Ха Зуй Хоай, О p-адической интерполяции, *Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 1, 101–112

https://www.mathnet.ru/mzm6845

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

О p-АДИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Ха Зуй Хоай

Эта работа состоит из двух частей. В первой части мы ставим в соответствие каждой p-адической аналитической функции последовательность непрерывных кусочно линейных вещественных функций и устанавливаем некоторые свойства таких последовательностей.

Во второй части рассматривается вопрос о p-адической интерполяции. Известно [1], что всякая функция, непрерывная в кольце $\mathbf{Z}_p$ p-адических целых, является суммой ряда $\sum_{n\geqslant 0} a_n \binom{x}{n}$, равномерно сходящегося в $\mathbf{Z}$. Коэффициенты этого ряда вычисляются с помощью интерполяции по значениям функции на множестве неотрицательных целых чисел. Назовем последовательность неотрицательных целых чисел интерполяционной последовательностью для непрерывных функций в $\mathbf{Z}$. В [2] рассматривается пространство непрерывных функций на достаточно регулярных компактах и доказывается, что в качестве интерполяционной последовательности можно взять так называемую очень хорошо распределенную последовательность точек. В настоящей работе мы будем рассматривать пространство аналитических функций в диске $\{z \in \mathbf{C}_p, |z|_p < 1\} = T$ и установим необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторая последовательность являлась интерполяционной для данной аналитической функции в T. Здесь $\mathbf{C}_p$ — пополнение замыкания поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$.

§ 1. Последовательность Ньютона. Пусть H — пространство p-адических аналитических функций на T.

Функция $f(z) \in H$ представляется сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

$a_n z^n$ называется лидирующим членом, если существуют такие $t_1, t_2 > 0$, что при $t \in (t_1, t_2)$

$$\operatorname{ord} a_n + nt = \min_m \{\operatorname{ord} a_m + mt\}.$$

Пусть $\{a_{n_k} z^{n_k}, \quad k = 1, \ 2, \ \ldots\}$ — множество лидирующих членов ряда (1). Положим

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}.$$

Определим по индукции следующую последовательность:

$$\tilde{f}_0(z), \quad \tilde{f}_1(z), \ldots, \tilde{f}_m(z), \ldots, \tag{2}$$

где

$$\tilde{f}_0(z) = \tilde{f}(z), \quad \tilde{f}_m(z) = \widetilde{\left(f(z) - \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{f}_i(z)\right)}.$$

Очевидно,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k(z). \tag{3}$$

Заметим, что в разложениях функций $\tilde{f}_k(z)$ $(k = 0, \ 1, \ldots)$ участвуют только лидирующие члены (или $\tilde{f}_k(z) \equiv 0$ при k достаточно больших). Для каждой функции $f(z) \in H$ с разложением (1) положим

$$v(f, t) = \inf_n \{\operatorname{ord} a_n + nt\}, \qquad t > 0.$$

Тогда $v(f, t)$ является непрерывной, кусочно линейной функцией при $t > 0$ [3]. Теперь положим

$$\rho_k^f(t) = v(\tilde{f}_k, t),$$

где $t > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, Если функция $f(z)$ фиксирована, то мы опускаем значок f в обозначении $\rho_k^f(t)$. Считаем, что $\rho_k^f(t) \equiv \infty$, если $\tilde{f}_k(t) \equiv 0$.

Определение. Последовательностью Ньютона функции $f(z)$ называется следующая последовательность:

$$\rho^f(t) = (\rho_0^f(t), \ \rho_1^f(t), \ \ldots).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$\rho = (\rho_0 (t), \rho_1 (t), \ldots)$$

— последовательность Ньютона некоторой аналитической функции $f(z) \in H$. *Тогда* ρ *имеет следующие свойства:*

1) $\rho_{k+1} (t) \geqslant \rho_k (t)$ *для всех* $k = 0, 1, 2, \ldots, t > 0$.

