A. S. Schwarz, On the definition of superspace, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 1, 37–42

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 1
июль, 1984

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СУПЕРПРОСТРАНСТВА

Шварц А. С.

Указывается математическая формализация используемых в физике понятий суперматематики на языке, не использующем теории пучков.

Ф. А. Березин был первым, кто понял, что наряду с обычными анализом и алгеброй существуют аналогичные теории, в которых роль действительных чисел играют антикоммутирующие величины. Он показал, что при изучении метода вторичного квантования полезно использовать дифференцирование и интегрирование функций от антикоммутирующих переменных [1]. Далее, в статье [2] было предложено понятие групп с антикоммутирующими параметрами и введено соответствующее понятие алгебр Ли (в настоящее время эти объекты носят название супергрупп Ли и супералгебр Ли). Широкое применение в физике эти понятия получили после открытия симметрий, перемешивающих бозоны и фермионы (суперсимметрий) [3–5]. В работе [6] было показано, что при изучении таких теорий очень удобно рассматривать поле на пространствах, координатами в которых служат как коммутирующие, так и антикоммутирующие величины (на суперпространствах). Физические работы стимулировали математическое изучение соответствующих вопросов. В частности, в [7] было введено понятие супермногообразия, неявным образом это понятие возникло и в физических работах. Данное в [7] определение супермногообразия основано на теории пучков и трудно воспринимается физиками. Цель настоящей статьи — дать определения супермногообразия и связанных с ним понятий, которые, с одной стороны, были бы математически строгими, а с другой стороны,— максимально близкими к интуитивному представлению физика. Можно сказать, что предлагаемые определения являются математической формализацией понятий, используемых в физике.

Основная идея этих определений содержится в [8].

С точки зрения физика, (p, q)-мерное суперпространство $\mathbb{R}^{p,q}$ — это пространство, в котором точка имеет p четных координат и q нечетных координат. Четные координаты рассматриваются как четные элементы грассмановой алгебры, а нечетные координаты — как нечетные элементы грассмановой алгебры. У математика это определение сразу вызывает вопрос: какой именно грассмановой алгебре принадлежат координаты точки? Физик должен ответить, что грассманова алгебра в этом определении не фиксируется, она произвольна. Тогда математик приходит к выводу, что есть не одно (p, q)-мерное суперпространство, а бесконечное множество суперпространств $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$, определяемых различными грассмановыми алгебрами Λ (точка в $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$ определяется строкой из p четных и q нечетных элементов алгебры Λ). Физик, вероятно, не согласится с этим, объяснив, что все пространства $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$ принадлежат одному и тому же суперпространству. Теперь осталось сделать последний шаг: разрешение спора между математиком и физиком состоит в том, что суперпространство $\mathbb{R}^{p,q}$ следует рассматривать как совокупность всех пространств $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$, но эти пространства нужно считать связанными между собой. Именно следует заметить, что по всякому сохраняющему четность гомоморфизму ρ грассмановой алгебры Λ в грассманову алгебру Λ' естественным образом строится отображение $\tilde{\rho}$ пространства $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$ в $\mathbb{R}_{\Lambda'}^{p,q}$. Обобщая эту схему, мы введем общее понятие суперпространства, на основе которого далее будут определены понятие супермногообразия, супергруппы Ли и т. д. Отметим, что в работе [9] предложен несколько иной подход. В ней рассматриваются пространства $\mathbb{R}_{\Lambda}^{p,q}$ при фиксированном Λ, но вся теория строится таким образом, чтобы от выбора Λ ничего не зависело.

