В. А. Гейлер, Двумерный оператор Шрёдингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса, *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 3, 1–48

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 3

ДВУМЕРНЫЙ ОПЕРАТОР ШРЁДИНГЕРА С ОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ И ЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ НУЛЕВОГО РАДИУСА

В. А. Гейлер

В обзоре рассматриваются оператор Шрёдингера в $L^2(\mathbb{R}^2)$ вида $H_0 = \frac{1}{2}(i\nabla + \mathbf{A})^2$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости $\mathbb{R}^2$, и его возмущения $H = H_0 + V$ двоякопериодическими потенциалами V. Дано подробное изложение аналога теории Флоке–Блоха для H (магнитно-блоховской теории) на языке разложения H в прямой интеграл диагональных операторов с дискретным спектром; слои соответствующего разложения пространства состояний $L^2(\mathbb{R}^2)$ являются носителями попарно неэквивалентных примарных представлений группы магнитных трансляций. Рассмотрена явнорешаемая модель, в которой V — сумма потенциалов нулевого радиуса; в этом случае подробно изучен спектр H при условии рациональности потока магнитного поля через элементарную ячейку решетки периодов потенциала V. Кратко изложены физические мотивировки обсуждаемых результатов.

Оглавление

Ключевые слова: оператор Шрёдингера с магнитным полем, потенциалы нулевого радиуса, периодические потенциалы, группа магнитных трансляций, магнитно-блоховские волны.

Введение

В последние годы резко возрос интерес к изучению операторов Шрёдингера, описывающих движение двумерного электрона в однородном магнитном поле и периодическом или случайном потенциале. Главный стимул здесь — приложения к теории квантового эффекта Холла [1]. Впрочем, и для трехмерного электрона основные квантовые эффекты, обусловленные наличием постоянного и однородного магнитного поля, носят по сути дела двумерный характер. Незадолго до открытия К. фон Клитцинга [1] С. П. Новиковым с сотрудниками был выполнен ряд глубоких исследований по оператору Шрёдингера с периодическим (в частности, однородным) магнитным полем, проливающих новый свет как на аналитические, так и на топологические и теоретико-групповые аспекты проблемы. Упомянутые исследования имели своим источником работы по обратным задачам теории рассеяния; их итог подведен в обзоре [2] (см. также [3]). В значительной мере эти исследования стимулировала статья [4]; последнее обстоятельство в какой-то степени служит оправданию обильному цитированию в обзоре физических работ. Здесь же следует упомянуть статьи, связанные с так называемой формулой $TKNN$ для холловской проводимости [5, 6]; в одной из последних статей на эту тему [7] можно найти и подробную библиографию.

Теоретико-групповой анализ периодического оператора Шрёдингера с постоянным и однородным магнитным полем был впервые проведен Брауном и Заком [8, 9], которые построили для этого класса операторов аналог теории Блоха. Несмотря на вышедшие с тех пор многочисленные статьи разных авторов по магнитно-блоховской теории, в литературе отсутствует последовательное и сколько-нибудь подробное изложение этой теории на языке разложения в прямой интеграл гильбертовых пространств. В то же время такой подход стал стандартным в задачах, связанных с периодическим оператором Шрёдингера (см. [10], т.4), так как сводит эти задачи к изучению операторов с дискретным спектром. Блоховская теория (или теория Флоке) перенесена и на широкий класс периодических и почти-периодических псевдодифференциальных операторов [11, 12].

В связи с этим в первом параграфе обзора дано систематическое изложение магнитно-блоховской теории на языке разложений в прямой интеграл гильбертовых пространств, в которых представление группы магнитных трансляций оказывается кратным неприводимым представлениям. Изложенная теория является аналогом прямого разложения периодического оператора Шрёдингера в p-представлении и основана на применении так называемого kq-преобразования Зака [13]. Аналог прямого разложения в x-представлении неявно использован в [5], в явном виде он приведен в [14], но без подробного рассмотрения связей с представлением группы магнитных трансляций. Удобство принятого в обзоре подхода состоит в том, что при его реализации как невозмущенный оператор Шрёдингера с магнитным полем, так и операторы магнитных трансляций имеют в слоях чрезвычайно простой вид; при этом слои не зависят от квазиимпульса. Изложение магнитно-блоховской теории на языке прямых интегралов позволяет понять и природу некоторых недоразумений, возникающих в физической литературе по поводу классификации и подсчета числа состояний в случае рационального потока магнитного поля (см. обсуждение этих вопросов в [15, 16], там же имеется подробная библиография).

Вторая часть обзора посвящена изложению одной явнорешаемой модели для магнитно-блоховского электрона, а именно двумерному оператору Шрёдингера с однородным магнитным полем, возмущенному периодическим точечным потенциалом; в этом случае, как и в известной модели Кронига–Пенни (см. [10, 21] и др.), выводится явный вид дисперсионного уравнения, определяющего спектр. На физическом уровне строгости соответствующие результаты были изложены в [17, 18]. Для корректного описания точечных потенциалов (потенциалов нулевого радиуса) в настоящем обзоре используется теория расширений симметричных операторов, этот подход к такого рода задачам восходит к статье Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева [19]. В последние годы Б. С. Павловым с сотрудниками открыты новые классы явнорешаемых моделей, связанные с теорией расширений; потенциалы нулевого радиуса являются лишь частным случаем таких моделей. Соответствующие результаты и техника приведены в обзоре [20]. Заметим, что практически полное изложение работ зарубежных авторов по явнорешаемым моделям с точечными потенциалами содержит монография [21]. В книге [22] собран богатый материал о физических проблемах, решаемых методом потенциалов нулевого радиуса; в частности, численные расчеты, проведенные с использованием этого метода в ряде случаев, приводят к хорошему согласию с экспериментом.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Б. С. Павлову, по инициативе которого появился этот обзор, ему же принадлежат и многие ценные замечания. Обзор был написан во время стажировки в лаборатории математического анализа ЛОМИ, коллективу которой я искренне признателен за предоставленную возможность для работы. За обсуждение физических аспектов приведенных в обзоре результатов я благодарен В. А. Маргулису. Замечания рецензента способствовали более ясному изложению ряда вопросов, за что я ему весьма благодарен.

§ 0. Основные обозначения

На протяжении всей статьи мы придерживаемся следующих обозначений:

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}' = xy' - yx' (\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^2)$ — стандартная симплектическая форма в $\mathbb{R}^2$.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — некоторый (не обязательно ортонормальный) базис в $\mathbb{R}^2$. Для векторов $\mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, будем обозначать:

v_x, v_y — координаты в стандартном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$;

v_1, v_2 — координаты в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

$\Lambda = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$ — решетка, натянутая на векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

$Q_\Lambda = \{t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 : 0 \leqslant t_1, t_2 < 1\}$ — элементарная ячейка решетки Λ.

$S_\Lambda = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ — ориентированная площадь ячейки Q_Λ. Заметим, что для любых $\mathbf{v},\mathbf{v}'$ из $\mathbb{R}^2$ имеем $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = S_\Lambda(v_1 v_2' - v_2 v_1')$.

K — *конечное* подмножество Q_Λ, содержащее 0; $|\mathrm{K}|$ — число элементов K.

$\Gamma = \Lambda + \mathrm{K}$ — кристаллическая решетка (кристалл); Λ — это решетка Браве для Γ, элементы Γ — атомы или узлы решетки. Если $|\mathrm{K}| = n$, то решетку Γ называют n-атомной. Заметим, что каждый элемент $\boldsymbol{\gamma}, \gamma \in \Gamma$, однозначно представим в виде $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varkappa}$ ($\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, $\boldsymbol{\varkappa} \in \mathrm{K}$). Для координат вектора $\varphi \in l^2(\Gamma)$ в стандартном базисе будем предпочитать запись $\varphi(\gamma)(\gamma \in \Gamma)$ индексной записи φ_γ. Если A — линейный ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$, то элементы его матрицы в стандартном базисе будут обозначаться $A(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}')$; таким образом, $(A\varphi)(\boldsymbol{\gamma}) = \sum\limits_{\gamma' \in \Gamma} A(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}')\varphi(\boldsymbol{\gamma}')$.

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ обозначает тензорное произведение гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

N/M, где N, $M \in \mathbb{N}$, далее всегда обозначает некоторую *несократимую* дробь. Если $\eta = N/M$, то $\mathbb{T}^2_\eta$ обозначает тор

$$\mathbb{T}^2_\eta = [0, M^{-1}) \times [0,1); \quad \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2_1 = [0,1) \times [0,1).$$

$\int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \mathcal{H}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}$ — прямой интеграл гильбертовых пространств $\mathcal{H}(\mathbf{p})\,(\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2_\eta)$. Мы будем иметь дело только со случаем постоянных слоев: $\mathcal{H}(\mathbf{p}) \equiv \mathcal{H}$. В этом случае

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \mathcal{H}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = L^2(\mathbb{T}^2_\eta) \otimes \mathcal{H}.$$

Наиболее часто будут встречаться прямые интегралы со следующими слоями, не зависящими от $\mathbf{p}$:

$$\mathcal{H}_\eta = \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N;$$
$$\tilde{\mathcal{H}}_\eta \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N});$$
$$\mathcal{H}^\Gamma_\eta = \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M \otimes l^2(\mathrm{K}) \simeq \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^{|\mathrm{K}|}.$$

Координаты элемента φ слоя в каждом из этих случаев будем обозначать соответственно так:

$$\varphi(j,k) \quad (j = 0, \dots, M-1; k = 0, \dots, N-1);$$
$$\varphi(j,k,l) \quad (j = 0, \dots, M-1; k = 0, \dots, N-1; l = 0, 1, \dots);$$
$$\varphi(j, m, \boldsymbol{\varkappa})(j, m = 0, \dots, M-1; \boldsymbol{\varkappa} \in \mathrm{K}).$$

Для обозначения зависимости от аргументов элемента $\varphi, \varphi \in \int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \mathcal{H}_\eta d\mathbf{p}$, используется запись $\varphi(\mathbf{p}; j, k)$ или $\varphi(p_1, p_2; j, k)$ аналогичная запись используется и в случае слоев $\tilde{\mathcal{H}}_\eta$ и $\mathcal{H}^\Gamma_\eta$. Матричные элементы линейного непрерывного оператора A в $\tilde{\mathcal{H}}_\eta$ обозначаем $A(j,k,l; j',k',l')$ и аналогично в случае слоев $\mathcal{H}_\eta$ и $\mathcal{H}^\Gamma_\eta$. Если A — линейный непрерывный оператор в $\int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \tilde{\mathcal{H}}_\eta d\mathbf{p}$, разложенный в прямой интеграл операторов в слоях

$$A = \int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} A(\mathbf{p})\, d\mathbf{p},$$

то элементы матрицы $A(\mathbf{p})$ обозначаем $A(\mathbf{p}; j, k, l; j', k', l')$. Аналогично поступаем в случае слоев $\mathcal{H}_\eta$ и $\mathcal{H}_\eta^\Gamma$.

$I_\mathcal{H}$ обозначает как тождественный оператор в пространстве $\mathcal{H}$, так и единичное представление какой-либо группы в $\mathcal{H}$.

z^* (но не $\bar{z}$!) всегда обозначает комплексно сопряженное к z число.

$\sigma(A)$ — спектр оператора A;$\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$.

Обозначения физических величин см. в § 1.