2) *функции* $\rho_k (t)$ *непрерывны, слева дифференцируемы и их производные являются монотонно убывающими кусочно постоянными функциями, принимающими неотрицательные целые значения.*

3) *Обозначим через* $\mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t$ *левую производную функции* $\rho_k (t)$ *в точке* t. *Тогда для каждого* k *либо существует такое число* $M_k > -\infty$, *что при* $t > 0$ $\rho_k (t) > M_k$, *либо для любого* $t_0 > 0$ $\lim\limits_{t \to 0} \{\rho_k (t) + t_0 \mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t\} = \infty$.

4) *Для любой пары* $i \neq k$, $\mathrm{d}\rho_i/\mathrm{d}t$ *и* $\mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t$ *имеются непересекающиеся множества значений, кроме того случая, когда* $\rho_k (t) \equiv \rho_i (t) \equiv \infty$.

Обратно, для последовательности ρ, *удовлетворяющей свойствам* 1) — 4), *существует такая аналитическая функция* $f(z) \in H$, *что* $\rho^f (t) \equiv \rho (t)$.

Доказательство. По определению операции $f \mapsto \tilde{f}$ и из свойств многоугольника Ньютона [3] имеем

$$v(f, t) = v(\tilde{f}, t)$$

для всех $f(z) \in H$ и $t > 0$. Отсюда следует

$$v(\tilde{f}_{k+1}, t) = v(f - \tilde{f}_0 - \ldots - \tilde{f}_k, t) \geqslant \min \{v(f - \tilde{f}_0 - \ldots - \tilde{f}_{k-1}, t), \ v(\tilde{f}_k, t)\} = \min \{v(\tilde{f}_k, t), \ v(\tilde{f}_k, t)\} = v(\tilde{f}_k, t).$$

Свойство 1) доказано.

Свойства 2) и 4) являются прямыми следствиями определений последовательности Ньютона и многоугольника Ньютона.

Теперь докажем 3). Предположим, что для k имеем $\lim\limits_{t \to 0} \rho_k (t) = -\infty$. Будем доказывать, что в этом случае $\lim\limits_{t \to 0} \{\rho_k (t) + t_0 \mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t\} = +\infty$ для всех $t_0 > 0$. Пусть функция $\tilde{f}_k (z)$ представляется сходящимся рядом

$$\tilde{f}_k (z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_{k_n} z^{k_n}.$$

Так как $\lim\limits_{t \to 0} \rho_k (t) = -\infty$, можно считать, что $a_{k_n} \neq 0$

для всех n. При любом $t_0 > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \{\operatorname{ord} a_{k_n} + k_n t_0\} = +\infty.$$

Пусть дано любое положительное число M и для некоторого n_0 имеем

$$\operatorname{ord} a_{k_{n_0}} + k_{n_0} t_0 > M.$$

Так как $a_{k_{n_0}} z^{k_{n_0}}$ является лидирующим членом в промежутке

$$\frac{\operatorname{ord} a_{k_{n_0}} - \operatorname{ord} a_{k_{n_0+1}}}{k_{n_0+1} - k_{n_0}} \leqslant t \leqslant \frac{\operatorname{ord} a_{k_{n_0+1}} - \operatorname{ord} a_{k_{n_0+2}}}{k_{n_0+2} - k_{n_0+1}},$$

то при $t < (\operatorname{ord} a_{k_{n_0}} - \operatorname{ord} a_{k_{n_0+1}})/(k_{n_0+1} - k_{n_0})$ имеем

$$(\mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t)(x - t) + \rho_k(t) > \operatorname{ord} a_{k_{n_0}} + k_{n_0} x$$

для всех

$$x > (\operatorname{ord} a_{k_{n_0}} - \operatorname{ord} a_{k_{n_0+1}})/(k_{n_0+1} - k_{n_0}).$$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{ord} a_{k_n} - \operatorname{ord} a_{k_{n+1}})/(k_{n+1} - k_n) = 0.$$

В самом деле, если бы было не так, то аналитическая функция $f_k(z)$ имела бы бесконечно много нулей в множестве $\{z\colon \operatorname{ord} z \geqslant \xi > 0\}$, для некоторого ξ. Но это невозможно [4]. Поэтому сначала можно считать, что

$$t_0 > (\operatorname{ord} a_{k_{n_0}} - \operatorname{ord} a_{k_{n_0+1}})/(k_{n_0+1} - k_{n_0}).$$