Будем говорить, что задано суперпространство $\mathscr{E}$, если каждой грассмановой алгебре Λ сопоставлено множество $\mathscr{E}_{\Lambda}$ (множество Λ-точек суперпространства $\mathscr{E}$) и каждому сохраняющему четность гомоморфизму ρ грассмановой алгебры Λ в грассманову алгебру Λ' сопоставлено отображение множеств $\tilde{\rho}$: $\mathscr{E}_{\Lambda}\to\mathscr{E}_{\Lambda'}$ таким образом, что произведению гомоморфизмов $\rho_1\rho_2$ отвечает произведение отображений $\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2$ (т. е. $\widetilde{\rho_1\rho_2}=\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2$). Пространство $\mathscr{E}_0$, отвечающее грассмановой алгебре $\Lambda=\mathbb{R}$ (грассмановой алгебре, имеющей нуль образующих), называется подстилающим пространством суперпространства $\mathscr{E}$. Для всякой грассмановой алгебры Λ определен гомоморфизм m: $\Lambda\to\mathbb{R}$, сопоставляющий элементу алгебры его числовую часть. Отвечающее этому гомоморфизму отображение $\tilde{m}$ сопоставляет каждой Λ-точке $x\in\mathscr{E}_{\Lambda}$ точку $\tilde{m}(x)\in\mathscr{E}_0$ («числовую часть» Λ-точки). Данное только что определение суперпространства является слишком общим для построения содержательной теории. Для того чтобы построить такую теорию, нужно считать, что в множествах $\mathscr{E}_{\Lambda}$ введена некоторая дополнительная структура, и наложить соответствующие условия на отображения $\tilde{\rho}$. Например, можно определить понятие супергруппы, предположив, что все множества $\mathscr{E}_{\Lambda}$ являются группами, а все отображения $\tilde{\rho}$ — гомоморфизмами; тогда естественно называть суперпространство $\mathscr{E}$ супергруппой.

Мы сейчас приведем несколько примеров суперпространств в смысле данного выше общего определения. Далее мы укажем определения линейного суперпространства, алгебры Ли, супермногообразия, супергруппы Ли и покажем, в каких примерах можно ввести соответствующие структуры.

1. Пусть M — $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство, т. е. линейное пространство, представленное в виде прямой суммы $M_0\oplus M_1$, где M_0 называется четным подпространством, а M_1 — нечетным. Определим множество Λ-точек $\mathscr{M}_{\Lambda}$ как совокупность формальных линейных комбинаций $\Sigma a_ie_i+\Sigma b_jf_j$, где $e_i\in M_0$, $f_j\in M_1$, a_i — четные, b_j — нечетные элементы алгебры Λ (при этом считается, что $(a'+a'')m=a'm+a''m$, $a(m'+m'')=am'+am''$, $a, a', a''\in\Lambda$; $m, m', m''\in M$). Отображение $\tilde{\rho}$ переводит точку $\Sigma a_ie_i+\Sigma b_jf_j$ в

$\Sigma\rho(a_i)e_i+\Sigma\rho(b_j)f_j$. Совокупность множеств $\mathscr{M}_\Lambda$ и отображений $\tilde{\rho}$ определяет суперпространство $\mathscr{M}$, которое отвечает $\mathbb{Z}_2$-градуированному пространству M. В частном случае, когда M_0 — p-мерное, M_1 — q-мерное линейное пространство, суперпространство $\mathscr{M}$ естественно отождествляется с суперпространством $\mathbb{R}^{p,q}$.

Примером бесконечномерного суперпространства является суперпространство, построенное по $\mathbb{Z}_2$-градуированному пространству $B_{p,q}$, элементами которого являются выражения вида

$$\sum_{i=0}^{q}\sum_{1\leqslant\alpha_1<\ldots<\alpha_i\leqslant q} f_{\alpha_1\ldots\alpha_i}(x^1,\ldots,x^p)\xi^{\alpha_1}\ldots\xi^{\alpha_i}, \tag{1}$$

где $f_{\alpha_1\ldots\alpha_i}$ — бесконечно дифференцируемые функции действительных переменных $x^1,\ldots,x^p$, а $\xi^1,\ldots,\xi^q$ — образующие грассмановой алгебры Λ_q (выражение вида (1) считается четным, если все слагаемые в (1) содержат четное число образующих ξ, и нечетным, если число ξ нечетно). Выражения вида (1) образуют алгебру, которую можно рассматривать как алгебру с p коммутирующими и q антикоммутирующими образующими (такие алгебры естественно называть алгебрами Березина). Важно заметить, что выражение (1) сохраняет смысл, если вместо действительных чисел $x^1,\ldots,x^p$ подставить произвольные четные элементы алгебры Грассмана Λ, а вместо $\xi^1,\ldots,\xi^q$ — произвольные нечетные элементы алгебры Λ (для того чтобы придать смысл $f_{\alpha_1\ldots\alpha_i}(x^1,\ldots,x^p)$, если x^i — четные элементы алгебры Грассмана, следует воспользоваться разложением в ряд Тейлора по нильпотентным частям элементов x^i). Сделанное замечание позволяет рассматривать выражение вида (1) как функции на суперпространстве $\mathbb{R}^{p,q}$. Линейные комбинации выражений вида (1) с коэффициентами из алгебры Грассмана Λ будем называть Λ-функциями на $\mathbb{R}^{p,q}$. Множество Λ-точек суперпространства, отвечающего $\mathbb{Z}_2$-градуированному пространству $B_{p,q}$, можно отождествить с множеством четных Λ-функций на суперпространстве $\mathbb{R}^{p,q}$.