§ 1. Гамильтониан заряженной частицы в однородном магнитном поле. Группа магнитных трансляций

1.Оператор Шрёдингера с постоянным и однородным магнитным полем. Здесь мы введем и опишем простейшие свойства квантовомеханического гамильтониана заряженной (заряд e) бесспиновой частицы массы m, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B}$. Будем считать $\mathbf{B}$ параллельным вектору $\mathbf{k}$ стандартного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ пространства $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$, $B \neq 0$. Отделяя свободное движение вдоль оси z, получаем гамильтониан H_0 в пространстве состояний $L^2(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2$ — плоскость xy, натянутая на векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$:

$$H_0 = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2.$$

Здесь $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ — двумерный оператор импульса, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторый потенциал поля ($\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$), который, разумеется, определен неоднозначно. Чаще всего $\mathbf{A}$ выбирают в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r} \quad \text{(симметричная калибровка);} \\ \mathbf{A} &= (-By, 0) \quad \text{(калибровка Ландау) .} \end{aligned} \tag{1.1}$$

В каждом из этих случаев оператор H_0 самосопряжен в существенном на $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$; изменение калибровки приводит к замене оператора H_0 на унитарно эквивалентный ([10], т.2). В дальнейшем, если не оговорено противное, используется симметричная калибровка (1.1). Введем стандартные обозначения:

$$\omega = |eB|/cm - \text{ циклотронная частота ;}$$

$$l_M = (\hbar/m\omega)^{1/2} - \text{ магнитная длина;}$$

$$\Phi_0 = 2\pi\hbar c/|e| - \text{ квант магнитного потока.}$$

Через ξ будем на протяжении всей статьи обозначать величину

$$\xi = \pm B/\Phi_0 = \pm(2\pi l_M^2)^{-1},$$

где знаки $\pm$ выбираются так, чтобы выполнялось неравенство $\xi eB > 0$. Величина $|\xi|$ равна числу квантов потока поля $\mathbf{B}$ через единичную площадку в $\mathbb{R}^2$. Чтобы упростить формулы, будем пользоваться в дальнейшем системой единиц, в которой $e = \hbar = m = 1$. Тогда с учетом введенных обозначений гамильтониан H_0 запишется в виде

$$H_0 = -\frac{1}{2}[(\partial/\partial x + \pi i\xi y)^2 + (\partial/\partial y - \pi i\xi x)^2].$$

Спектр H_0 чисто точечный и состоит из бесконечно вырожденных собственных чисел (*уровней Ландау*) [23]:

$$\varepsilon_l = (l+1/2)\omega, \qquad l = 0,1,\ldots$$

Далее нам потребуется функция Грина оператора H_0 (т.е. ядро резольвенты $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$); она имеет вид [24]:

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';z) = (2\pi)^{-1}\Gamma(1/2 - z/\omega)\exp[-\pi i\xi\mathbf{r}\wedge\mathbf{r}'- \\ -\pi|\xi|(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/2]\Psi(1/2 - z/\omega, 1; \pi|\xi|(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

В этой формуле $\Gamma(x)$ — Г-функция Эйлера, $\Psi(a,c;x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция ([25], т.1).

Так как спектр H_0 бесконечно вырожден, то собственные функции этого оператора можно выбирать с большой степенью произвола. Обычно используют (обобщенные) собственные функции Ландау, которые не входят в L^2 (т.е. описывают делокализованные состояния частицы с гамильтонианом H_0). Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать периодические возмущения оператора H_0 с произвольной решеткой периодов, то выбору собственных функций H_0 мы предпошлем выбор некоторой решетки Λ в $\mathbb{R}^2$, которую будем задавать базисом $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ (см. § 0). Так как H_0 инвариантен относительно поворотов в $\mathbb{R}^2$, то можно считать векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{i}$ сонаправленными: $a_{1x} > 0$, $a_{1y} = 0$. Особую роль при исследовании периодических возмущений оператора H_0 играет безразмерная величина

$$\eta = S_\Lambda \xi \tag{1.3}$$

— число квантов потока поля $\mathbf{B}$ через элементарную ячейку Q_Λ (или просто — поток поля $\mathbf{B}$). Не умаляя общности, будем считать $\eta > 0$.

С решеткой Λ (точнее, с ее образующими $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$) связывается следующий полный набор обобщенных собственных функций $\psi_0(\mathbf{r};q,l)$ оператора $H_0(-\infty < q < \infty; l = 0,1,\ldots)$[26]:

$$\begin{aligned} \psi_0(\mathbf{r};q,l) = \\ = A(q,l)\exp[2\pi i\xi x(\frac{y}{2} + \beta q)]u_l(l_M^{-1}(y+\beta q)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta &= (a_{1x}\xi)^{-1}\,(= a_{2y}\eta^{-1}), \\ u_l(x) &= \exp(-x^2/2)H_l(x), \end{aligned}$$

$H_l(x)$ — l-й полином Эрмита. Нормировочная константа $A(q,l)$ определяется так:

$$\begin{cases} A(q,l) = A(q)A_l, \\ A(q) = \exp(\pi i\xi\beta^2 q^2 a_{2x}/a_{2y}), \\ A_l = (|\beta|^{-1} l_M^3 \pi^{3/2} 2^{l+1} l!)^{-1/2}. \end{cases}$$

Нелишне отметить, что предыдущие формулы упрощаются, если решетка Λ прямоугольная; в этом случае $A(q) \equiv 1$, и для разных прямоугольных решеток наборы функций (1.4) отличаются только выбором масштаба переменной q. В общем случае как раз вид множителя $A(q)$ обеспечивает выполнимость формулы (1.15), играющей ключевую роль в получении основных результатов п.4.

Функции $\psi_0(\cdot;q,l)$ называют собственными функциями Ландау, присоединенными к решетке Λ; они образуют обобщенный ортонормальный базис, т.е.

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_0(\mathbf{r};q,l)\psi_0^*(\mathbf{r};q',l')d\mathbf{r} = \delta_{ll'}\delta(q-q'), \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_0(\mathbf{r};q,l)\psi_0^*(\mathbf{r}';q,l)dq = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \end{cases} \tag{1.5}$$

Равенства (1.5) означают, что разложение функций из $L^2(\mathbb{R}^2)$ по функциям Ландау задает изоморфизм гильбертовых пространств $L^2(\mathbb{R}^2)$ и $L^2(\mathbb{R}^2)\otimes l^2(\mathbb{N}) \simeq \sum\limits_{l=0}^{\infty} \oplus L^2(\mathbb{R}^2)$. Последнее пространство состоит из функций $\varphi(q,l)$ $(q\in\mathbb{R}, l\in\mathbb{N})$ со скалярным произведением

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi^*(q,l)\psi(q,l)\,dq.$$

Функцию $\varphi(q,l)$ можно рассматривать и как функциональную последовательность $(\varphi_l(q))_{l\geqslant 0}$, $\varphi_l(q)=\varphi(q,l)$. Для математически корректного определения упомянутого изоморфизма нужно, как и при построении L^2-преобразования Фурье, сопоставить функции $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ функцию

$$\tilde{f}(q,l) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r})\psi_0^*(\mathbf{r};q,l)d\mathbf{r}.$$

Легко убедиться, что $\|f\| = \|\tilde{f}\|$, и значит, отображение $f\mapsto\tilde{f}$ продолжается до изометрии $\mathcal{F}_l$ пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\mathbb{R})\otimes l^2(\mathbb{N})$. Нетрудно доказать, что для любой финитной последовательности $(\varphi_0,\dots,\varphi_n,0,0,\dots)$ функций из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ можно найти такую функцию $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, что $\tilde{f}(q,l)=\varphi_l(q)$. Тем самым

$$\mathcal{F}_L : L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R})\otimes l^2(\mathbb{N})$$

есть изоморфизм гильбертовых пространств, который будем называть *преобразованием Фурье–Ландау*. На физическом языке преобразование Фурье–Ландау — это переход от координатного представления к представлению квантовых чисел q, l(q — проекция центра циклотронной орбиты на некоторую фиксированную калибровкой (1.1) ось в плоскости xy, l — номер уровня Ландау). Преобразование $\mathcal{F}_L$ диагонализирует оператор H_0, а именно оператор $\overline{H}_0 = \mathcal{F}_L H_0 \mathcal{F}_L^{-1}$ действует умножением на собственные числа ε_l: если $\varphi\in\mathcal{D}(\overline{H}_0)$, то $(\overline{H}_0\varphi)(q,l)=\varepsilon_l\varphi(q,l)$. Если e_l обозначает l-й стандартный орт в $l^2(\mathbb{N})(e_l=(\delta_{ln})_{n\geqslant 0})$, то $L^2(\mathbb{R})\otimes e_l$ — собственное подпространство $\overline{H}_0$, соответствующее собственному числу ε_l, а разложение

$$L^2(\mathbb{R})\otimes l^2(\mathbb{N}) = \sum_{l=0}^{\infty}\oplus L^2(\mathbb{R})\otimes e_l \simeq \sum_{l=0}^{\infty}\oplus L^2(\mathbb{R})$$

есть разложение пространства состояний на собственные подпространства оператора H_0 в представлении чисел q, l (в *представлении Ландау*).

Полезно иметь в своем распоряжении явный вид ядра $P_l(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ спектрального проектора на собственное подпространство оператора H_0, соответствующее собственному значению ε_l. Воспользуемся формулой

$$\Psi(-n,1;x) = n!(-1)^n L_n(x); n=0,1,\dots, \tag{1.6}$$

где $L_n(x)$ — полиномы Лагерра ([25], т.1). Учитывая, что ортопроектор $P(E)$ на собственное подпространство, соответствующее изолированному собственному значению E самосопряженного оператора H, дается формулой

$$P(E) = -\operatorname{res}((H-z)^{-1}; E), \tag{1.7}$$

из (1.2) и (1.6) получаем

$$\begin{gathered} P_l(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\xi| \exp(-\pi i \xi \mathbf{r} \wedge \mathbf{r}' - \\ -\pi|\xi|(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2/2) L_l(\pi|\xi|(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Из (1.8) с учетом формулы (1.86) ([61], с.26) вытекает следующее предложение, которое дает полезное для ряда приложений описание собственного подпространства H_0, отвечающего основному состоянию ε_0:

Предложение 1. *При $\xi > 0$ собственное подпространство оператора H_0, соответствующее собственному числу ε_0, совпадает с множеством функций вида $f(z) = \exp(-\pi\xi|z|^2/2)\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — целая функция комплексного переменного z такая, что $f \in L^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}^2)$.*

2. Группа магнитных трансляций. Физические состояния системы, гамильтонианом которой является H_0, инвариантны относительно трансляций плоскости на произвольный вектор, однако сам гамильтониан H_0 такой инвариантностью не обладает. Это сразу видно, например, из формулы (1.2) — наличие в экспоненциальном множителе функции Грина члена $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}'$ нарушает трансляционную инвариантность G_0. На самом деле при сдвиге на произвольный вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ гамильтониан H_0 переходит в оператор, полученный из H_0 заменой векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ на $\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} h$, где $h(\mathbf{r}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\mathbf{r}/2$. Поэтому H_0 инвариантен относительно композиции сдвига на $\mathbf{v}$ и калибровочного преобразования векторного потенциала $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} - \operatorname{grad} h$[27]. Результирующее преобразование на векторах состояния $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$f(\mathbf{r}) \mapsto \exp(-\pi i \xi \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) f(\mathbf{r} - \mathbf{v}). \tag{1.9}$$

Обозначим унитарное преобразование пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ вида (1.9) через $[\mathbf{v}]$; такие преобразования не образуют группы, так как

$$[\mathbf{v}][\mathbf{v}'] = \exp(\pi i \xi \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')[\mathbf{v} + \mathbf{v}']. \tag{1.10}$$

Формула (1.10) показывает, что отображение $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]$ есть проективное представление группы трансляций $\mathbb{R}^2$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$, т.е. представление аддитивной группы $\mathbb{R}^2$ в группу преобразований множества всех комплексных однородных прямых в $L^2(\mathbb{R}^2)$. Проективное представление можно превратить в линейное с помощью центрального расширения соответствующей группы [28]. Для группы трансляций $\mathbb{R}^2$ и ее представления (1.9) это было фактически проделано Заком [9], что привело его к понятию группы магнитных трансляций; к описанию последней мы и переходим.

