Функциональные корни

Влад Викол   Апостол Апостолов

Функциональное уравнение $f \circ f = g$, где g — строго убывающая, непрерывная функция, не имеет непрерывных решений, определенных на всей числовой прямой. В статье исследуется ситуация, когда допускается конечное или счетное число разрывов. В частности, показано, что если разрешить f иметь лишь конечное число разрывов, то уравнение не имеет решений на числовой прямой.

1. Введение

Всем хорошо знакомо обозначение $f^{(k)}(x) = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}^{k \text{ раз}}$. Функция $f^{(k)}(x)$ называется k-й итерацией функции f. При этом $f^{(-1)}(x)$ обозначает обратную функцию, а $f^{(-k)}(x)$ есть $(f^{(-1)})^{(k)}(x)$. Ясно, что $(f^{(m)})^{(n)}(x) = f^{(mn)}(x)$. Естественно определить $f^{(1/2)}(x)$ как функцию g, такую что $g(g(x)) = f(x)$ (аналогично определяется $f^{(1/k)}(x)$ и далее $f^{(r/q)}(x)$). Такую функцию мы назовем *функциональным или итерационным корнем*. Функциональные корни являются важным инструментом анализа динамических систем, так как они делают возможным естественный переход от дискретного времени к непрерывному. Действительно, пусть имеется последовательность моментов времени $\dots, -1, 0, 1, \dots$ и состояние системы меняется по закону $w(t+1) = g(w(t))$. Если мы переходим к непрерывному времени, то, например, преобразование $w(t) \to w(t + 1/2)$ должно определяться такой функцией f, что $f(f(x)) \equiv g(x)$.

Математические приложения функциональных корней включают также численные методы, анализ данных в хаотических системах и многое другое. Итерирование играет важную роль и при описании эволюции систем в других научных областях, как например, в экологии, эпидемиологии, оптимизации индустриальных процессов, теории автоматов и теории турбулентности. Более подробно об этих вопросах см. [1–10].

Нас интересует вопрос о существовании функционального корня второй степени, т. е. о функциональном уравнении

$$f \circ f = g. \tag{1}$$

Легко видеть, что если g монотонно убывает, то уравнение (1) не имеет решений в классе непрерывных функций. В самом деле, монотонно убывающая функция принимает каждое свое значение по разу, т. е. равенство $g(x) = g(y)$ влечет равенство $x = y$. Поскольку из $f(x) = f(y)$ следует $f(f(x)) = f(f(y))$, что равносильно $g(x) = g(y)$, приходим к выводу, что f принимает каждое свое значение ровно один раз. Вместе с непрерывностью f это влечет ее монотонность, т. е. f либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает. В обоих случаях $f \circ f$ монотонно возрастает, что противоречит выбору g.

С другой стороны, если разрешить функции f быть разрывной, то уравнение (1) часто имеет решение, например при $g(x) = -x$. Этот случай интересен тем, что множество функций f, удовлетворяющих уравнению

$$f(f(x)) = -x, \tag{2}$$

— это в *точности* множество функций, графики которых переходят в себя при повороте на 90° относительно начала координат.

Задачи

1. Проверьте это свойство графиков решений уравнения (2).
2. Постройте функцию f со счетным числом точек разрыва, удовлетворяющую уравнению (2) и определенную на всей числовой прямой.

   Указание. Положим $f(0) = 0$, $x_0 = 0$. Выберем последовательность x_k, $k = 1, \ldots$, такую что $x_k > 0$, $x_k \to \infty$. Представим $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ в виде объединения непересекающихся пар полуинтервалов $D_k = (x_{k-1}, x_k] \cup [-x_k, -x_{k-1})$. Пусть $y_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$. Построим кусочно-линейное решение уравнения (2) с областью определения D_k, переставляющее полуинтервалы $(x_{k-1}, y_k]$, $(y_k, x_k]$, $[-x_k, -y_k)$, $[-y_k, -x_{k-1})$.
3. Постройте решение уравнения (2) с областью определения $(-1, 1)$. А также найдите функциональные корни любой степени $f^{(2k)} = -x$ со счетным числом точек разрыва. Проверьте, что всегда $f(0) = 0$, и, кроме того, отображение f биективно.