Следовательно, при

$$t < (\operatorname{ord} a_{k_{n_0}} - \operatorname{ord} a_{k_{n_0+1}})/(k_{n_0+1} - k_{n_0})$$

имеем

$$(\mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t)(t_0 - t) + \rho_k(t) > \operatorname{ord} a_{k_{n_0}} + k_{n_0} t > M.$$

Значит,

$$\lim_{t\to 0} \{\rho_k(t) + (\mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t)\, t_0\} = +\infty.$$

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть последовательность $\rho(t) = (\rho_0(t), \rho_1(t), \ldots)$ удовлетворяет свойствами 1) — 4). Положим $\rho_k'(t) = \mathrm{d}\rho_k/\mathrm{d}t$. Пусть $t_1^k >$

$> t_2^k > \ldots > t_n^k > \ldots$ — последовательность точек разрыва функции $\rho_k'(t)$ и $\{a_n^k\}$ — последовательность таких чисел, что

$$\operatorname{ord} a_n^k = -\rho_k(t_n^k) + t_n\rho_k'(t_n).$$

Учитывая, что $\rho_k'(t)$ принимают целые значения, положим

$$P_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k z^{\rho_k'(t_n^k)}, \tag{4}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z). \tag{5}$$

Докажем, что ряды (4) и (5) сходятся и $f(z)$ является аналитической функцией в T. Более того, имеем

$$\tilde{f}_k(z) = P_k(z), \quad v(P_k, t) = \rho_k(t)$$

при $t > 0$, значит, $\rho(t)$ является последовательностью Ньютона функции $f(z)$. Заметим, что если $\rho_k(t) \equiv \infty$, то считаем, что $P_k(z) \equiv 0$, и если $\rho_k'(t)$ имеет только конечное число точек разрыва, то (4) является конечной суммой. Сначала докажем, что ряд (4) сходится. Для $\operatorname{ord} z = t$ имеем

$$\operatorname{ord}(a_n^k z^{\rho_k'(t_n^k)}) = \rho'(t_n^k)(t - t_n^k) + \rho_k(t_n^k).$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $\rho_k'(t)$ имеет бесконечно много точек разрыва. В этом случае легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^k = 0$. Это следует из того, что $\rho_k'(t)$ монотонно убывает и целочисленна. Следовательно, из свойства 3) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \{\rho_k'(t)(t - t_n^k) + \rho_k(t_n^k)\} = \infty.$$

Таким образом, ряды (4) сходятся и определяют аналитические функции $P_k(z)$ в области T. Покажем, что в разложениях функций $P_k(z)$ участвуют только лидирующие члены и $v(P_k, t) = \rho_k(t)$. Положим

$$\varphi_k^n(t) = \rho_k'(t_n^k)(t - t_n^k) + \rho_k(t_n^k).$$

Надо доказать, что при $t \in [t_{n+1}^k, t_n^k]$

$$\varphi_k^n(t) = \inf_m \varphi_k^m(t). \tag{6}$$

Имеем

$$\varphi_k^{n+1}(t_{n+1}^k) = \rho_k(t_{n+1}^k).$$

Так как для $t \in [t_{n+1}^k, t_n^k]$, $\rho_k'(t) = \rho_k'(t_n^k)$, то

$$\rho_k'(t_n^k) = (\rho_k(t_n^k) - \rho_k(t_{n+1}^k))/(t_n^k - t_{n+1}^k),$$

и, следовательно, $\varphi_k^{n+1}(t_{n+1}^k) = \varphi_k^n(t_{n+1}^k)$. Из того, что $\varphi_k^{n+1}(t)$ и $\varphi_k^n(t)$ линейны и $\rho_k'(t_{n+1}^k) > \rho_k'(t_n^k)$, следует, что $\varphi_k^{n+1}(t) > \varphi_k^n(t)$ при $t > t_{n+1}^k$. Аналогично $\varphi_k^{n+2}(t) > \varphi_k^{n+1}(t)$ при $t > t_{n+2}^k$, ... $\varphi_k^{n+r}(t) > \varphi_k^{n+r-1}(t)$ при $t > t_{n+r}^k$. Так как $t_{n+1}^k > t_{n+2}^k > \ldots > t_{n+r}^k$, то