Пусть $S^1 = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — единичная окружность комплексной плоскости. В множестве $\mathbb{R}^2 \times S^1$ введем структуру группы, определив умножение следующим образом:

$$(\mathbf{v}, \zeta)(\mathbf{v}', \zeta') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \zeta\zeta' \exp(\pi i \xi \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')). \tag{1.11}$$

Здесь $\xi \neq 0$ — фиксированное вещественное число; в применении к оператору H_0, ξ будет совпадать с величиной, заданной в п.1. Группа с умножением (1.11) называется *группой магнитных трансляций* и обозначается $W(\xi)$. Эта группа некоммутативна:

$$(\mathbf{v},\zeta)(\mathbf{v}',\zeta') = (\mathbf{v}',\zeta')(\mathbf{v},\zeta)(0,\exp(2\pi i\xi\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}'));$$

ее центр Z состоит из всех элементов вида $(0,\zeta)$. Упомянутое центральное расширение имеет вид $1\to Z\to W(\xi)\to\mathbb{R}^2\to 1$.

Укажем на связь $W(\xi)$ с *группой Гейзенберга–Вейля* G_H мультипликативной группой всех вещественных матриц вида

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Зафиксировав базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2\in\mathbb{R}^2$, определим отображение $w: G_H\to W(\xi)$, полагая

$$\begin{cases} w(g(\alpha,\beta,\gamma)) = (\mathbf{v},\zeta), \\ v_1=\gamma, v_2=\eta^{-1}\alpha, \zeta=\exp(-2\pi i(\beta-\alpha\gamma/2)), \end{cases} \tag{1.12}$$

где число η в согласии с (1.3) определим так: $\eta=(\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2)\xi$. Легко проверить, что w — сюръективный гомоморфизм, поэтому $W(\xi)\simeq G_H/\operatorname{Ker}w$, где $\operatorname{Ker}w = \{g(0,\beta,0):\beta\in\mathbb{Z}\}$, и $\operatorname{Ker}w$ лежит в центре G_H. Отсюда, в частности, получаем, что все группы $W(\xi)$ попарно изоморфны.

Определим представление T_L группы $W(\xi)$ в пространстве комплексных функций $f(x,y)$ от двух переменных:

$$(T_L(\mathbf{v},\zeta)f)(\mathbf{r}) = \zeta\exp(-\pi i\xi\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})f(\mathbf{r}-\mathbf{v}). \tag{1.13}$$

В дальнейшем рассматриваются и другие представления группы $W(\xi)$ и ее подгрупп; условимся операторы, соответствующие элементу $(\mathbf{v},\zeta)$ при этих представлениях обозначать символом $[\mathbf{v},\zeta]$. Из контекста всегда будет ясно, о каком представлении при этом идет речь. Операторы $[\mathbf{v},\zeta]$ называют *магнитными трансляциями*. Очевидно, T_L задает точное унитарное представление группы $W(\xi)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$, линеаризующее проективное представление (1.9) группы $\mathbb{R}^2$.

Если K — непрерывный линейный интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R}^2)$ с ядром $K(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, то для ядра оператора $[\mathbf{v},\zeta]K[\mathbf{v},\zeta]^{-1}$ справедлива формула

$$([\mathbf{v},\zeta]K[\mathbf{v},\zeta]^{-1})(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \exp(-\pi i\xi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\wedge\mathbf{v})K(\mathbf{r}-\mathbf{v},\mathbf{r}'-\mathbf{v}). \tag{1.14}$$

Тем самым K коммутирует с оператором $[\mathbf{v},\zeta]$ в том и только в том случае, когда его ядро удовлетворяет условию

$$K(\mathbf{r}-\mathbf{v},\mathbf{r}'-\mathbf{v}) = \exp(\pi i\xi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\wedge\mathbf{v})K(\mathbf{r},\mathbf{r}').$$

Очевидно, это условие при любых $[\mathbf{v},\zeta]\in W(\xi)$ выполнено для ядра $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';z)$ резольвенты оператора H_0(см. (1.2)), поэтому H_0 инвариантен относительно группы магнитных трансляций. В частности, область определения $\mathcal{D}(H_0)$ инвариантна относительно операторов представления T_L, и H_0 перестановочен на $\mathcal{D}(H_0)$ со всеми операторами этого представления. Вследствие этого собственные подпространства H_0 также инвариантны относительно T_L. На самом деле, как будет видно из дальнейшего, разложение $L^2(\mathbb{R}^2)$ на собственные подпространства оператора H_0 совпадает с разложением T_L на неприводимые представления. Это означает, что вырождение уровней Ландау — не случайное, его нельзя снять, сохранив группу симметрии $W(\xi)$ гамильтониана H_0. Найдем действие магнитных трансляций в представлении Ландау, т.е. найдем вид операторов представления $\mathcal{F}_L T_L \mathcal{F}_L^{-1}$ группы $W(\xi)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}) \otimes l^2(\mathbb{N})$. Прежде всего прямым вычислением нетрудно убедиться, что для собственных функций Ландау, присоединенных к некоторой решетке Λ (1.4), справедлива следующая формула преобразования под действием магнитных трансляций:

$$[\mathbf{v},\zeta]\psi_0(\cdot;q,l) = \\ = \zeta \exp[-2\pi i(qv_1 - \eta v_1 v_2/2)]\psi_0(\cdot;q-\eta v_2,l). \tag{1.15}$$

Отсюда вытекает, что в представлении Ландау магнитные трансляции действуют на произвольную функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes l^2(\mathbb{N})$ следующим образом:

$$([\mathbf{v},\zeta]\varphi)(q,l) = \\ = \zeta \exp[-2\pi i(qv_1 + \eta v_1 v_2/2)]\varphi(q+\eta v_2,l). \tag{1.16}$$

Известно, что группа G_H имеет серию неприводимых унитарных представлений $\Pi_\lambda(\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ операторами умножения и сдвига [29]:

$$((\Pi_\lambda g(\alpha,\beta,\gamma))f)(x) = \exp(i\lambda(\beta+\gamma x))f(x+\alpha).$$

Сравнивая последнюю формулу с (1.16), получаем, что ограничение представления $T_L w$ на l-й уровень Ландау $L^2(\mathbb{R})\otimes e_l$ (здесь w — гомоморфизм, определенный в (1.12)), совпадает с Π_λ при $\lambda = -2\pi$. Тем самым ограничение T_L на каждый уровень Ландау неприводимо, т.е. разложение $L^2(\mathbb{R}) \otimes l^2(\mathbb{N}) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \oplus L^2(\mathbb{R}) \otimes e_l$ есть разложение представления $\mathcal{F}_L T_L \mathcal{F}_L^{-1}$ на неприводимые. Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Разложение пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ на собственные подпространства H_0 совпадает с разложением представления T_L группы магнитных трансляций $W(\xi)$ на неприводимые представления.*

Эта теорема относится к числу „хорошо известных“ результатов, первоисточник которых трудно обнаружить (см. тем не менее [30] и ссылки в этой статье).

3. Дискретная группа магнитных трансляций. При возмущении оператора H_0 периодическим потенциалом $V(x,y)$ с решеткой периодов Λ остается инвариантность лишь относительно магнитных трансляций $[\lambda,\zeta]$ на векторы решетки, $\lambda \in \Lambda$. В связи с этим рассмотрим в $W(\xi)$ следующую подгруппу:

$$W(\xi,\Lambda) = \{(\lambda,\zeta) \in W(\xi) : \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, \zeta = \exp(\pi i\eta n), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Здесь $\eta = S_\Lambda \xi$ — поток поля $\mathbf{B}$ через элементарную ячейку решетки Λ(см.(1.3)). Будем называть $W(\xi,\Lambda)$ *дискретной группой магнитных трансляций по решетке* Λ. Очевидно, $W(\xi,\Lambda)$ порождена элементами $(\mathbf{a}_1,1)$, $(\mathbf{a}_2,1)$, $(0,\exp(\pi i\xi\boldsymbol{\lambda}\wedge\boldsymbol{\lambda}'))$, где $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}' \in \Lambda$. В координатах относительно базиса $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ умножение в $W(\xi,\Lambda)$ имеет вид

$$(\boldsymbol{\lambda},\zeta)(\boldsymbol{\lambda}',\zeta') = (\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}',\zeta\zeta'\exp(\pi i\eta(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'))),$$

поэтому при $\eta_1 = \eta_2$ группы $W(\xi_1,\Lambda_1)$ и $W(\xi_2,\Lambda_2)$ изоморфны. В связи с этим будем обозначать группу $W(\xi,\Lambda)$ чаще всего просто W_η. Заметим тут же, что изоморфизм $W_{\eta_1} \simeq W_{\eta_2}$ не влечет равенства $\eta_1 = \eta_2$; например, при всех четных целых η имеем $W_\eta \simeq \mathbb{Z}^2$. Тем не менее при различных рациональных значениях параметра η сужения представления T_L на W_η неэквивалентны на уровнях Ландау (см. ниже).

Как уже упоминалось, свойства группы W_η существенно зависят от арифметических свойств числа η. Прежде всего из формулы коммутации для элементов W_η

$$(\boldsymbol{\lambda},\zeta)(\boldsymbol{\lambda}',\zeta') = \\ = (\boldsymbol{\lambda}',\zeta')(\boldsymbol{\lambda},\zeta)(0,\exp(2\pi i\eta(\lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1'))), \tag{1.17}$$

учитывая, что λ_i, $\lambda_i' \in \mathbb{Z}$, получаем следующее утверждение: *группа W_η абелева тогда и только тогда, когда η — целое число.*

Одно из основных свойств абелевой группы, используемых, в частности, при спектральном анализе периодических операторов Шрёдингера, таково: все ее неприводимые унитарные представления одномерны, и любое унитарное представление этой группы однозначно разлагается на дизъюнктные представления, кратные неприводимым [28]. Вообще топологическая группа, любое унитарное представление которой однозначно разлагается на дизъюнктные представления, кратные неприводимым, называется *ручной* [28] или группой *типа I*. В противном случае группа называется *дикой*. Известно, что счетная дискретная группа ручная в том и только в том случае, когда она имеет абелев нормальный делитель конечного индекса [31].

Пусть теперь поток η — рациональное число: $\eta = N/M$. „Укрупним“ решетку Λ в M^2 раз, т.е. рассмотрим решетку Λ' с образующими $M\mathbf{a}_1$, $M\mathbf{a}_2$. Формула (1.17) показывает тогда, что $W(\xi,\Lambda')$ лежит в центре группы $W(\xi,\Lambda)$; ясно, что группа $W(\xi,\Lambda)/W(\xi,\Lambda')$ конечна. Обратно, если G — подгруппа группы $W(\xi,\Lambda)$ конечного индекса, то она, очевидно, содержит элементы $(\boldsymbol{\lambda},\zeta)$ и $(\boldsymbol{\lambda}',\zeta')$ с линейно независимыми $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}'$; но тогда при иррациональном η из (1.17) получаем, что G неабелева. Итак, доказано следующее предложение [26]:

Предложение 2. *Группа W_η ручная тогда и только тогда, когда η — рациональное число.*

Этот факт побуждает нас ограничиться в дальнейшем случаем рационального потока η.

Обозначим через T сужение представления T_L на группу W_η. Это представление на уровне Ландау уже не является неприводимым, что приводит к эффекту расплывания каждого уровня Ландау ε_l в энергетическую зону при добавлении к H_0 нетривиального Λ-периодического потенциала. Общие свойства расплывшихся уровней Ландау можно понять, рассмотрев разложение T на неприводимые представления. Прежде чем переходить к этому вопросу, введем следующее *определение* [32]:

Унитарное представление группы W_η называется *физическим*, если в этом представлении элементу $(\mathbf{0},\zeta)$ соответствует оператор ζI.

Очевидно, T — физическое представление. В случае рационального потока η полное описание физических неприводимых представлений группы W_η получено в [9,32]. Приведем его.