2. Эффекты четности

Интересные эффекты возникают, когда рассматривается решение функционального уравнения $f(f(x)) = g(x)$, где g — непрерывная монотонно убывающая функция, в классе *функций с конечным (а не счетным) числом точек разрыва.*

На 53-й Московской математической олимпиаде А. Я. Беловым была предложена следующая задача.

Задача. *Существует ли функция f с конечным числом точек разрыва, удовлетворяющая условию $f(f(x)) = -x$, область определения которой есть а) отрезок $[-1, 1]$; б) открытый интервал $(-1, 1)$?*

Ответы в пунктах а) и б) неожиданно оказываются разными. В пункте а) ответ «существует», в пункте б) ответ «нет»!

Напомним, что *орбитой точки* x_0 называется множество

$$\operatorname{orb}(x_0) = \{f^{(n)}(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Аналогично, *орбитой множества* I является семейство множеств

$$\mathrm{orb}(I) = \{\ \{f^{(n)}(I)\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Решение пункта а). Построим функцию $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ с конечным числом точек разрыва, такую, что $f(f(x)) = -x$. Положим $f(0) = 0$, и пусть функция f действует по правилу $1/2 \mapsto -1 \mapsto -1/2 \mapsto 1 \mapsto 1/2$. На оставшихся открытых интервалах функция действует как изображено на рис. 1, т.е. $f((-1/2,0)) = (-1,-1/2)$, $f((0,1/2)) = (1/2,1)$, $f((1/2,1)) = (-1/2,0)$, $f((-1,-1/2)) = (0,1/2)$. Сравните с рис. 2, где изображена орбита точки x. $\square$

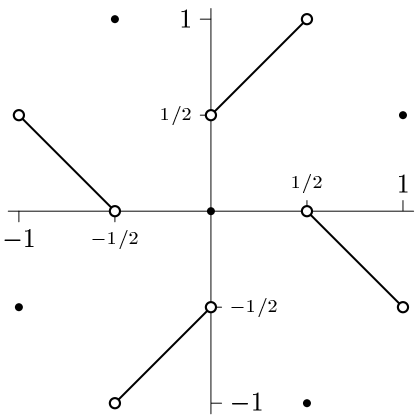

Рис. 1. *График* f

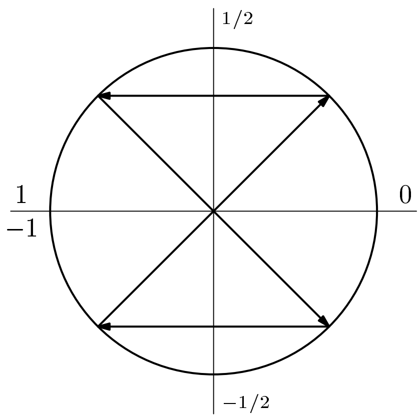

Рис. 2. *Орбита* x

Решение пункта б). Покажем, что *не существует функции* $f\colon (-1,1) \to (-1,1)$ с конечным числом точек разрыва, для которой $f(f(x)) = -x$.

Если такая функция существует, то f биективна, а 0 — единственная неподвижная точка.

В самом деле, $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$; $z = -(-z) = f(f(-z)) = f(s)$, где $s = f(-z)$; $f(x) = x \Rightarrow f(x) = f(f(x)) = -x$, откуда $x = -x$, т.е. $x = 0$.

Покажем, что орбита каждой точки, кроме нуля, содержит *в точности* 4 элемента.

В самом деле, $f(f(f(f(x)))) = -(-x) = x$. Если $x \neq 0$, то, как мы видели, $f(x) \neq x$, $f(f(x)) = -x \neq x$ и если $x = f(f(f(x)))$, то $f(x) = f(f(f(f(x)))) = x$, т.е. $x = 0$.