$$\varphi_k^{n+r}(t) > \varphi_k^n(t) \text{ при } t > t_{n+1}^k.$$

Таким образом,

$$\varphi_k^n(t) = \inf_{m \geqslant n} \varphi_k^m(t) \text{ при } t > t_{n+1}^k.$$

Аналогично

$$\varphi_k^n(t) = \inf_{m < n} \varphi_k^m(t) \text{ при } t < t_n^k.$$

Тем самым равенство (6) доказано, и поэтому $P_k(z) \equiv \tilde{P}_k(z)$, $v(P_k, t) = \rho_k'(t_n^k)(t - t_n^k) + \rho_k(t_n^k)$ при $t \in [t_{n+1}^k, t_n^k]$. Значит, $v(P_k, t) = \rho_k(t)$.

Теперь докажем, что ряд (5) сходится в области T. В силу равенства $v(P_k, t) = \rho_k(t)$ достаточно доказать, что при любом фиксированном $t > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k(t) = \infty.$$

Пусть существует такое $t_0 > 0$ и $M > 0$, что $\rho(t_0) < M$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ Из свойства 4) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k'(t_0) = \infty.$$

Из свойств 1) и 2) имеем

$$\rho_0(t_0/2) \leqslant \rho_k(t_0/2) \leqslant \rho_k'(t_0)(t_0/2 - t_0) + \rho_0(t_0) < \\ < -\rho_k'(t_0/2)\cdot t_0 + M.$$

Это противоречит тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k'(t_0) = \infty$. Таким образом, ряд (5) сходится и определяет аналитическую функцию $f(z) \in H$.

Так как $P_k(z) \equiv \tilde{P}_k(z)$ для всех $k \geqslant 0$ и $v(P_k, t) \geqslant v(P_{k-1}, t)$ для всех $t > 0$, легко видеть, что $\tilde{f}_k(z) \equiv P_k(z)$. Таким образом, $\rho = (\rho_0(t), \rho_1(t), \ldots)$ является последовательностью Ньютона функции $f(z)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Аналитические функции в* T, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *и* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, *имеют одну и ту же последовательность Ньютона тогда и только тогда, когда существуют такие р-адические единицы* α_n, *что* $a_n = \alpha_n b_n$ *для всех* $n \geqslant 0$.

Доказательство. Достаточность следует из определения последовательности Ньютона. Так как $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k(z)$ и $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_k(z)$, достаточно доказать необходимость для функций, в разложениях которых участвуют только лидирующие члены. Но в этом случае теорема легко следует из свойств многоугольника Ньютона.

§ 2. Последовательность интерполяции. Пусть $u = \{u_i, i = 1, 2, \ldots\}$ — некоторая последовательность различных точек в T. Обозначим через $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ число таких точек u_i последовательности u, что $\operatorname{ord} u_i \geqslant t > 0$. В дальнейшем будем рассматривать только такие последовательности u, что $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t < \infty$ для каждого фиксированного $t > 0$. Всегда предполагается, что $\operatorname{ord} u_i \geqslant \operatorname{ord} u_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Для последовательности u и любой аналитической функции $f(z) \in H$ построим многочлены $P_k(z)$ степени не больше k по соотношению

$$P_k(u_i) = f(u_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Определение. $u = \{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется последовательностью интерполяции функции $f(z)$, если последовательность многочленов $P_k(z)$ сходится к $f(z)$ в топологии H.

Для каждой последовательности u можно построить по доказательству второй части теоремы 1 такую аналитическую функцию $\Phi_u(z)$, что

$$\mathrm{d}\rho_0^{\Phi_u}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$$

при $t > 0$. Можно считать, что $\rho_0(t) = 1$ при достаточно больших t.