2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{p,q}_\Lambda$ множество A_Λ, состоящее из точек, выделяемых уравнениями

$$\begin{aligned}
&f_1(x^1,\ldots,x^p,\xi^1,\ldots,\xi^q)=0,\\
&\vdots\\
&f_r(x^1,\ldots,x^p,\xi^1,\ldots,\xi^q)=0,\\
&g_1(x^1,\ldots,x^p,\xi^1,\ldots,\xi^q)=0,\\
&\vdots\\
&g_s(x^1,\ldots,x^p,\xi^1,\ldots,\xi^q)=0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где x^i — четные, ξ^j — нечетные элементы грассмановой алгебры, $f_1,\ldots,f_r$ — четные, а $g_1,\ldots,g_s$ — нечетные функции на суперпространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (напомним, что функция на $\mathbb{R}^{p,q}$ определяется выражением вида (1)). Легко видеть, что отображение $\tilde{\rho}$ множества $\mathbb{R}^{p,q}_\Lambda$ в $\mathbb{R}^{p,q}_{\Lambda'}$, построенное по гомоморфизму ρ, переводит множество A_Λ в $A_{\Lambda'}$. Поэтому множество A_Λ вместе с отображениями $\tilde{\rho}$ определяет суперпространство $\mathscr{A}$.

3. Приведенная только что конструкция суперпространства $\mathscr{A}$ является частным случаем более общей конструкции. Именно, если для супер-

пространства $\mathscr{E}$ в каждом из множеств $\mathscr{E}_\Lambda$ выделено подмножество $\mathscr{E}_\Lambda'$, удовлетворяющее условию $\tilde{\rho}(\mathscr{E}_\Lambda')\subset\mathscr{E}_{\Lambda'}'$ для каждого из гомоморфизмов $\rho:\Lambda\to\Lambda'$, то множество $\mathscr{E}_\Lambda'$ вместе с отображениями $\tilde{\rho}_\Lambda$ образует суперпространство, которое естественно назвать подсуперпространством суперпространства $\mathscr{E}$. В частности, если $\mathscr{U}\subset\mathscr{E}_0$ — подмножество подстилающего пространства $\mathscr{E}_0$, рассмотрим множества $\mathscr{E}_\Lambda{}^{\mathscr{U}}$, состоящие из таких точек $x\in\mathscr{E}_\Lambda$, что $\tilde{m}(x)\in\mathscr{U}$ для гомоморфизма m: $\Lambda\to\mathbb{R}$. Эти множества определяют суперпространство $\mathscr{E}^{\mathscr{U}}$, которое называется подсуперпространством, лежащим над $\mathscr{U}$. Если $\mathscr{E}=\mathbb{R}^{p,q}$, а $\mathscr{U}$ — область в $\mathbb{R}^{p,0}$, то $\mathscr{E}^{\mathscr{U}}$ называется суперобластью (иначе можно сказать, что суперобласть $(\mathbb{R}^{p,q})^{\mathscr{U}}$ состоит из точек, числовые части которых принадлежат $\mathscr{U}$).

4. Рассмотрим множество $\mathscr{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$, состоящее из блочных матриц

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A и D состоят из четных элементов алгебры Λ и имеют размерности $p\times p'$ и $q\times q'$, а B и C состоят из нечетных элементов алгебры Λ и имеют размерности $q\times p'$ и $p\times q'$. Множества $\mathscr{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$ определяют суперпространство $\mathscr{M}^{p,q|p',q'}$. Это пространство изоморфно суперпространству $\mathbb{R}^{pp'+qq',\,qp'+pq'}$. В случае, если $p=p'$, $q=q'$, матрицы из $\mathscr{M}_\Lambda^{p,q|p',q'}$ можно перемножать по обычным правилам. Множество обратимых элементов из $\mathscr{M}_\Lambda^{p,q|p,q}$ обозначим $GL_\Lambda(p,\ q)$. Это множество образует группу. Легко проверить, что $GL_\Lambda(p,\ q)$ состоит из матриц, числовые части которых обратимы. Это позволяет рассматривать суперпростанство $GL(p,\ q)$ как суперобласть над областью $GL(p)\times GL(q)\subset\mathscr{M}_0^{p,q|p,q}$.