В наиболее простом случае целого потока ($\eta = N$) все физические неприводимые представления (физические характеры) параметризуются точками $\mathbf{p} = (p_1,p_2)$ тора $\mathbb{T}^2 = [0,1)\times[0,1)$. Физический характер, соответствующий точке $\mathbf{p}$, имеет вид

$$\chi((\boldsymbol{\lambda},\zeta);\mathbf{p}) = \zeta\exp(-2\pi i(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + N\lambda_1\lambda_2/2)). \tag{1.18}$$

Множество $\{\chi(\cdot;\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \mathbb{T}^2\}$ образует полный набор попарно неэквивалентных физических характеров.

В случае рационального потока общего вида: $\eta = N/M$, справедлива следующая теорема [9,32]:

Теорема 2. *Все физические неприводимые представления группы W_η M-мерны и параметризуются точками тора $\mathbb{T}^2$. Операторы $\Delta((\boldsymbol{\lambda},\zeta);\mathbf{p})$ этих представлений в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^M$ на образующих $(\mathbf{a}_1,1)$ и $(\mathbf{a}_2,1)$ задаются матрицами*

$$\Delta((\mathbf{a}_1,1);\mathbf{p}) =$$
$$= \mathrm{diag}[e^{-2\pi i p_1}, e^{-2\pi i(p_1+\eta)}, \dots, e^{-2\pi i(p_1+(M-1)\eta)}],$$
$$\Delta((\mathbf{a}_2,1);\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & I_{M-1} \\ e^{-2\pi i p_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(Здесь и ниже I_n обозначает единичную матрицу порядка $n \times n$).

Среди указанных представлений есть эквивалентные. Чтобы получить полный набор попарно неэквивалентных физических неприводимых представлений, нужно ограничиться значениями $\mathbf{p}$ на торе $\mathbb{T}^2_\eta = [0, M^{-1}) \times [0,1)$.

4. Преобразование Зака. Разложение представления T на неприводимые представления. Для разложения представления T на неприводимые мы применим на уровнях Ландау в представлении квантовых чисел q, l так называемое *преобразование Зака* (или *kq-преобразование*) [13, 33]. Это преобразование, обозначаемое $\mathcal{Z}$, изоморфно отображает $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2(\mathbb{T}^2)$ следующим образом. Сопоставим функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ функцию $\tilde{f}$ на торе $\mathbb{T}^2$ по формуле

$$\tilde{f}(p_1,p_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i m p_2) f(p_1+m). \tag{1.19}$$

Немедленно проверяется равенство $\|f\| = \|\tilde{f}\|$, из которого вытекает, что отображение $f \mapsto \tilde{f}$ однозначно продолжается до изометрии $\mathcal{Z} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{T}^2)$. Эта изометрия обратима, $\mathcal{Z}^{-1}$ сопоставляет функции $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^2)$ функцию $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f(q) = \int_0^1 \exp(-2\pi i[q]p_2)\varphi(\{q\},p_2)dp_2. \tag{1.20}$$

Здесь, как и ниже, через $[q]$ обозначается целая часть, а через $\{q\}$ — дробная часть числа $q \in \mathbb{R}$, если только из контекста не следует иной смысл скобок $[\dots]$ и $\{\dots\}$. Отметим, что преобразование $\mathcal{Z}$ в связи с представлением канонических коммутационных соотношений несколько ранее Зака рассматривал Картье [34] (см. также [35, 36]).

Обозначим через T_0 представление группы W_η, действующее в $L^2(\mathbb{R})$ по формуле

$$(T_0(\boldsymbol{\lambda},\zeta)f)(q) = \zeta\exp(-2\pi i(\lambda_1 q + \eta\lambda_1\lambda_2/2))f(q+\eta\lambda_2). \tag{1.21}$$

Это представление есть не что иное, как представление $\mathcal{F}_L T \mathcal{F}_L^{-1}$, ограниченное на уровень Ландау (см.(1.16)); другими словами, (1.21) описывает действие на функции фиксированного уровня Ландау (в представлении чисел q, l) магнитных трансляций из W_η. Укажем действие представления $\mathcal{Z}T_0\mathcal{Z}^{-1}$ в пространстве $L^2(\mathbb{T}^2)$. Для функции $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ из формул (1.19) и (1.21) получаем

$$([\boldsymbol{\lambda}, \zeta]f)(p_1, p_2) = \zeta \exp(-2\pi i(\lambda_1 p_1 + \eta\lambda_1\lambda_2/2))\times$$
$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i m p_2)(\mathcal{Z}^{-1}f)(p_1 + m + \eta\lambda_2). \tag{1.22}$$

формула (1.22) позволяет найти разложение представления T_0 (а вместе с ним и представления T) на неприводимые. Однако более удобным для этой цели оказывается так называемое *модифицированное преобразование Зака* $\mathcal{Z}_\eta$:

$$\mathcal{Z}_\eta : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{T}^2_\eta) \otimes \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N = \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^2_\eta} \mathcal{H}_\eta(\mathbf{p})d\mathbf{p}$$

(обозначения см. в § 0), которое действует следующим образом. Если $f \in L^2(\mathbb{R})$, то

$$(\mathcal{Z}_\eta f)(\mathbf{p}, j, k) =$$
$$= N^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i m(p_2 + k)/N) f(p_1 + m + j\eta). \tag{1.23}$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{Z}_\eta$ есть композиция $\mathcal{Z}$ и преобразования $\mathcal{N} : L^2(\mathbb{T}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2_\eta) \otimes \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N$, которое каждой функции $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ сопоставляет функцию

$$(\mathcal{N}f)(\mathbf{p}, j, k) =$$
$$= N^{-1/2} \exp(-2\pi i[j\eta](p_2 + k)/N) f(p_1 + \{j\eta\}, (p_2 + k)/N)$$
$$(0 \leqslant p_1 < M^{-1}; 0 \leqslant p_2 < 1; j = 0, \ldots, M-1; k = 0, \ldots, N-1).$$

Очевидно, $\mathcal{N}$ — изоморфизм, поэтому и $\mathcal{Z}_\eta$ — изоморфизм гильбертовых пространств. Наконец, через $\mathcal{L}_\eta$ обозначим изоморфизм

$$\mathcal{L}_\eta : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N}) =$$
$$= \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^{\oplus}_\eta} \tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p})d\mathbf{p},$$

являющийся композицией преобразования Фурье–Ландау $\mathcal{F}_L$ и преобразования $\mathcal{Z}_\eta \otimes I_{l^2(\mathbb{N})}$; этот изоморфизм будем называть *преобразованием Ландау–Зака*.

Основными в этом пункте являются следующие теоремы.

Теорема 3. *Преобразование $\mathcal{Z}_\eta$ осуществляет разложение представления T_0 в прямой интеграл представлений, кратных неприводимым:*

$$\mathcal{Z}_\eta T_0 \mathcal{Z}_\eta^{-1} = \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^2_\eta} \Delta(\cdot; \mathbf{p}) \otimes I_{\mathbb{C}^N} d\mathbf{p}. \tag{1.24}$$

Теорема 4. *Преобразование $\mathcal{L}_\eta$ осуществляет разложение представления T дискретной группы магнитных трансляций W_η в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ в прямой интеграл представлений, кратных неприводимым*

$$\mathcal{L}_\eta T \mathcal{L}_\eta^{-1} = \int\limits_{\mathbb{T}_\eta^2}^{\oplus} \Delta(\cdot;\mathbf{p}) \otimes I_{\mathbb{C}^N} \otimes I_l^2(\mathbb{N}) d\mathbf{p}.$$

Теорема 4 есть непосредственное следствие теоремы 3; последняя в свою очередь доказывается прямыми вычислениями с использованием формул (1.21) и (1.23), при этом достаточно проверить совпадение обеих частей равенства (1.24) на элементах $(\mathbf{a}_1, 1)$ и $(\mathbf{a}_2, 1)$.

Теорема 3 показывает, в частности, что спектр представления T_0 (т.е. представления T на фиксированном уровне Ландау) имеет кратность N независимо от значения M. Это отражается на структуре спектра малых периодических возмущений оператора H_0.

Приведем для удобства явный вид преобразований $\mathcal{L}_\eta$ и $\mathcal{L}_\eta^{-1}$. По крайней мере при $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и для функции $\tilde{f} = \mathcal{L}_\eta f$ справедливы формулы (см.(1.20), (1.23)):

$$(\mathcal{L}_\eta f)(\mathbf{p}, j, k, l) =$$
$$= N^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i m(p_2 + k)/N) \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\psi_0^*(x,y;p_1 + \eta j + m, l)dx\,dy, \quad (1.25)$$

$$(\mathcal{L}_\eta^{-1} \tilde{f})(x,y) =$$
$$= N^{-1/2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{1/M} dp_1 \int\limits_0^1 dp_2 \tilde{f}(p_1, p_2, j, k, l) \times$$
$$\times \exp(-2\pi i m(p_2 + k)/N)\psi_0(x,y;p_1 + \eta j + m, l). \quad (1.26)$$

Заметим, что аргументы функции $\mathcal{L}_\eta f$: $p_1 \in [0, M^{-1})$; $p_2 \in [0,1)$; $j = 0, \ldots, M-1$; $k = 0, \ldots, N-1$; $l = 0, 1, \ldots,$ — совпадают по существу с квантовыми числами Ваннье [37], введенными для описания состояния электрона, движущегося в однородном магнитном поле и периодическом электрическом потенциале. Как будет видно из дальнейшего, числа p_1 и p_2 играют роль координат квазиимпульса для оператора H_0; смысл остальных квантовых чисел Ваннье также ясен: j — параметр, по которому действует представление T, k — параметр вырождения этого действия, l — номер уровня Ландау.

Представление $L^2(\mathbb{R}^2)$ в виде прямого интеграла пространств $\tilde{\mathcal{H}}_\eta$ в исследовании периодических возмущений H_0 играет ту же роль, что и разложение $L^2(\mathbb{R}^2)$ в прямой интеграл пространств $l^2(\mathbb{Z}^2)$ в p-представлении при исследовании периодических возмущений оператора $-\Delta$ ([10], т.4). Действительно, два основных свойства последнего разложения таковы: 1) оно является разложением представления группы трансляций $\mathbb{Z}^2$ в прямой интеграл попарно дизъюнктных примарных представлений; 2) оно является разложением оператора $-\Delta$ в прямой интеграл операторов умножения на дискретную последовательность. Но аналогичными свойствами по отношению к оператору H_0 и дискретной группе магнитных трансляций W_η обладает разложение пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ в прямой интеграл пространств $\tilde{\mathcal{H}}_\eta$. В частности, оператор H_0 в представлении Ландау–Зака (т.е.

оператор $\tilde{H}_0 = \mathcal{L}_\eta H_0 \mathcal{L}_\eta^{-1}$) действует на функцию φ из $\mathcal{D}(\tilde{H}_0)$ умножением на собственные числа

$$(\tilde{H}_0\varphi)(\mathbf{p}, j, k, l) = \varepsilon_l \varphi(\mathbf{p}, j, k, l).$$

При этом $\tilde{H}_0$ разлагается в прямой интеграл

$$\tilde{H}_0 = \int_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\otimes} \tilde{H}_0(\mathbf{p}) d\mathbf{p},$$

где каждый оператор $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$ действует в слое $\tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p})$ снова умножением на последовательность (ε_l) : $(\tilde{H}_0(\mathbf{p})h)(j,k,l) = \varepsilon_l h(j,k,l)\,(h \in \mathcal{D}(\tilde{H}_0(\mathbf{p})) \subset \tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p}))$. Однако собственные числа ε_l оператора $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$ при фиксированном $\mathbf{p}$ имеют уже конечную кратность $M \cdot N$; в частности, $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$ — оператор с компактной резольвентой. При этом вырождение спектра оператора $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$ по параметру k случайное, кратность этого вырождения равна N. Вырождение же по параметру j кратности M нельзя снять возмущением, коммутирующим с представлением T.