Для аналитических функций $f(z)$ и $g(z)$ пространства будем говорить, что $f = o(g)$, если

$$\sup_{|z|\leqslant r} |f(z)| = o(\sup_{|z|\leqslant r} |g(z)|)$$

при $r \to o$.

ТЕОРЕМА 3. *u является последовательностью интерполяции функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z) = o(\Phi_u)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть u — последовательность интерполяции функции $f(z) \in H$ и $f(z)$ не принадлежит классу $o(\Phi_u)$. Тогда существует такое положительное число M и такая последовательность $s_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$, что $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = 0$, $v(f, s_i) - v(\Phi_u, s_i) < M$ для всех $i \geqslant 0$. Пусть дано любое число $E > 0$. Для каждого k положим

$$S_k(z) = P_{k+1}(z) - P_k(z).$$

По предположению, последовательность $\{S_k(z)\}$ равномерно сходится к нулю на всяком замкнутом интервале $\{z \in T, \operatorname{ord} z \geqslant \xi > 0\}$. Поэтому существует такое число $k_0 > 0$, что при $k \geqslant k_0$ имеет место неравенство

$$v(S_k, s_0) \geqslant v(\Phi_u, s_0) + E. \tag{7}$$

Тогда для всех N имеем

$$v(S_k, s_N) \geqslant v(\Phi_u, s_N) + E - s_0. \tag{8}$$

Это следует из того, что $S_k(u_i) = 0$ для всех $i = 0, \ldots, k$, $d\rho_0^{\Phi_u}/dt = du/dt$ и их свойств многоугольника Ньютона (см. [3]). Таким образом, для всех $N \geqslant 0$ и $k \geqslant k_0$ имеем

$$v(S_k, s_N) \geqslant v(f, s_N) + E - M - s_0. \tag{9}$$

Положим

$$M_0 = \inf_{0\leqslant k\leqslant k_0} v(S_k, 0).$$

Видно, что достаточно рассмотреть случай, когда функция $f(z)$ имеет бесконечно много нулей. Но в этом случае существует такое число N_0, что для всех $N \geqslant N_0$ имеет место неравенство

$$v(f, s_N) \leqslant M_0 - (E - M - s_0). \tag{10}$$

Поэтому для $N \geqslant N_0$ и $k \leqslant k_0$ получим

$$v(S_k, s_N) - v(f, s_N) \geqslant E - M - s_0. \qquad (11)$$

Таким образом, из (9) следует, что неравенство (11) имеет место для всех $k \geqslant 0$ и $N \geqslant N_0$. По предположению имеем $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(z)$, и отсюда получим очевидное неравенство

$$v(f, s_N) \geqslant \min_k \{v(S_k, s_N)\}. \qquad (12)$$

Фиксируя $N > N_0$, из (11) получим

$$v(f, s_N) \geqslant E - M - s_0 + v(f, s_N).$$

Но это невозможно, так как M — фиксированное число, а E — произвольное. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для последовательности u и функции $f(z)$ выполняется условие $f(z) = o(\Phi_u)$. Сначала докажем, что последовательность многочленов $\{P_k(z)\}$, соответствующая функции $f(z)$ и последовательности u сходится в H.

Мы предположили, что $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t < \infty$ для всех $t > 0$, $\operatorname{ord} u_i \geqslant \operatorname{ord} u_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому можно считать, что последовательность u имеет вид

$$u = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n_1}, u_{n_1+1}, \ldots, u_{n_2}, \ldots\},$$

$$\operatorname{ord} u_i = t_k \qquad (n_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant n_k, \quad n_0 = -1),$$

$$\lim_{k \to \infty} t_k = 0.$$

Пусть τ: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ — такая функция, что $\operatorname{ord} u_i = t_{\tau(i)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Для каждого k по теореме Лазара [4] имеем разложение

$$f(z) = g_k(z) \prod_{i=0}^{k} (1 - z/u_i) + Q_k(z), \qquad (13)$$

где $v(Q_k, t_{\tau(k)}) \geqslant v(f, t_{\tau(k)})$, $Q_k(z)$ — многочлен степени меньше $k+1$. Из (13) и построения многочленов $P_k(z)$ следует, что $P_k(z) \equiv Q_k(z)$. Поэтому для всех $k \geqslant 0$) получим

$$v(P_k t_{\tau(k)}) \geqslant v(f, t_{\tau(k)}) \qquad (14)$$

Рассмотрим выражение $v(S_k, t_{\tau(k)}) - v(f, t_{\tau(k)})$.