Отметим, что множества $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ можно рассматривать как линейные пространства. Более того элементы из $\mathbb{R}^{p,q}$ можно умножать не только на числа, но и на четные элементы грассмановой алгебры. Иными словами, $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ можно рассматривать как Λ_0-модуль (через Λ_0, как обычно, обозначено кольцо четных элементов алгебры Λ). Поэтому мы будем называть суперпространство $\mathscr{E}$ линейным суперпространством, если все множества $\mathscr{E}_\Lambda$ являются Λ_0-модулями, а отображения $\tilde{\rho}$ — гомоморфизмами Λ_0-модулей. Условиям этого определения удовлетворяют не только суперпространства $\mathbb{R}^{p,q}$, но и более общие суперпространства $\mathscr{M}$, построенные по $\mathbb{Z}_2$-градуированному суперпространству.

Линейное суперпространство $\mathscr{E}$ называется супералгеброй Ли, если каждое из множеств $\mathscr{E}_\Lambda$ является алгеброй Ли, а отображения $\tilde{\rho}$ — гомоморфизмами алгебр Ли (точнее, требуется, чтобы $\mathscr{E}_\Lambda$ было Λ_0-алгеброй Ли, т. е. чтобы выполнялось требование $[\lambda a,\ b]=\lambda[a,\ b]$ для любого $\lambda\in\Lambda_0$). Суперпространство $\mathscr{M}^{p,q|p,q}$ является супералгеброй Ли относительно обычного коммутатора матриц.

Пусть в $\mathbb{Z}_2$-градуированном пространстве M введена структура $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Ли, т. е. введена операция $[\ ,\}$, удовлетворяющая модифицированному тождеству Якоби. Тогда соответствующее линейное суперпространство $\mathscr{M}$ естественно превращается в супералгебру Ли. Можно проверить, что справедливо и обратное утверждение: всякая структура супералгебры Ли в линейном суперпространстве $\mathscr{M}$ порождается с помощью этой конструкции.

Если все множества $\mathscr{E}_\Lambda$ являются группами, а отображения $\tilde{\rho}$ — гомоморфизмами групп, то суперпространство $\mathscr{E}$ называется супергруппой. Простейшим примером супергруппы является описанное выше суперпространство $GL(p, q)$ (напомним, что, как мы уже говорили, множества $GL_\Lambda(p, q)$ снабжены структурой группы).

Перед тем как определять понятие гладкого супермногообразия, вспомним, что для линейного суперпространства мы требовали, чтобы в множествах $\mathscr{E}_\Lambda$ была определена структура Λ_0-модуля. Поэтому для определения гладкого супермногообразия недостаточно требовать, чтобы $\mathscr{E}_\Lambda$ были гладкими многообразиями. Мы потребуем еще, чтобы каждое из касательных пространств к $\mathscr{E}_\Lambda$ было снабжено структурой Λ_0-модуля. Отображения $\tilde{\rho}$ должны быть, конечно, гладкими. Однако на них нужно наложить еще дополнительное требование, чтобы порождаемые ими отображения касательных пространств были гомоморфизмами Λ_0-модулей.

Мы введем понятие Λ_0-многообразия как такого гладкого многообразия, каждое из касательных пространств к которому снабжено структурой Λ_0-модуля. Гладкое отображение Λ_0-многообразий будем называть Λ_0-гладким, если порождаемые им отображения касательных пространств являются гомоморфизмами Λ_0-модулей. Пользуясь этим понятием, можно определить понятие гладкого супермногообразия как суперпространства, для которого $\mathscr{E}_\Lambda$ являются Λ_0-многообразиями, а $\tilde{\rho}$ — Λ_0-гладкими отображениями Λ_0-многообразий.