Рассмотрим множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ точек разрыва функции f и положим

$$A^* := \{0\} \cup \bigcup_{a \in A} \mathrm{orb}(a).$$

Это множество *вполне инвариантно* относительно f, т.е.

$$f(y) \in A^* \iff y \in A^*.$$

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — элементы множества A^*, перечисленные в порядке возрастания. Поскольку орбита любой точки из A^*, кроме нуля, содержит 4 элемента, то

$$m = 4k + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Положим $I_1 = (-1, b_1)$, $I_{m+1} = (b_m, 1)$, и для $2 \leqslant j \leqslant m$ пусть $I_j = (b_{j-1}, b_j)$.

Применяя лемму 2, приведённую ниже, к $I = (-1, 1)$ и $M = A^*$, получаем, что f-орбита каждого интервала I_j состоит из 4 элементов. Поэтому $m + 1 = 4p$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Но это противоречит уравнению (3), т.е. существованию функции f с конечным числом точек разрыва. $\square$

Здесь мы наблюдаем *комбинаторный аспект* задачи. Мы показали, что длина орбиты каждой точки, кроме неподвижной, равна 4 и потому количество интервалов полученного разбиения имеет вид $4k + 1$. Но оказывается, что и длина орбиты каждого интервала тоже равна 4, откуда получаем противоречие.

3. Основная теорема

Естественно возникает более общий вопрос: *дана строго убывающая непрерывная функция g, определенная на всей числовой прямой. Может ли существовать функция f с конечным числом точек разрыва, такая что $f \circ f = g$?*

Ответ на этот вопрос дает

Основная теорема. *Пусть $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго монотонно убывающая непрерывная функция. Тогда не существует итерационного корня второй степени из g с конечным числом точек разрыва.*

Вначале докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть на некотором интервале заданы функции f и g, причем g непрерывна и взаимно однозначна. Пусть f и g коммутируют, т. е. $f \circ g = g \circ f$. Тогда непрерывность функции f в некоторой точке x_0 равносильна ее непрерывности в точке $g(x_0)$.*

Доказательство. Заметим, что из биективности и непрерывности функции g следует биективность и непрерывность функции $g^{(-1)}$. Поэтому достаточно доказать только одну импликацию, а потом заменить g на $g^{(-1)}$.

Пусть f непрерывна в точке x_0. Положим $y_0 = g(x_0)$ и рассмотрим произвольную последовательность (y_n), такую что $y_n \to y_0$. Положим $x_n = g^{(-1)}(y_n)$. Тогда $x_n \to x_0$, поскольку $g^{(-1)}$ — непрерывная функция. Так как f непрерывна в точке x_0, то

$$f(y_n) = f(g(x_n)) = g(f(x_n)) \to \ g(f(x_0)) = f(g(x_0)),$$

что и требовалось. $\square$

Пусть $f \circ f = g$. В этом случае f и g коммутируют, и мы получаем

Следствие 1. *При условии* (1) *орбита точки разрыва функции f под действием g состоит из точек разрыва. Если множество точек разрыва конечно, то и орбита любой из них конечна.*

Следствие 2. *Пусть* $I = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(\mathbb{R})$, *где* g *— строго убывающая функция,* $f^{(s)}(x) = g(x)$. *Если функция* f *имеет конечное множество точек разрыва, то все они принадлежат* I.

Доказательство. Любая точка вне I имеет бесконечную орбиту. Остается применить следствие 1. $\square$

Задача 4. Пусть g — строго убывающая непрерывная функция, $g(\mathbb{R})$ — открытый луч. Тогда для любого $s > 1$ уравнение $f^{(s)}(x) = g(x)$ не имеет решений в классе функций с конечным числом точек разрыва.