Разберем отдельно следующие возможные случаи:

i) $\tau(k) = \tau(k+1)$. В этом случае из теоремы Лазара следует, что

$$v(P_{k+1}, t_{\tau(k)}) \geqslant v(f, t_{\tau(k)}),$$

и вместе с (14) получим

$$v(S_k, t_{\tau(k)}) - v(f, t_{\tau(k)}) \geqslant 0. \tag{15}$$

ii) $\tau(k) < \tau(k+1)$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t_{\tau(k)} \geqslant \mathrm{d}\rho^f/\mathrm{d}t_{\tau(k)}$. Покажем, что в этом случае неравенство (15) тоже выполняется. Пусть, наоборот,

$$v(S_k, t_{\tau(k)}) < v(f, t_{\tau(k)}).$$

Тогда из свойств многоугольника Ньютона получим

$$\begin{aligned} v(S_k, t_{\tau(k+1)}) &= v(S_k, t_{\tau(k)}) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t_{\tau(k)}}(t_{\tau(k)} - t_{\tau(k+1)}) \leqslant \\ &\leqslant v(f, t_{\tau(k)}) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t_{\tau(k)}}(t_{\tau(k)} - t_{\tau(k+1)}) \leqslant \\ &\leqslant v(f, t_{\tau(k)}) - \frac{\mathrm{d}\rho^f}{\mathrm{d}t_{\tau(k)}}(t_{\tau(k)} - t_{\tau(k+1)}) = v(f, t_{\tau(k+1)}). \end{aligned} \tag{16}$$

Но из (14) следует

$$v(P_{k+1}, t_{\tau(k+1)}) \geqslant v(f, t_{\tau(k+1)}). \tag{17}$$

В силу неравенств (16) и (17) получим

$$v(P_k, t_{\tau(k+1)}) = v(S_k, t_{\tau(k+1)}). \tag{18}$$

С другой стороны, из (14) и предположения следует, что

$$v(P_k, t_{\tau(k)}) > v(S_k, t_{\tau(k+1)}). \tag{19}$$

Тогда из неравенств (18) и (19) получим

$$\mathrm{d}\rho^{P_k}/\mathrm{d}t_{\tau(t)} > \mathrm{d}\rho^{S_k}/\mathrm{d}t_{\tau(k)}.$$

Но это невозможно, потому, что степень многочлена P_k не больше k, а функция $S_k(z)$ имеет не меньше k нулей в интервале $\{z, \operatorname{ord} z \geqslant t_{\tau(k)}\}$. Это противоречие доказывает (15) в случае ii).

iii) $\tau(k) < \tau(k+1)$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t_{\tau(k)} < \mathrm{d}\rho^f/\mathrm{d}t_{\tau(k)}$.

Из построения многочленов $P_n(z)$ и многоугольника Ньютона следует, что в этом случае имеет место неравенство

$$\mathrm{d}\rho^{P_k}/\mathrm{d}t_{\tau(k)} \leqslant \mathrm{d}\rho^{S_k}/\mathrm{d}t_{\tau(k)} \leqslant (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t_{\tau(k)}) + 1 \leqslant \mathrm{d}\rho^f/\mathrm{d}t_{\tau(k)}. \tag{20}$$