5. Разложение W_η-инвариантного оператора в прямой интеграл по тору квазиимпульсов. Малые возмущения оператора H_0. Напомним следующий результат (см., например, [28]):

Пусть гильбертово пространство $\mathcal{H}$ представлено в виде прямого интеграла $\mathcal{H} = \int_X^{\otimes} \mathcal{H}(x) d\mu(x)$ гильбертовых пространств $\mathcal{H}(x)$ по мере Радона μ на локально компактном пространстве X. Для того чтобы линейный непрерывный оператор A в $\mathcal{H}$ разлагался в прямой интеграл $A = \int_X^{\otimes} A(x) d\mu(x)$ линейных непрерывных операторов $A(x)$ в слоях $\mathcal{H}(x)$, необходимо и достаточно, чтобы A коммутировал со всеми операторами умножения на ограниченные непрерывные числовые функции на X.

Этот результат стандартным путем распространяется и на неограниченные нормальные операторы.

Пусть теперь A — линейный непрерывный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$, коммутирующий со всеми операторами магнитных трансляций из W_η. Рассмотрим оператор $\tilde{A} = \mathcal{L}_\eta A \mathcal{L}_\eta^{-1}$, действующий в $\int_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$. По условию, A перестановочен с операторами $[M\mathbf{a}_1, 1]$ и $[M\mathbf{a}_2, 1]$. Пользуясь теоремой 2, п.3, легко получить, что в представлении Ландау — Зака эти операторы являются операторами умножения на функции $\exp(-2\pi i M p_1)$ и $\exp(-2\pi i p_2)$ соответственно. Так как замкнутая подалгебра с единицей в $C(\mathbb{T}^2_\eta)$, порожденная этими функциями, есть все пространство $C(\mathbb{T}^2_\eta)$, то A коммутирует с операторами умножения на непрерывные функции на торе $\mathbb{T}^2_\eta$. Тем самым $\tilde{A}$ разлагается в прямой интеграл $\int_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \tilde{A}(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$ линейных непрерывных операторов $\tilde{A}(\mathbf{p})$, действующих в слоях $\tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p})$. Одна из основных задач явнорешаемых моделей — поиск конкретного вида матрицы $\tilde{A}(\mathbf{p}; j, k, l; j', k', l')$ оператора $\tilde{A}(\mathbf{p})$.

Если $L(\mathbf{p})$ — некоторое собственное подпространство оператора $\tilde{A}(\mathbf{p})$, то в нем действует представление $T(\mathbf{p}) = \Delta(\cdot; \mathbf{p}) \otimes I_{\mathbb{C}^N} \otimes I_{l^2(\mathbb{N})}$ (см. теорему 4), поэтому $L(\mathbf{p})$ — прямая сумма пространств неприводимых подпредставлений $T(\mathbf{p})$. Тем самым из теоремы 2 получаем, что кратность каждого собственного значения оператора $\tilde{A}(\mathbf{p})$ делится на M.

Вернемся к оператору H_0, разложенному в прямой интеграл $H_0 \simeq \int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \tilde{H}_0(\mathbf{p})d\mathbf{p}$ (см. п.4), и рассмотрим возмущение этого оператора самосопряженным ограниченным оператором V, инвариантным относительно представления $T: H = H_0 + V$. В соответствии со сказанным выше имеем разложение $H \simeq \int\limits_{\mathbb{T}^2_\eta}^{\oplus} \tilde{H}(\mathbf{p})d\mathbf{p}$. Применяя стандартные результаты теории возмущений [10, 38], получаем следующее утверждение [39]:

Предложение 3. *При почти всех* $\mathbf{p}$ *из* $\mathbb{T}^2_\eta$ *оператор* $\tilde{H}(\mathbf{p})$ *имеет компактную резольвенту; следовательно, спектр* $\tilde{H}(\mathbf{p})$ *есть дискретная последовательность* $E_0(\mathbf{p}) \leqslant E_1(\mathbf{p}) \leqslant \dots \leqslant E_n(\mathbf{p}) \leqslant \dots$ M*-кратно вырожденных собственных чисел.*

Функции $E_n(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^2_\eta$ называют *законами дисперсии* гамильтониана H; это, вообще говоря, лишь измеримые функции от $\mathbf{p}$. Спектр H есть замыкание множества $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} I_n$, где

$$I_n = \{t \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0 \quad \mathrm{mes}\{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2_\eta : t - \varepsilon < E_n(\mathbf{p}) < t + \varepsilon\} > 0\}$$

([10], т.4). Если функция $E_n(\mathbf{p})$ непрерывна, то I_n — отрезок, являющийся множеством значений этой функции; его называют *n-й зоной спектра*. Если V — оператор умножения на непрерывную Λ-периодическую функцию $V(x, y)$ (потенциал), то операторы $\tilde{H}(\mathbf{p})$ образуют вещественно-аналитическое семейство [38], поэтому все законы дисперсии непрерывны. В этом случае спектр H имеет зонную структуру, которая, однако, может быть очень сложной. Если предположить дополнительно, что $\|V\| \ll \omega$, то достаточно точную картину спектра H можно получить в первом порядке теории возмущений по V (называемом в физике твердого тела приближением почти свободных электронов или приближением слабой связи). В этом случае секулярное уравнение теории возмущений приводит к разностному *уравнению Харпера* (называемому также уравнением почти-Матье) [30]:

$$\psi_{m+1} + \psi_{m-1} + 2\cos(2\pi m\eta^{-1} + \nu)\psi_m = E\psi_m.$$

Картина спектра H в приближении слабой связи такова. Каждый уровень Ландау ε_l оператора $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$ распадается на N собственных чисел оператора $H(\mathbf{p}) : E^1_l(\mathbf{p}) \leqslant E^2_l(\mathbf{p}) \leqslant \dots \leqslant E^N_l(\mathbf{p})$, каждое из которых M-кратно вырождено. Объединение отрезков I^i_l :

$$J_l = \bigcup_{i=1}^{N} I^i_l, \quad I^i_l = \{E^i_l(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \mathbb{T}^2_\eta\},$$

называется *l-м расплывшимся уровнем Ландау* (другие названия: *зона Ландау, магнитная зона*); отрезок I^i_l называется *магнитной подзоной* l-й зоны. Магнитные подзоны одной зоны могут перекрываться. Так как $\|V\| < \omega/2$, то l-я зона Ландау лежит в отрезке $(l\omega, (l+1)\omega)$, поэтому зоны Ландау разделены лакунами, и спектр H есть объединение всех J_l. Описанную картину спектра H в случае $\eta = 3/2$ иллюстрируют рис.1 и 2; на этих рисунках ось p — одна из осей p_1, p_2, а отрезок $[0, P)$ — один из отрезков $[0, M^{-1}, [0, 1)]$ соответственно. Число, поставленное

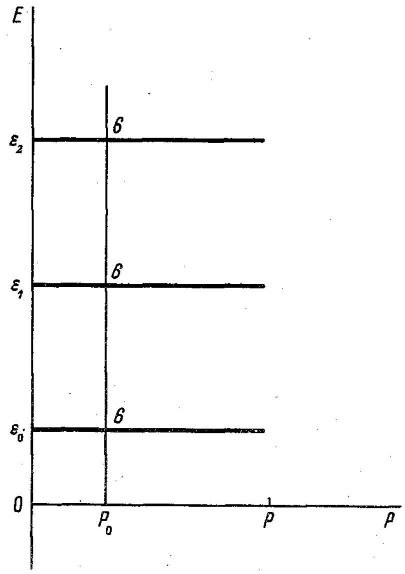

Рис.1. Уровни Ландау невозмущенного оператора H_0.

у точки пересечения графика функции $E = E_l^i(\mathbf{p})$ с прямой $p = p_0$, показывает кратность соответствующего собственного значения.

В другом идеальном случае, когда мало поле $\mathbf{B}$, спектральные свойства оператора H хорошо описываются приближением сильной связи [40]. В этом случае стационарное уравнение Шрёдингера для H снова преобразуется к уравнению Харпера, в котором величина η^{-1} заменена на η [41]. Следовательно, каждый уровень Ландау в этом приближении расплывается в зону, распадающуюся на M подзон. Такая картина спектра оператора $H = H_0 + V$ приведена, например, в [27]. Впервые эта двойственность моделей слабой и сильной связи была обнаружена в [41]. В § 2.5 настоящего обзора показано, что аналогичная двойственность имеет место и в модели потенциалов нулевого радиуса (без каких-либо дополнительных приближений). А именно в этой модели зоны Ландау распадаются на M магнитных подзон, если $N/M \geqslant 1$, и на N магнитных подзон, если $N/M \leqslant 1$.

Начиная со статьи [30], в физической литературе появилось большое число работ, посвященных исследованию магнитно-блоховских электронов приближенными методами, однако строгие математические результаты здесь немногочисленны: см. обзор С. П. Новикова [2] и цитированную в нем литературу, а также статьи [42, 65–69]. Связь магнитных зон с блоховскими зонами для H при $\mathbf{B} = 0$ и соответственно тора $\mathbb{T}^2_\eta$ с зоной Бриллюэна обсуждалась в [43–45].

Изложенный выше способ описания спектра оператора $H = H_0 + V$ дает картину, в некотором смысле весьма неустойчивую относительно величины поля $\mathbf{B}$.

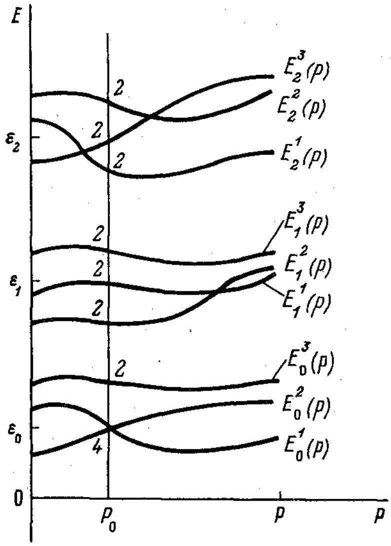

Рис.2. Расплывание уровней $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ при малом возмущении оператора H_0.

Например, сколь угодно малым изменением **B** (лишь бы η оставалось рациональным) число магнитных подзон можно сделать сколь угодно большим; сколь угодно большим можно сделать и кратность вырождения спектра H при фиксированном значении квазиимпульса. Сказанное, однако, вовсе не означает неустойчивости в наблюдаемых физических величинах [27]. Последние определяются плотностью состояний частицы, которая, как строго доказал Б. Саймон [46], непрерывно зависит от **B**. Величина лакун в спектре H также непрерывно меняется с величиной поля **B** [47, 48]. Эти результаты об устойчивости справедливы и для модели потенциалов нулевого радиуса [49]; более того, в этой модели спектр H устойчив как множество, точнее, он одновременно полунепрерывен сверху и снизу по $\mathbf{B}\,(\mathbf{B} \neq 0)$ в смысле определений из [38] (см. § 2.1, теорему 7). Полезно сравнить упомянутые результаты с поведением гамильтониана свободного электрона $-\Delta$ при включении однородного и постоянного электрического поля напряженности F : $\sigma(-\Delta) = [0, \infty)$, в то время как $\sigma(-\Delta + Fx) = (-\infty, \infty)$ при сколь угодно малом F. Тем не менее и в этом случае плотность состояний на полуоси $(-\infty, 0)$ стремится к нулю, когда $F \to 0$.

Наконец, здесь уместно упомянуть о том, что результаты о спектре периодического возмущения H_0,$H = H_0 + V$, в случае иррационального потока η весьма фрагментарны и получены в основном приближенными методами. В частности, численные расчеты указывают на правдоподобность гипотезы о фрактальном характере спектра H в этом случае [50–53] и др. Впрочем, применимость упомянутых приближенных результатов к исходному гамильтониану H ставится под сомнение [15].