Указание. С помощью следствия 2 можно показать, что f непрерывна и убывает на $\mathbb{R} \setminus g(\mathbb{R})$. Если c — граница $g(\mathbb{R})$, то $f(c) \neq c$, иначе было бы $g(c) = c$. По непрерывности $f(c) \in g(\mathbb{R})$, откуда $f(\mathbb{R} \setminus g(\mathbb{R})) \subset g(\mathbb{R})$. В то же время $f(g(\mathbb{R})) = g(f(\mathbb{R})) \subset g(\mathbb{R})$, т. е. $f(\mathbb{R}) \subset g(\mathbb{R})$. Так как f взаимно однозначна, то $g(\mathbb{R}) \subsetneq g(\mathbb{R})$ — противоречие.

Отметим, что отсюда вытекает решение задачи К. Малькова, опубликованной в сборнике «Математическое просвещение», №3, 1999, с. 232, под номером 3.3; решение К. Малькова опубликовано в «Математическом просвещении», №5, 2001, с. 227–228.

Лемма 2. *Пусть* $I \subseteq \mathbb{R}$ *— открытый интервал, а* $f\colon I \to I$ *— биективная функция. Рассмотрим множество точек* $M \subset I$, $|M| = m$, *вполне инвариантное относительно* f. *Пусть* $\{I_j\}_{j=1}^{m+1}$ *— разбиение* I *на открытые интервалы точками множества* M. *Тогда*:

(i) *Если* f *непрерывна на каждом интервале* I_j, *то* $f(I_j) = I_k$ *для некоторого* $1 \leqslant k \leqslant m+1$.

(ii) *Если, дополнительно к* (i), $f \circ f$ *строго убывает, то* $f^{(4)}(I_j) = I_j$ *для всех* $1 \leqslant j \leqslant m+1$.

(iii) *Если, дополнительно к* (i) *и* (ii), *некоторая точка* x_0 *принадлежит* M *и* $f(f(x_0)) = x_0$, *то орбита каждого интервала* I_j *имеет* 4 *элемента.*

Доказательство. (i) Занумеруем интервалы разбиения слева направо и рассмотрим некоторый интервал I_j. Функция f отображает I_j на $f(I_j)$ непрерывно и биективно, поэтому $f(I_j) = (c, d)$ для некоторых $c, d \in I$. Поскольку $I_j \cap M = \varnothing$, а M вполне инвариантно относительно f, то $(c, d) \subseteq I_k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant m+1$. Используя $f^{(-1)}$ и рассуждая аналогично, получаем, что $f(I_j) = I_k$.

(ii) Так как $f^{(2)}$ строго убывает, то $f^{(4)}$ строго возрастает. Имеется *ровно* $j-1$ интервалов слева от I_j. Применяя утверждение (i) к $f^{(4)}$, получаем, что существует *ровно* $j-1$ интервалов слева от $f^{(4)}(I_j)$. Следовательно, $f^{(4)}(I_j) = I_j$.

(iii) Из (ii) следует, что орбита каждого интервала I_j состоит из 1, 2 или 4 элементов. Предположим, что $f(f(I_j)) = I_j$. Так как функция $f \circ f$ строго убывает и непрерывна на I_j, то по теореме о промежуточном значении существует $x \in I_j$, для которого $f(f(x)) = x$. Но строго убывающая функция может иметь лишь одну неподвижную точку. Значит, $x = x_0 \in M$, — противоречие. Следовательно, орбита каждого интервала имеет длину 4. $\square$

Лемма 3. *Пусть g — строго убывающая непрерывная функция и выполнено уравнение $f \circ f = g$. Тогда функции f и g имеют единственную неподвижную точку, причем общую.*

Доказательство. Очевидно, что строго убывающая функция может иметь лишь одну неподвижную точку. Если при этом функция непрерывна, то по теореме о промежуточном значении такая точка x_0 существует. Тогда $f(x_0) = f(g(x_0)) = g(f(x_0))$, т.е. $f(x_0)$ также является неподвижной точкой функции g. Значит, $f(x_0) = x_0$. Обратно, если $f(x) = x$, то $g(x) = f(f(x)) = x$, откуда $x = x_0$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, а $f, g\colon I \to I$ таковы, что $f \circ f = g$, причем g непрерывна и биективна, а f имеет конечное число точек разрыва. Тогда каждая из этих точек либо является неподвижной точкой функции g, либо имеет f-орбиту из 4 элементов.*