Из неравенств (14) и (20) получим

$$v\,(P_k,\ t_{\tau(k)}) \geqslant v\,(f,\ t_{\tau(k+1)}). \qquad (21)$$

Из (21) и (14) (где $k \pm 1$ взято вместо k) следует

$$v\,(S_k,\ t_{\tau(k+1)}) \geqslant v\,(f,\ t_{\tau(k+1)}). \qquad (22)$$

Таким образом, во всяком случае имеет место или неравенство (15), или неравенство (22). Пусть N — произвольное и фиксированное целое число, k — достаточно большое, что $t_N > t_{\tau(k)}$. Заметим, что для $t \geqslant t_{\tau(k)}$ имеет место

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{d}\rho^{S_k}/\mathrm{d}t \leqslant (\mathrm{d}u/\mathrm{d}t) + 1.$$

Следовательно, из многоугольного Ньютона следует что для $n \leqslant \tau\,(k+1)$ имеем

$$v\,(\Phi_u,\ t_N) - v\,(S_k,\ t_N) \leqslant v\,(\Phi_{u1} t_n) - v\,(S_k,\ t_n) + t_0. \qquad (23)$$

Таким образом, для $n \leqslant \tau\,(k+1)$ имеет место

$$v\,(S_k,\ t_N) = v\,(\Phi_u,\ t_N) + v\,(S_k,\ t_N) - v\,(\Phi_u,\ t_N) \geqslant$$
$$\geqslant v\,(\Phi_u,\ t_N) + v\,(S_k,\ t_n) - v\,(\Phi_u,\ t_n) - t_0. \qquad (24)$$

Из неравенства (24) для $n = \tau\,(k)$ и неравенства (15) получим

$$v\,(S_k,\ t_N) \geqslant v\,(\Phi_u,\ t_N) - t_0 + v\,(f,\ t_{\tau(k)}) - v\,(\Phi_u,\ t_{\tau(k)}). \qquad (25)$$

Из неравенства (24) для $n = \tau\,(k+1)$ и неравенства (22) следует

$$v\,(S_k,\ t_N) \geqslant v\,(\Phi_u,\ t_N) - t_0 + v\,(f,\ t_{\tau(k+1)}) - v\,(\Phi_u,\ t_{\tau(k+1)}). \qquad (26)$$

Так как для всех k имеет место или (15) или (22), то имеет место или (25), или (26). Но тогда из предположения, что $f = o(\Phi_u)$, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} v\,(S_k,\ t_N) = \infty.$$

Это значит, что последовательность многочленов $\{P_k\}$ сходится к некоторой аналитической функции $P_k\,(z) \in H$.

Остается доказать, что $P\,(z) \equiv f\,(z)$. Так как u является последовательностью интерполяции функции $P\,(z)$, то из необходимости следует, что $P\,(z) = o\,(\Phi_u)$. Положим $g\,(z) = f\,(z) - P\,(z)$. Из предположения и только что сказанного получим

$$g(z) = o(\Phi_u).$$

С другой стороны, по построению имеем

$$g(u_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда получим

$$d\rho^g/dt \geqslant du/dt \text{ при } t > 0. \tag{27}$$

Но тогда $g(z) \equiv 0$, так как в противном случае (27) противоречило бы тому, что $g(z) = o(\Phi_u)$. Достаточность доказана.

Следствие. *Пусть* $f(z)$ — *любая функция пространства* H, $u = \{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ — *последовательность точек в* T, *удовлетворяющая условиям* $du/dt < \infty$, $\operatorname{ord} u_i \geqslant \operatorname{ord} u_{i+1}$. *Тогда* u *является последовательностью интерполяции всех функций класса* $o(f(z))$, *если функция* $N(t) = (du/dt) - (d\rho^f/dt)$ *ограничена снизу при* $t > 0$.

Автор благодарит Ю. И. Манина за внимание к работе и ценные советы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
13.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Mahler K., An interpolation series for a continuous function of a p-adic variable, J. Rein Angew. Math., 199 (1958), 23—34.
[2] Amice Y., Interpolation p-adique, Bull. Soc. Math. France, 92 (1964), 117—180.
[3] Манин Ю. И., p-адические автоморфные функции, «Современные проблемы математики», т. 3, Москва, 1974.
[4] Lazard M., Les zeros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps value complet., Publs IHES, 14 (1962), 47—75.