y_s(x,\lambda)}{dx^{k-1}} = (\lambda\varphi_s(x))^{k-1}\exp\left\{\lambda\left[\int\limits_a^x \varphi_s(t)\,dt\right]\right\}, \qquad s,k = 1,2,\ldots,n,$$

где использовано известное обозначение $[\varphi] = \varphi + O(1/\lambda)$.

Асимптотика спектра пучка (1), (2) находится из уравнения $\Delta(\lambda) \equiv \equiv \det\{U_i(y_j)\}_1^n = 0$ с использованием формул (5). При этом $\Delta(\lambda)$ имеет степенно-показательный вид $\Delta(\lambda) = [H_1]\lambda^{l_1}e^{w_1\lambda} + \ldots + [H_N]\lambda^{l_N}e^{w_N\lambda}$, а потому корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ состоят из конечного числа серий. Каждая из этих серий корней лежит в полуполосе, параллельной некоторому лучу, исходящему из начала, либо в полуполосе, параллельной логарифмической кривой. С ростом модуля корни асимптотически сближаются к указанным лучам и кривым, см. подробнее [6].

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in C^1[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$. *Для функции Грина справедлива формула интегрирования по частям*:

$$(6)\qquad \int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi = \frac{[-f(x)]}{\lambda^n} - \int\limits_a^b \hat{G}(x,\xi,\lambda)f'(\xi)\,d\xi,$$

где

$$(7)\qquad \hat{G}(x,\xi,\lambda) = \sum \frac{[\eta_s(x,\xi)]}{\lambda^n}\exp\left\{\lambda\int\limits_\xi^x \psi_s(t)\,dt\right\} +$$

$$+\sum \frac{\epsilon_{jk}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^n}\exp\left\{\lambda\int\limits_\xi^{c_1}\psi_j(t)\,dt\right\}\exp\left\{\lambda\int\limits_x^{c_1}\psi_k(t)\,dt\right\},$$

$$\lambda \in D_0' \cup D_1', \quad |\lambda| \gg 1,$$

$\psi_s(t) = \pm\varphi_s(t)$, c_1, c_2 *равны* a *или* b, *причем*

$$\operatorname{Re}\lambda\int\limits_\xi^x (t)\,dt \leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\lambda\int\limits_\xi^{c_1}\psi_j(t)\,dt \leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\lambda\int\limits_x^{c_2}\psi_k(t)\,dt \leqslant 0.$$

$\eta_s(x,\xi)$, $\epsilon_{jk}(x,\xi,\lambda)$ *непрерывны и ограничены при* $x, \xi \in [a,b]$, $\lambda \in \mathcal{D}_0' \cup \mathcal{D}_1'$, $|\lambda| \gg 1$, $\mathcal{D}_0'$, $\mathcal{D}_1'$ *– прямые, параллельные* $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ *и расположенные вне некоторой окрестности спектра пучка при* $|\lambda| \gg 1$.

Доказательство ведется интегрированием по частям с учетом скачка при

$\xi = x$ и соотношения*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} W(\varphi_1, \ldots, \hat{\varphi}_k, \ldots, \varphi_k)\varphi_k^{-1} = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

(крышечка над φ_k означает пропуск этого аргумента). См. подобную лемму в [2].

Теорема 1. *При условиях* 1) – 3) *системы главных функций пучка* (1), (2) *и сопряженного к нему пучка n-кратно полны в* $L_2(a, b)$.

Доказательство моментально вытекает из леммы 1, теоремы 2 из [7] и того, что функция Грина сопряженного пучка равна $\overline{G(\xi, x, \lambda)}$ [8, с. 43].

Непосредственными оценками доказывается

Лемма 2. *Существует система замкнутых расширяющихся контуров* Γ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ *из* λ*-плоскости, описанная в* [9, с. 177], *на которых*

$$|\hat{G}(x, \xi, \lambda)| \leqslant Ce^{\delta|\lambda|}, \quad \delta > 0, \quad \lambda \in \Gamma_k. \tag{8}$$

3. Суммируемость разложений. Пусть γ и $\pi - \gamma$ – величины углов, под которыми пересекаются прямые $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$. Рассмотрим четыре замкнутых контура $\Pi^{(j)}_{k_0 k} \equiv \Pi^{(j)}_k$, $k > k_0 \gg 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, получаемых пересечением четырех углов между $\mathscr{D}_0$ и $\mathscr{D}_1$ контурами Γ_{k_0}, Γ_k. Оговоримся, что если отрезки прямых $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$, составляющие эти контуры, проходят через спектр пучка (1), (2), то вместо $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$ используем параллельные им прямые $\mathscr{D}'_0$, $\mathscr{D}'_1$, отрезки которых, отсекаемые Γ_{k_0}, Γ_k, $\forall k > k_0$ не содержат точек спектра. Условимся, что контуры $\Pi^{(1)}_k$, $\Pi^{(2)}_k$ соответствуют углам между $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$ растворов γ, а $\Pi^{(3)}_k$, $\Pi^{(4)}_k$ – углам раствора $\pi - \gamma$.