6. Магнитно-блоховские функции оператора H_0. Зафиксируем решетку Λ с целым потоком $\eta = N$. *Магнитно-блоховской функцией* оператора, инвариантного относительно группы магнитных трансляций по решетке Λ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$, называется обобщенная собственная функция этого оператора, являющаяся одновременно собственной функцией всех магнитных трансляций $[\lambda,\zeta]$, $\lambda \in \Lambda$. Очевидно, всякая такая функция при действии на нее оператора $[\lambda,\zeta]$ умножается на характер $\chi([\boldsymbol{\lambda},\zeta];\mathbf{p})$, поэтому все магнитно-блоховские функции оператора H_0 параметризуются номером уровня Ландау l и точкой $\mathbf{p}$ тора $\mathbb{T}^2$. В этом смысле $\mathbf{p}$ играет роль квазиимпульса для оператора H_0 и его возмущений Λ-периодическими потенциалами. При фиксированных l и $\mathbf{p}$ магнитно-блоховские функции образуют N-мерное пространство. В результате, фиксируя номер уровня Ландау l, получаем N-мерное векторное расслоение M_l над тором $\mathbb{T}^2$ со слоем $\mathbb{C}^N$ (расслоение магнитно-блоховских функций уровня l). В представлении Ландау — Зака базис магнитно-блоховских функций уровня l_0 и квазиимпульса $\mathbf{p}$ образуют, очевидно, N функций

$$v_s(\mathbf{q},k,l) = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})\delta_{sk}\delta_{ll_0} \quad (s=0,\ldots,N-1).$$

Переходя с помощью формулы (1.26) к координатному представлению, получаем следующее утверждение:

Теорема 5. *В координатном представлении функции*

$$v_s(x,y;\mathbf{p},l_0) =$$
$$= N^{-1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i m(p_2+s)/N)\psi_0^*(x,y;p_1+m,l_0),$$
$$s=0,\ldots,N-1,$$

образуют базис в слое над $\mathbf{p},\mathbf{p}\in\mathbb{T}^2$, расслоения M_{l_0}.

При отождествлении элемента слоя с набором его координат $[\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}]$ в этом базисе функции склейки расслоения M_{l_0} имеют вид

$$([\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}];p_1+1,p_2) \simeq (X_1(\mathbf{p})[\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}];p_1,p_2),$$
$$([\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}];p_1,p_2+1) \simeq (X_2(\mathbf{p})[\alpha_0,\ldots,\alpha_{N-1}];p_1,p_2),$$

где матрицы $X_1(\mathbf{p})$ и $X_2(\mathbf{p})$ определяются так:

$$X_1(\mathbf{p}) = e^{-2\pi i p_2/N}\mathrm{diag}[1,e^{-2\pi i/N},\ldots,e^{-2\pi i(N-1)/N}],$$
$$X_2(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ I_{N-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Следствие. *Расслоение M_{l_0} нетривиально, его класс Чженя c_1 равен 1.*

Доказательство этих утверждений см. в [2, 42].

Отметим, что для оператора $H = H_0+V$, где V — Λ-периодический потенциал, число Чженя c_1 расслоения магнитно-блоховских функций некоторой магнитной подзоны интерпретируется как холловская проводимость этой подзоны [6, 54]. Тем самым отмеченное С. П. Новиковым сохранение суммы квантовых чисел c_1

„распадных“ законов дисперсии [2] имеет физический смысл сохранения холловской проводимости зоны Ландау при распаде ее на магнитные подзоны.

В случае произвольного рационального потока η можно ввести при фиксированном уровне Ландау l расслоение собственных функций H_0, преобразующихся по неприводимым представлениям группы W_η. На этом обобщении расслоения магнитно-блоховских функций мы не останавливаемся.

§ 2. Возмущение оператора Шрёдингера с магнитным полем периодическими потенциалами нулевого радиуса

1. Функция Грина возмущенного оператора. Здесь мы рассмотрим возмущение оператора H_0 бесконечной суммой потенциалов нулевого радиуса, сосредоточенных в узлах кристалла Γ с решеткой Браве Λ (см. § 0). Возмущенный оператор H формально можно записать в виде

$$H = H_0 + \sum_{\gamma\in\Gamma} \varepsilon_\gamma \delta(\mathbf{r} - \gamma), \tag{2.1}$$

где ε_γ — некоторые постоянные (константы связи). Наиболее простой и интуитивно ясный путь придать точный математический смысл выражению (2.1) — воспользоваться теорией расширений симметричных операторов в гильбертовом пространстве. Соответствующая этому пути техника и ее физическая мотивировка изложены в обзорной статье Б. С. Павлова [20]. В настоящем обзоре рассматриваются только расширения без выхода из пространства состояний $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Рассмотрим симметричный оператор S_Γ, являющийся сужением H_0 на область $\mathcal{D}(S_\Gamma) = \{f \in \mathcal{D}(H_0) : f(\gamma) = 0 \forall\gamma \in \Gamma\}$. Множество $\mathcal{D}(S_\Gamma)$ определено корректно, так как все функции из $\mathcal{D}(H_0)$ непрерывны. По определению класс всех самосопряженных расширений оператора S_Γ совпадает с классом операторов вида (2.1). При этом операторам, у которых все ε_γ отличны от нуля, соответствуют такие расширения $H \supset S_\Gamma$, что $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(S_\Gamma)$ (расширения H, удовлетворяющие последнему равенству, называются *дизъюнктными с* H_0). В дальнейшем будем рассматривать только дизъюнктные с H_0 расширения H; это, очевидно, не умаляет общности, так как дизъюнктности можно добиться, уменьшая Γ (в формальном выражении (2.1) это соответствует удалению из Γ тех точек γ, для которых $\varepsilon_\gamma = 0$). Впрочем, на константы ε_γ надо смотреть как на „бесконечно малые“ в некотором смысле величины (см. ниже).

Легко показать, что дефектное подпространство $\mathcal{N}_z = \operatorname{Ker}(S_\Gamma^* - z)$ $(z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ оператора S_Γ совпадает с замыканием линейной оболочки функций $g_\gamma(\cdot; z)$ $(\gamma \in \Gamma)$:

$$g_\gamma(\mathbf{r}; z) = G_0(\mathbf{r}, \gamma; z) \tag{2.2}$$

(G_0 определена формулой (1.2)). На самом деле эти функции образуют базис Рисса в $\mathcal{N}_z$ [55]. Это позволяет, пользуясь формулой М. Г. Крейна для резольвент, сразу выписать функцию Грина произвольного самосопряженного расширения H оператора S_Γ, дизъюнктного с H_0. Предварительно обозначим через $Q(z)$ $(z \notin \sigma(H_0))$ оператор в $l^2(\Gamma)$, имеющий матрицу

$$Q(\gamma,' \gamma; z) = \begin{cases} G_0(\gamma,' \gamma; z), & \gamma \neq' \gamma; \\ -(2\pi)^{-1}[\psi(1/2 - z/\omega) + \ln(c_0\pi|\xi|) + 2C_E), & \gamma =' \gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь $\psi(x)$ — логарифмическая производная Γ-функции, C_E — постоянная Эйлера, c_0 — некоторая константа, имеющая размерность площади. Как будет видно из дальнейшего, выбор конкретного значения этой константы фиксирует параметризацию самосопряженных расширений $H \supset S_\Gamma$; для удобства полагаем $c_0 = 1$. Диагональные матричные элементы $Q(\gamma, \gamma, z)$ получаются вычитанием расходящейся особенности функции Грина G_0 на диагонали $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) = -(2\pi)^{-1}[\ln(\pi|\xi|(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2) + \\ +\psi(1/2 - z/\omega) + 2C_E] + o(1), \quad |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \to 0. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) — это хорошо известная асимптотика функции $\Psi(a, 1; x)$ при $x \to 0$ ([25], т.1).

Теперь, пользуясь формулой М.Г.Крейна для бесконечного индекса дефекта (см.[56], элегантное доказательство этой формулы с помощью оператора граничных значений см. в [20]), получаем описание всех самосопряженных расширений оператора S_Γ, дизъюнктных с H_0, т.е. описание всех операторов, формально имеющих вид (2.1) с $\varepsilon_\gamma \neq 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$.

Теорема 6. *Следующая ниже формула*

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) - \\ - \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} [Q(z) + A]^{-1}(\gamma, \gamma') g_\gamma(\mathbf{r}; z) g^*_{\gamma'}(\mathbf{r}'; z^*) \tag{2.5}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между всеми самосопряженными (не обязательно ограниченными) операторами A в $l^2(\Gamma)$ и функциями Грина всевозможных самосопряженных расширений оператора S_Γ, дизъюнктных с H_0.

Оператор, для которого (2.5) является функцией Грина, будем обозначать H_A.

Замечание 1. Можно показать, что для каждого z, $\mathrm{Im} z \neq 0$, оператор $Q(z) + A$ имеет ограниченный обратный [56]; следовательно, ряд в (2.5), состоящий из операторов ранга 1, сходится в сильной операторной топологии.

Замечание 2. Теорема 6 и замечание 1 к ней остаются в силе и при $B = 0$, т.е. для гамильтониана свободной частицы $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$. В этом случае функция Грина оператора H_0, как хорошо известно, имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) = \pi^{-1} K_0(\sqrt{-2z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|), z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty),$$

где K_0 — функция Макдональда ([25], т.2). Формула (2.3) в данном случае приобретает вид

$$Q(\gamma,' \gamma; z) = \begin{cases} G_0(\gamma,' \gamma; z), \gamma \neq \gamma'; \\ -(2\pi)^{-1}[\ln(-z/2) + 2C_E], \gamma = \gamma'. \end{cases} \tag{2.3'}$$

Замечание 3. Если A — ограниченный оператор с диагональной матрицей $A(\gamma,' \gamma) = \alpha(\gamma)\delta_{\gamma\gamma'}$, то можно подобрать последовательность непрерывных положительных функций $(V_n(\mathbf{r}))_{n \geqslant 1}$, носители которых содержатся в общем компакте из $\mathbb{R}^2$, и последовательности чисел $(\varepsilon_\gamma^{(n)})_{n \geqslant 1}$, такие что 1) (V_n) сходится к δ-функции в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_\gamma^{(n)} = 0 \quad \forall\gamma$; 3) H_A есть сильный резольвентный предел последовательности самосопряженных операторов

$$H_0 + \sum_{\gamma \in \Gamma} \varepsilon_\gamma^{(n)} V_n(\mathbf{r} - \gamma). \tag{2.6}$$

Обратно, если H_A есть сильный резольвентный предел последовательности (2.6), в которой (V_n) — δ-образная последовательность, удовлетворяющая некоторым естественным ограничениям, то оператор A диагонален, а $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_\gamma^{(n)}=0$ при всех γ. В этом смысле константы связи ε_γ в (2.1) надо рассматривать как бесконечно малые величины. В ситуации, когда $\mathbf{B}=0$, доказательства сформулированных результатов можно найти в [21, 57], при этом имеет место даже равномерная сходимость резольвент. Доказательство для случая $\mathbf{B}\neq 0$ отличается от упомянутого лишь дополнительными техническими деталями. Еще один способ придать смысл формальному выражению (2.1) связан с нестандартным анализом, при этом ε_γ становятся „актуально бесконечно малыми" величинами; подробности см. в [70].