Примером гладкого супермногообразия может служить линейное суперпространство, а также суперпространство, выделяемое уравнениями (2) в случае, если числовые части матриц $(\partial f_i/\partial x^k)$ и $(\partial g_j/\partial \xi^l)$ имеют соответственно ранги r и s. Всякое супермногообразие в обычном смысле [10] может рассматриваться как гладкое супермногообразие в смысле данного выше определения. Естественным образом определяется действие супергруппы $\mathscr{G}$ на суперпространстве $\mathscr{E}$: при каждом Λ группа $\mathscr{G}_\Lambda$ должна действовать на $\mathscr{E}_\Lambda$, и эти действия при разных Λ должны быть согласованы с помощью отображений $\tilde{\rho}$ (если φ_g — преобразование пространства $\mathscr{E}_\Lambda$, отвечающее элементу $g \in \mathscr{G}_\Lambda$, то $\tilde{\rho}\varphi_g = \varphi_{\tilde{\rho}(g)}$). Пространство орбит (фактор-пространство) $\mathscr{E}/\mathscr{G}$ действия супергруппы $\mathscr{G}$ в суперпространстве $\mathscr{E}$ определяется с помощью множеств $\mathscr{E}_\Lambda/\mathscr{G}_\Lambda$ (отображение $\tilde{\rho}$ строится естественным образом).

Отметим, что определение суперпространства, указанное выше, является существенно более общим, чем стандартное. Это, в частности, сказывается в том, что, пользуясь стандартными понятиями, вообще говоря, нельзя даже в простых ситуациях определить, что такое фактор-пространство $\mathscr{E}/\mathscr{G}$. Рассмотрим простой пример. Пусть $\mathscr{G}$ — супергруппа $GL(1, 0)$, действующая на суперпространстве $\mathscr{E} = \mathbb{R}^{0,q}$ (множество $GL_\Lambda(1, 0)$ состоит из обратимых четных элементов алгебры Λ; каждому такому элементу λ сопоставляется преобразование множества $\mathbb{R}^{0,q}_\Lambda$, состоящее в умножении всех координат на λ). Легко проверить, что фактор-пространство $\mathbb{R}^{0,q}/$ $/GL(1, 0)$ не является супермногообразием в смысле настоящей статьи и тем более не является супермногообразием в стандартном смысле. Пример гладкого супермногообразия, не являющегося супермногообразием в обычном смысле, можно построить, слегка модифицировав определение суперпространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Именно следует рассмотреть в $\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}$ подмножество $\widetilde{\mathbb{R}_\Lambda^{p,q}}$, состоящее из точек, у которых все координаты нильпотентны. Эти подмножества определяют суперпространство $\widetilde{\mathbb{R}^{p,q}}$, которое можно рассматривать как линейное суперпространство (другими словами, можно определить $\widetilde{\mathbb{R}^{p,q}}$ как подсуперпространство $\mathbb{R}^{p,q}$, лежащее над началом координат в подстилающем многообразии $\mathbb{R}^p$).

Будем называть гладкое супермногообразие $\mathscr{E}$ (p, q)-мерным супермногообразием, если для каждой точки подстилающего многообразия $\mathscr{E}_0$ можно найти такую окрестность $\mathscr{U}$, что гладкое многообразие $\mathscr{E}^{\mathscr{U}}$, лежащее над $\mathscr{U}$, эквивалентно суперобласти. В работе А. А. Воронова [11] доказано, что определенное только что понятие (p, q)-мерного супермногообразия эквивалентно стандартному.

Литература

[1] *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М., Наука, 1965.
[2] *Березин Ф. А., Кац Г. И.*– Матем. сб., 1970, *82*, № 3, 343.
[3] *Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.*– Письма в ЖЭТФ, 1971, *13*, 452.
[4] *Volkov D. B., Akulov V. P.*– Phys. Lett., 1973, *46B*, 109.
[5] *Wess J., Zumino B.*– Nucl. Phys., 1974, *B70*, 39.
[6] *Salam A., Strathdee J.*– Phys. Rev., 1975, *11D*, 1521.
[7] *Березин Ф. А., Лейтес Д. А.*– ДАН СССР, 1975, *224*, № 3, 505.
[8] *Schwarz A. S.*– Commun. Math. Phys., 1982, *87*, 37.
[9] *Волович И. В.*– ДАН СССР, 1983, *269*, 524.
[10] *Воронов А. А.*– ТМФ, *60*, № 1, 43–48.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию 5.X.1983 г.

TO THE DEFINITION OF SUPERSPACE

Schwarz A. S.

A mathematical formalisation of notions of the supermathematics used in physics is implemented in the framework which does not use any elements of the theory of sheaves.