Доказательство. Пусть A — множество точек разрыва функции f. Поскольку g и f коммутируют, то по следствию 1 леммы 1 $g(A) \subseteq A$. Так как A конечно, а функция g инъективна, то $g(A) = A$. Пусть $a \in A$ и $g(a) \neq a$. Поскольку $g \circ g$ строго возрастает и $g(g(A)) = A$, то $g(g(a)) = a$, т.е. $f^{(4)}(a) = a$. Так как $g(a) \neq a$, то $f(a) \neq a$ и $f^{(3)}(a) = f^{(-1)}(a) \neq a$, т.е. a имеет орбиту из 4 точек. $\square$

Доказательство основной теоремы. Допустим, что существует функция f, обладающая свойствами из условия теоремы. Очевидно, $g^{(n+1)}(\mathbb{R}) \subseteq g^{(n)}(\mathbb{R})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку g непрерывна и строго монотонна, то $g^{(k)}(\mathbb{R})$ — открытый интервал в $\mathbb{R}$. Положим

$$I = \bigcap_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(\mathbb{R}).$$

Поскольку g непрерывна и строго убывает, то уравнение $g(x) = x$ имеет ровно одно решение x_0. Тогда $g^{(k)}(x_0) = x_0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, откуда $x_0 \in I$, т.е. $I \neq \varnothing$.

Поскольку I — счетное пересечение открытых интервалов, то I связно. При этом $g(I) = I$. Легко видеть, что I не может быть полуинтервалом в силу монотонности g. Предположим, что $I = [a, b]$ для некоторых $a < b$. Так как g строго убывает, то $g(a) = b,\ g(b) = a$. Но концы промежутка не влияют на наши рассуждения, так что можно считать I открытым интервалом.

Пусть множество A_{ext} состоит из всех точек разрыва функции f и точки x_0. Из следствия 2 леммы 1 вытекает, что $A_{\text{ext}} \subset I$. Применив леммы 3 и 4 к $f, g\colon I \to I$, получаем, что множество A_{ext} состоит из $4p + 1$ элементов для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Соответствующее разбиение интервала I должно состоять из $4p + 2$ открытых интервалов. Применив к I лемму 2(iii) с $M = A_{\text{ext}}$, получаем, что орбита каждого интервала I_j состоит из четырех элементов и потому число интервалов должно делиться на 4, тогда как оно имеет вид $4p+2$. Таким образом, предположение о существовании функции f ведет к противоречию. $\square$

4. Попытка дальнейшего обобщения

Естественно попытаться обобщить основную теорему. А что если функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонно убывает, но не обязательно непрерывна? Ясно, что если g имеет бесконечное число точек разрыва, то функциональный корень f, для которого $f \circ f = g$, тоже имеет бесконечное число точек разрыва. Поэтому потребуем, чтобы *функция g имела конечное число точек разрыва.*

Оказывается, в этом случае уравнение (1) может иметь решения, определенные на всей числовой прямой.

Предложение 1. *Существует открытый интервал $I \subset \mathbb{R}$ и функции $f, g\colon I \to I$ с конечным числом точек разрыва, такие что g строго убывает и $f(f(x)) = g(x)$ для всех $x \in I$.*

Доказательство. Здесь мы начинаем не с выбора функции g с последующим построением f, а с построения самой функции f. Для облегчения вычислений рассмотрим $I = (-16, 16)$, вместо $(-1, 1)$.