Приведенный Б.С.Павловым в [20] вывод формулы М.Г.Крейна позволяет дать следующую интерпретацию оператора A в (2.5). Так как $g_\gamma(\cdot;z)$ $(\gamma\in\Gamma)$ образуют базис Рисса в дефектном подпространстве $\mathcal{N}_z$, то функция f из $\mathcal{D}(S_\Gamma^*)$ имеет вблизи каждой точки γ, $\gamma\in\Gamma$, следующую асимптотику (см. (2.2),(2.4)):

$$f(\mathbf{r})=-\pi^{-1}a_\gamma(f)\ln|\mathbf{r}-\gamma|+b_\gamma(f)+o(1),\ \mathbf{r}\to\gamma; \tag{2.7}$$

при этом последовательности $a(f)=(a_\gamma(f))$ и $b(f)=(b_\gamma(f))$ принадлежат $l^2(\Gamma)$. Вычисления, аналогичные выполненным в [22] для трехмерного случая, приводят к формуле, задающей граничную форму оператора S_Γ^*:

$$\begin{aligned}&\langle S_\Gamma^* f|g\rangle-\langle f|S_\Gamma^* g\rangle=\\&=\sum_{\gamma\in\Gamma}[b_\gamma^*(f)a_\gamma(g)-a_\gamma^*(f)b_\gamma(g)].\end{aligned}$$

Теперь из результатов [20] следует, что оператор H_A есть сужение S_Γ^* на область $\{f\in\mathcal{D}(S_\Gamma^*):b(f)=Aa(f)\}$. Таким образом A является оператором граничных значений для S_Γ^*.

Интересно отметить, что в случае трехмерного оператора Шрёдингера с однородным магнитным полем $\mathbf{B}$ асимптотика функции $f\in\mathcal{D}(S_\Gamma^*)$ при $\mathbf{r}\to\gamma(\gamma\in\Gamma)$ имеет вид

$$\begin{aligned}&f(\mathbf{r})=(4\pi)^{-1}a_\gamma(f)|\mathbf{r}-\gamma|^{-1}(1+\\&+ic^{-1}\mathbf{A}(\gamma)(\mathbf{r}-\gamma))+b_\gamma(f)+o(1),\end{aligned} \tag{2.7$'$}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r})=\mathbf{B}\times\mathbf{r}/2$ [58,22]. В отличие от (2.7$'$) в (2.7) нет зависящего лишь от угловой переменной члена $(\mathbf{r}-\gamma)/|\mathbf{r}-\gamma|$. Различие этих двух формул объясняется следующим. Как в двумерном, так и в трехмерном случаях функция Грина оператора H_0 при фиксированном $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ имеет вид $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\exp(\pi i\xi(\mathbf{r}\times\mathbf{r}')\mathbf{k})F(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, где $F(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r}\to 0$ обладает асимптотикой функции Грина оператора Лапласа (соответствующей размерности). С учетом обозначений из § 1.1 при $\mathbf{r}\to\gamma$, очевидно, имеем $\exp(\pi i\xi(\mathbf{r}\times\gamma)\mathbf{k})=(1+ic^{-1}\mathbf{A}(\gamma)(\mathbf{r}-\gamma))+o(|\mathbf{r}-\gamma|)$. В двумерном случае $F(\mathbf{r})=\pi^{-1}\ln|\mathbf{r}|+O(1)$, и в формуле (2.7) член $i(\pi c)^{-1}\mathbf{A}(\gamma)(\mathbf{r}-\gamma)\ln|\mathbf{r}-\gamma|$ входит в $o(1)$, в то время как в трехмерном случае с учетом асимптотики $F(\mathbf{r})$ приходим к (2.7$'$).

Иногда равенство (2.5) удобно будет записывать в более компактной операторной форме. Для этого при любом z, $z\in\rho(H_0)$, определим оператор $\Gamma_z:l^2(\Gamma)\to L^2(\mathbb{R}^2)$ формулой

$$\Gamma_z\varphi=\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(\gamma)g_\gamma(\cdot;z),\varphi\in l^2(\Gamma). \tag{2.8}$$

Обозначим через $R_A(z)$ резольвенту оператора H_A; тогда формула (2.5) записывается в виде

$$R_A(z) = R_0(z) - \Gamma_z[Q(z)+A]^{-1}\Gamma^*_{z^*}. \tag{2.9}$$

В формуле (2.9) Γ_z и $Q(z)$ — не что иное, как Г-функция и Q-функция М.Г.Крейна для пары операторов H_A и H_0, а сама формула (2.9) есть стандартная запись формулы М.Г.Крейна для резольвент [56].

При фиксированном A оператор H_A зависит от величины поля $\mathbf{B}$, или, что то же самое, зависит от ξ : $H_A = H_A(\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R})$. Характер этой зависимости устанавливает следующая теорема, на доказательстве которой мы здесь не останавливаемся.

Теорема 7. *Семейство $H_A(\xi)$ непрерывно по ξ, $\xi \in \mathbb{R}$, в смысле сильной резольвентной сходимости. При любом ξ_0, $\xi_0 \neq 0$, семейство $H_A(\xi)$ продолжается в комплексную окрестность ξ_0 как голоморфное семейство в смысле Като* [38].

Следствие (*непрерывная зависимость спектра $H_A(\xi)$ от потока*). *Пусть I — замкнутый, а J — открытый ограниченные отрезки в $\mathbb{R}$, и пусть $I \cap \sigma(H_A(\xi_0)) = \varnothing$, $J \cap \sigma(H_A(\xi_0)) \neq \varnothing$. Тогда при всех вещественных ξ, достаточно близких к ξ_0, имеем $J \cap \sigma(H_A(\xi)) \neq \varnothing$, а если $\xi_0 \neq 0$, то и $I \cap \sigma(H_A(\xi)) = \varnothing$.*

Из этого следствия вытекает, в частности, упомянутая выше непрерывная зависимость лакун спектра H_A от поля $\mathbf{B}$ при $B \neq 0$.

Заметим далее, что все приведенные в этом пункте результаты справедливы для любого множества Г, $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего условию равномерной дискретности:

$$\inf\{|\gamma - \gamma'| : \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'\} > 0.$$

В частности, Г может быть конечным множеством, или квазикристаллом, или решеткой Пенроуза (определение последних см., например, в [59], с.422). Приведем еще один результат, представляющий интерес в теории неупорядоченных сред (кроме того, он нам понадобится в п.4).

Теорема 8. *Пусть Г — равномерно дискретное подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, $n(R)$ — число точек из Г, лежащих в круге $x^2 + y^2 < R^2$, $c_\Gamma = \liminf n(R)/\pi R^2$. Если $c_\Gamma > |\xi|$, то для любого самосопряженного оператора A в $l^2(\Gamma)$ операторы H_0 и H_A не имеют общих собственных функций с собственным числом ε_0.*

Доказательство теоремы см. в Приложении. Заметим лишь, что в этой теореме H_A моделирует движение заряженной частицы в однородном магнитном поле и в поле хаотически расположенных примесей; величина c_Γ характеризует плотность примесей.

В следующем пункте мы перейдем к вопросу об инвариантности оператора H_A относительно магнитных трансляций по решетке Λ, при этом, очевидно, нужно ограничиться рассмотрением кристаллов Г, для которых Λ — решетка Браве.

2. Представление группы W_η^e в $l^2(\Gamma)$; W_η-инвариантные операторы H_A. Прежде чем сформулировать критерий инвариантности оператора H_A относительно дискретной группы магнитных трансляций W_η, определим представление D этой группы в пространстве комплексных функций на Г формулой, аналогичной (1.13):

$$(D(\boldsymbol{\lambda}, \zeta)\varphi)(\gamma) = \zeta \exp(-\pi i \gamma \wedge \boldsymbol{\lambda})\varphi(\gamma - \boldsymbol{\lambda}). \tag{2.10}$$

Операторы $D(\boldsymbol{\lambda},\zeta)$ этого представления будем по-прежнему обозначать $[\boldsymbol{\lambda},\zeta]$. Очевидно, (2.10) задает точное унитарное представление группы W_η в $l^2(\Gamma)$.

Пусть теперь V — линейный ограниченный оператор в пространстве $l^2(\Gamma)$ с матрицей $V(\gamma,'\gamma)$; легко видеть, что для любого оператора $[\boldsymbol{\lambda},\zeta]$ справедлива формула

$$[\boldsymbol{\lambda},\zeta]V[\boldsymbol{\lambda},\zeta]^{-1}(\gamma,'\gamma) = \\ = \exp(-\pi i\xi(\gamma-\gamma')\wedge\boldsymbol{\lambda})V(\gamma-\boldsymbol{\lambda}),'\gamma-\gamma')-\boldsymbol{\lambda}). \tag{2.11}$$

Следовательно, V D-инвариантен в том и только в том случае, когда

$$V(\gamma-\boldsymbol{\lambda},\gamma'-\boldsymbol{\lambda}) = \exp(\pi i\xi(\gamma-\gamma')\wedge\boldsymbol{\lambda})V(\gamma,\gamma') \tag{2.12}$$

для всех $\gamma,\gamma'\in\Gamma$, $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$.

Теперь сформулируем следующую теорему, доказательство которой сводится к простым вычислениям, использующим формулы (1.14) и (2.11).

Теорема 9. *Для того чтобы H_A был T-инвариантным оператором, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был D-инвариантным.*

Далее на протяжении всей статьи предполагается, что оператор A в $l^2(\Gamma)$ подчинен следующим условиям:

1) A ограничен и самосопряжен; 2) A инвариантен относительно представления D группы W_η; 3) матрица $A(\gamma,\gamma')$ оператора A при некоторых c_1, $c_2>0$ удовлетворяет неравенству

$$|A(\gamma,0)|\leqslant c_1\exp(-c_2|\gamma|)\quad\forall\gamma\in\Gamma. \tag{2.13}$$

Это неравенство обеспечит в дальнейшем вещественную аналитичность функций, на анализе которых основано исследование спектра оператора H_A. Условиям 1)–3) удовлетворяет, например, диагональный оператор A, имеющий матрицу вида $A(\gamma,\gamma')=\alpha(\varkappa)\delta_{\gamma\gamma'}$; здесь $\alpha(\varkappa)(\varkappa\in K)$ — произвольный набор вещественных чисел, при этом $\varkappa$ однозначно определяется по γ из разложения $\gamma=\boldsymbol{\lambda}+\varkappa$, $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$, $\varkappa\in K$ (см. § 0). Диагональный операторA описывает кристалл, в котором пренебрегают взаимодействием между потенциальными ямами нулевого радиуса, сосредоточенными в его узлах. Именно такие операторы используются в моделях типа модели Кронига–Пенни [20,21]. Еще один пример операторов, удовлетворяющих условиям 1)–3) дает оператор $Q(z)$ при любом $z\in\rho(H_0)$. Более того, справедлива следующая лемма

Лемма 1. *Пусть X — компактное подмножество $\mathbb{C}$, тогда найдутся такие постоянные c_1, $c_2>0$, что*

$$|Q(\gamma,0;z)/\Gamma(1/2-z/\omega)|\leqslant c_1\exp(-c_2|\gamma|)\quad\forall\gamma\in\Gamma,\ z\in X.$$

Доказательство леммы легко получается применением формул (1.2) и (2.3) с учетом асимптотики функции $\Psi(a,1;x)$ при $x\to\infty$ ([25], т.1, с.266) и характера полюсов функций $\Gamma(z)$ и $\psi(z)$.

В следующих пунктах мы перейдем к спектральному анализу оператора H_A. Формула М.Г.Крейна (2.9) показывает, что число z, $z\in\rho(H_0)$, тогда и только тогда принадлежит спектру $\sigma(H_A)$, когда оператор $Q(r)+A$ не имеет ограниченного обратного. Случай $z\in\sigma(H_0)$ требует специального рассмотрения, при этом оказывается необходимым разложение оператора H_A в прямой интеграл по тору квазиимпульсов (см. § 1.5). Получение этого разложения сводится по существу к разложению оператора $Q(z)+A$ в прямой интеграл по спектру представления D. Понимание общей картины существенно облегчается, если рассмотреть предварительно случай целого потока η и одноатомной решетки Γ. В этом случае группа W_η коммутативна, и разложение ее представления D на неприводимые сводится с точностью до несущественных деталей к обычному анализу Фурье в гильбертовом пространстве $l^2(\Lambda)$.