4) Пусть $f_0(x), \ldots, f_{n-2}(x)$ – функции из области определения пучка (1), (2), $f'_{n-1}(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, $f_{n-1}(a) = f_{n-1}(b) = 0$,

$$F(f(x), \lambda) \equiv -\sum_{\substack{i+j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} p_{ij}(x) \frac{d^j}{dx^j} (\lambda^{i-1} f_0(x) + \ldots + f_{i-1}(x)).$$

Теорема 2. *При условиях* 1) – 4) *справедлива формула*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k_0}} \lambda^\nu d\lambda \int_a^b G(x, \xi, \lambda) F(f(\xi), \lambda) d\xi - \tag{9}$$

$$- \lim_{\epsilon \searrow 0} \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi^{(j)}_k} \lambda^\nu e^{-\epsilon(\delta_j \lambda)^{\alpha_j}} d\lambda \int_a^b G(x, \xi, \lambda) F(f(\xi), \lambda) d\xi = f_\nu(x),$$

$$1 < \alpha_1, \ \alpha_2 \leqslant \pi/\gamma; \quad 1 < \alpha_3, \ \alpha_4 \leqslant \pi/(\pi - \gamma), \quad \nu = 0, \ldots, n-1,$$

n-кратной посерийной по Абелю суммируемости разложений "со скобками" в ряды Фурье по ν*-производным цепочкам для собственных и присоединенных функций пучка* (1), (2). *Пределы в* (9) *равномерные на* $[a, b]$. *Константы* δ_j *выбраны так, что* $\delta_j \lambda > 0$ *на биссектрисах соответствующих секторов, образованных прямыми* $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$. *В функциях* $(\delta_j \lambda)^{\alpha_j}$ *выбираются главные ветви в* λ*-плоскостях с разрезами по предложениям указанных биссектрис.*

Поясним, что в (9) речь идет о суммировании по Абелю четырех рядов Фурье, относящихся к четырем сериям собственных значений, расположенных соот-

---

* W – определитель Вандермонда.

ветственно в четырех областях, ограниченных $\Pi_k^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$; $k \to \infty$, с показателями суммируемости α_j.

Доказательство теоремы 2. Выражение левой части (9) представляет разложение Фурье вектор-функции $(f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x))^t$ по ν-производным цепочкам для собственных и присоединенных функций пучка (1), (2) [10, гл. 3, § 2; 11], иначе, по корневым векторам соответствующего линеаризованного пучка (оператора). Но ввиду полноты (согласно теореме 1) в $L_2^n(a, b)$ системы корневых векторов оператора, сопряженного к полученному оператору, и леммы 6 из [2] для доказательства формулы (9) достаточно установить равномерную сходимость пределов в ее левой части. Последнее устанавливается просто. Взяв случай $\nu = 0$, ввиду (6)–(8) и наличия сильно убывающей экспоненты $\exp\{-\epsilon(\delta_j\lambda)^{\alpha_j}\}$ отбросим пределы интегралов по контурам Γ_k при $k \to \infty$. Таким образом, остается установить наличие равномерных на $[a, b]$ пределов вида

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathscr{D}_0 \cap \{|\lambda| \geqslant 1\}} \lambda^{n-1} e^{-\epsilon(\delta_j\lambda)^{\alpha_j}} d\lambda \int_a^b \hat{G}(x, \xi, \lambda) f_0'(\xi) d\xi,$$

что следует из формулы (7).

В случае $\nu = 1$ согласно структуре $F(f(\xi), \lambda)$ и определения обратного оператора найдем

$$\int_0^1 \lambda G(x, \xi, \lambda) F(f(\xi), \lambda) d\xi = -f_0(x) + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) F_1(f(\xi), \lambda) d\xi,$$

где

$$F_1(f(\xi), \lambda) = f^{(n)}(\xi) - \sum_{\substack{i+j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} p_{ij}(\xi) \frac{d^j}{d\xi^j} (\lambda^{i-1} f_1(\xi) + \ldots + \lambda f_{i-1}(\xi)),$$

и по существу сводим этот случай к случаю $\nu = 0$. При $\nu > 1$, продолжая такие же рассуждения, завершим доказательство теоремы.

Теорема 2 полностью охватывает соответствующие результаты работы [1]. Однако результаты работы [2] показывают, что условие (4) для частных ситуаций не предельное. Тем не менее теорема 2 носит окончательный характер, например, в случае распадающихся граничных условий типа Штурма.

Автор глубоко благодарит чл.-корр. АН СССР В.А. Ильина за внимание к данной работе.

Дагестанский государственный университет
им. В.И. Ленина
Махачкала

Поступило
15 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А.П.* В сб.: Обыкновенные дифференциальные уравнения и разложения в ряды. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1968, вып. 1, с. 29–41. 2. *Костюченко А.Г., Шкаликов А.А.* – Функц. анализ, 1978, т. 12, № 4, с. 24–40. 3. *Вагабов А.И.* – ДАН, 1980, т. 262, № 6, с. 1300–1303. 4. *Вагабов А.И.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984, т. 48, № 3, с. 614–630. 5. *Вагабов А.И.* – Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 9, с. 1475–1479. 6. *Вагабов А.И.* – ДАН, 1985, т. 285, № 5, с. 1037–1041. 7. *Гасымов М.Г., Магеррамов А.М.* – Докл. АН АзССР, 1974, т. 30, № 12, с. 9–12. 8. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с. 9. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пг., 1917. 308 с. 10. *Расулов М.Л.* Методы контурного интеграла. М.: Наука, 1964. 462 с. 11. *Келдыш М.В.* – ДАН, 1951, т. 77, № 1, с. 11–14.