$$\text{Пусть} \quad f : (-16,16) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2 & \text{при } x \in (-16,-8), \\ -\dfrac{x}{2} + 10 & \text{при } x \in (-8,0), \\ -\dfrac{x}{2} - 10 & \text{при } x \in (0,8), \\ \dfrac{x}{2} - 2 & \text{при } x \in (8,16), \\ -2 & \text{при } x = -8, \\ -10 & \text{при } x = 0, \\ 2 & \text{при } x = 8. \end{cases}$$

Легко проверить, что f имеет 3 точки разрыва и что $g := f \circ f$ строго убывает и тоже имеет 3 точки разрыва. Чтобы лучше увидеть получившуюся картину, см. рис. 3 и рис. 4. $\square$

Замечание 1. Отметим, что график функции f симметричен (за исключением одной точки) относительно поворота плоскости на 180° (см. также рис. 1).

Благодарности

Мы хотим поблагодарить Алексея Белова и Гётца Пфандера, которые познакомили нас с функциональным уравнением $f \circ f = -\mathrm{id}$, а также Александра Буфетова за полезные замечания и Бориса Френкина за редакционную правку.

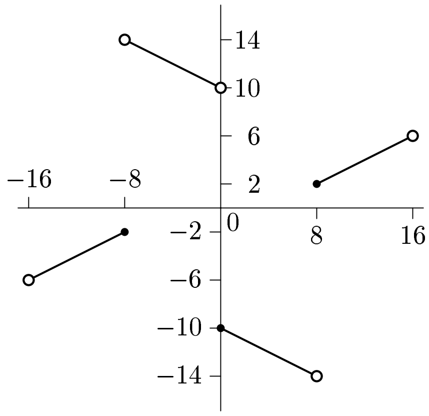

Рис. 3. *График f*

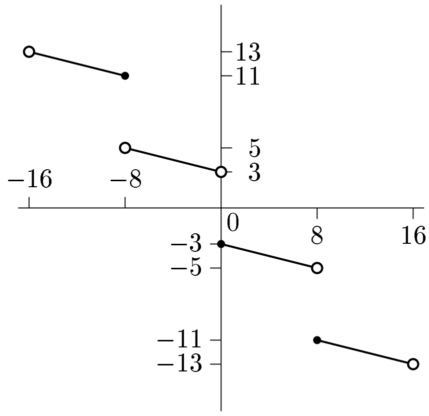

Рис. 4. *График g*

Мы особенно благодарны Алексею Белову, который поддержал наши попытки обобщить это функциональное уравнение.

Список литературы

[1] Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L.-S. *Periodic points of one-dimensional maps* // Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 819. Springer Verlag, Berlin, 1980. P. 18–34.

[2] Katok A., Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.

[3] Kuczma M., Choczewski B., Ger R. *Iterative Functional Equations*. Cambridge University Press, 1990.

[4] Misiurewicz M., Nitecki Z. *Combinatorial Patterns for Maps of the Interval* // Mem. Amer. Math. Soc., 1990. Vol. 456.

[5] Misiurewicz M. *Formalism for studying periodic orbits of one dimensional maps* // European Conference on Iteration Theory (ECIT 87), World Scientific, Singapore, 1989. P. 1–7.

[6] Stefan P. *A Theorem of Sharkovski on the Existence of Periodic Orbits of Continous Endomorphism of the Real Line* // Commun. math. Phys., 1977. Vol. 54. P. 237–248

[7] Targonski G. *Topics in Iteration Theory*. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1981.

[8] Targonski G. *Progress of iteration theory since* 1981 // Aequationes Math., 1995. Vol. 50. P. 50–72.

[9] Шарковский А. Н. *Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя* // Укр. матем. ж., 1964. Т. 16, №1. С. 61–71.

[10] *Одномерная динамика и теорема Шарковского* // X летняя конференция турнира городов. М.: МЦНМО, 1999. С. 21–25, 79–91.

Влад Викол, Международный Университет Бремен;
28759 Bremen, Germany;
e-mail: v.vicol@iu-bremen.de

Апостол Апостолов, Международный Университет Бремен;
28759 Bremen, Germany;
e-mail: a.apostolov@iu-bremen.de