3. Спектральный анализ оператора H_A в случае целого потока и одноатомного кристалла. В рассматриваемом случае $\eta = N (N \geqslant 1)$, $\Gamma = \Lambda$. Формула (2.12), очевидно, справедлива для $Q(z)$, поэтому для оператора $F = Q(z)+A$ имеем

$$F(\gamma-\boldsymbol{\lambda}, \gamma'-\boldsymbol{\lambda}) = \exp[\pi i N((\gamma_1-\gamma_1')\lambda_1 + (\gamma_2-\gamma_2')\lambda_2)]F(\gamma,'\gamma).$$

Тем самым при четном N оператор F инвариантен относительно сдвигов в $l^2(\Lambda)$ и обычным преобразованием Фурье $\mathcal{F} : l^2(\Lambda) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ приводится к оператору умножения на функцию. Такое приведение можно сделать и в случае нечетного N, если в качестве ортонормального базиса в $L^2(\mathbb{T}^2)$ взять характеры группы W_η. Итак, при любом N берем базис в $L^2(\mathbb{T}^2)$, состоящий из функций

$$e_\lambda(\mathbf{p}) = \exp(-2\pi i(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + N\lambda_1\lambda_2/2)), \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, \tag{2.14}$$

(см. (1.18)). Обозначим через $\mathcal{F}_\eta$ преобразование Фурье $\mathcal{F}_\eta : l^2(\Gamma) \to L^2(\mathbb{T}^2)$, заданное этим базисом:

$$\mathcal{F}_\eta\varphi(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\boldsymbol{\lambda})e_\lambda(\mathbf{p}) \quad (\varphi \in l^2(\Gamma) = l^2(\Lambda)). \tag{2.15}$$

Если V — D-инвариантный линейный ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$, то через $\tilde{V}$ будем обозначать его преобразование Фурье: $\tilde{V} = \mathcal{F}_\eta V \mathcal{F}_\eta^{-1}$. Очевидно, $\tilde{V}$ есть оператор умножения на функцию $\tilde{V}(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^2$, определяемую формулой

$$\tilde{V}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} V(\boldsymbol{\lambda}, 0)e_\lambda(\mathbf{p}). \tag{2.16}$$

Если $V = Q(z)+A$, то функция $\tilde{V} = \tilde{Q}(z) + \tilde{A}$ обладает свойствами, сформулированными в следующей лемме (доказательство ее немедленно вытекает из (2.13), (2.14), (2.16) и леммы 1).

Лемма 2. *Пусть функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ и $\tilde{A}(\mathbf{p})$ определены формулой* (2.16) *при всех $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ из $\mathbb{R}^2$. Тогда эти функции вещественно-аналитические по переменным $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, а функция $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)/\Gamma(1/2 - z/\omega)$ аналитична по $z \in \mathbb{C}$. Тем самым при фиксированном $\mathbf{p}$ функция $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ мероморфна по z и может иметь только простые полюсы, совпадающие с некоторыми из уровней Ландау ε_l.*

С учетом описания $\sigma(H_A) \cap \rho(H_0)$, данного в конце п.2, лемма 2 показывает, что из чисел E, лежащих в $\mathbb{R} \cap \rho(H_0)$, те и только те принадлежат спектру $\sigma(H_A)$, которые при некотором $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$ удовлетворяют уравнению

$$\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tilde{A}(\mathbf{p}) = 0. \tag{2.17}$$

(Для справедливости этого вывода достаточно было бы непрерывности левой части (2.17) по $\mathbf{p}$; вещественная аналитичность нужна для доказательства абсолютной непрерывности той части спектра $\sigma(H_A)$, которая определяется непостоянными решениями $E = E(\mathbf{p})$ уравнения (2.17)).

Уравнение (2.17) называют *дисперсионным уравнением* гамильтониана H_A. Как будет видно из дальнейшего, оно определяет многозначную неявную функцию $E = E(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^2$, однозначные ветви которой называют в согласии с изложенными в § 1.5 законами дисперсии для H_A. Однако вопрос о принадлежности точки ε_l спектру $\sigma(H_A)$ не может быть решен с помощью уравнения (2.17), для этого нужно рассмотреть разложение H_A в прямой интеграл по тору квазиимпульсов $\mathbb{T}^2$ (§ 1.5). Впрочем, это разложение нужно и для детального исследования всего спектра оператора H_A, а также для нахождения его собственных функций. Сейчас мы приступим к поиску явного вида разложения резольвенты $R_A(z)$ оператора H_A по тору квазиимпульсов.

Оператор $R_A(z)$ диагонализируется преобразованием Ландау — Зака

$$\mathcal{L}_\eta : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N}) = \int_{\mathbb{T}_\eta}^{\oplus} \tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

(см. § 1.5). Воспользуемся теперь формулой (2.9). Обозначим

$$\tilde{R}_A(z) = \mathcal{L}_\eta R_A(z) \mathcal{L}_\eta^{-1}, \tilde{R}_0(z) = \mathcal{L}_\eta R_0(z) \mathcal{L}_\eta^{-1}, \tilde{\Gamma}_z = \mathcal{L}_\eta \Gamma_z \mathcal{F}_\eta^{-1},$$

тогда $\tilde{\Gamma}_z^* = \mathcal{F}_\eta \Gamma_z^* \mathcal{L}_\eta^{-1}$. С учетом введенного выше обозначения $\tilde{V} = \mathcal{F}_\eta V \mathcal{F}_\eta^{-1}$ формулу (2.9) можно переписать так

$$\tilde{R}_A(z) = \tilde{R}_0(z) - \tilde{\Gamma}_z[\tilde{Q}(z) + \tilde{A}]^{-1} \tilde{\Gamma}_{z^*}^*. \tag{2.18}$$

Поскольку явный вид оператора $\tilde{Q}(z) + \tilde{A}$ нам известен, осталось найти явные выражения для ядер операторов $\tilde{R}_0(z), \tilde{\Gamma}_z$ и $\tilde{\Gamma}_z^*$. Так как $\tilde{H}_0$ $(\tilde{H}_0 = \mathcal{L}_\eta H_0 \mathcal{L}_\eta^{-1})$ есть оператор послойного умножения на постоянную последовательность $(\varepsilon_l)_{l \geqslant 0}$, то $\tilde{R}_0(z)$ действует в каждом слое как оператор умножения на последовательность $(\varepsilon_l - z)_{l \geqslant 0}^{-1}$, таким образом, $\tilde{R}_0(z)$ имеет ядро

$$G_0(\mathbf{p}, k, l; \mathbf{p}', k' l'; z) = \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{kk'}\delta_{ll'}}{\varepsilon_l - z},$$
$$\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{T}^2; k, k' = 0, \ldots, N-1; l, l' = 0, 1, \ldots \tag{2.19}$$

Для нахождения явного вида оператора $\tilde{\Gamma}_z$ воспользуемся формулой (2.8). Пусть $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$, $\varphi = \mathcal{F}_\eta^{-1} f$ $(\varphi \in l^2(\Gamma))$. Тогда $\Gamma_z \varphi = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma) g_\gamma(\cdot; z)$, поэтому

$$\mathcal{L}_\eta \Gamma_z \varphi = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma) \tilde{g}_\gamma(\cdot; z), \tag{2.20}$$

где $\tilde{g}_\gamma(\cdot; z)$ обозначает функцию $\mathcal{L}_\eta g_\gamma(\cdot; z)$ $(\tilde{g}_\gamma(\cdot; z) \in L^2(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{C}^M \otimes l^2(\mathbb{N}))$. Из формулы (1.25) с учетом (2.2) и очевидного равенства

$$\int_{\mathbb{R}^2} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; z) \psi_0(\mathbf{r}'; q, l) d\mathbf{r}' = (\varepsilon_l - z)^{-1} \psi_0(\mathbf{r}; q, l),$$

получаем

$$\tilde{g}_\gamma(\mathbf{p}; k, l; z) =$$
$$= (\varepsilon_l - z)^{-1} N^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n(p_2 + k)/N)\psi_0^*(\gamma; p_1 + n, l). \tag{2.21}$$

Эта формула имеет простой смысл. А именно обозначим

$$\tilde{\delta}_\gamma(\mathbf{p}; k, l) =$$
$$= N^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n(p_2 + k)/N)\psi_0^*(\gamma; p_1 + n, l). \tag{2.22}$$

Очевидно, функция $\tilde{\delta}_\gamma$ представляет собой преобразование Ландау — Зака δ-функции $\delta(\mathbf{r} - \gamma)$. Из (2.21) и (2.22) вытекает, что $\tilde{g}_\gamma(\cdot; z) = (\varepsilon_l - z)^{-1}\tilde{\delta}_\gamma$; это равенство выражает тот факт, что $g_\gamma(\cdot, z)$ (формально) получается действием резольвенты $R_0(z)$ на δ-функцию $\delta(\mathbf{r} - \gamma)$ (см.(2.2)). Отметим, что (2.22) с учетом явного вида функций Ландау (1.4) приводит к следующему утверждению.

Лемма 3. *При любых фиксированных γ, k и l функция $\tilde{\delta}_\gamma(\mathbf{p}, k, l)$ вещественно-аналитична по p_1, $p_2 \in \mathbb{R}$.*

Из (2.2) немедленно вытекает, что под действием магнитных трансляций $[\mathbf{v}, \zeta]$ $((\mathbf{v}, \zeta) \in W(\xi))$ функции $g_\mathbf{a}(\mathbf{r}; z) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{a}; z)(\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2)$ преобразуются следующим образом:

$$[\mathbf{v}, \zeta] g_\mathbf{a} = \zeta \exp(-\pi i \xi \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}) g_{\mathbf{a}+\mathbf{v}}. \tag{2.23}$$

Тем самым

$$\tilde{g}_{\lambda+\gamma} = \exp(\pi i \xi \boldsymbol{\lambda} \wedge \gamma)[\boldsymbol{\lambda}, 1]\tilde{g}_\gamma.$$

Здесь оператор $[\boldsymbol{\lambda}, 1](\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda)$ действует в пространстве $L^2(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N})$ умножением на характер $\chi((\boldsymbol{\lambda}, 1); \mathbf{p}) = e_\lambda(\mathbf{p})$. Следовательно, при $\gamma = 0$ из предыдущей формулы имеем

$$\tilde{g}_\lambda(\mathbf{p}; k, l; z) = e_\lambda(\mathbf{p})\tilde{g}_0(\mathbf{p}; k, l; z). \tag{2.24}$$

Подставляя (2.24) в (2.20) и учитывая вид преобразования $\mathcal{F}_\eta$ (2.15), получаем, наконец, равенство

$$(\tilde{\Gamma}_z f)(\mathbf{p}; k, l) = \tilde{g}_0(\mathbf{p}; k, l; z) f(\mathbf{p}) \tag{2.25}$$

($f \in L^2(\mathbb{T}^2)$). Очевидно, сопряженный к $\tilde{\Gamma}_z$ оператор $\tilde{\Gamma}_z^*$ действует так:

$$(\tilde{\Gamma}_z^* \varphi)(\mathbf{p}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{g}_0^*(\mathbf{p}; k, l; z)\varphi(\mathbf{p}; k, l) \tag{2.26}$$

($\varphi \in L^2(\mathbb{T}^2) \otimes \mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N})$). Подставляя в (2.18) ядра (2.19), (2.25) и (2.26), получаем искомое ядро $G(\mathbf{p}; k, l; k', l'; z)$ резольвенты $\tilde{R}_A(z)$ в слое $\mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N})$ над точкой $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$:

$$G(\mathbf{p}; k, l; k', l'; z) = (\varepsilon_l - z)^{-1}\delta_{kk'}\delta_{ll'} -$$
$$-[\tilde{Q}(\mathbf{p}; z) + \tilde{A}(\mathbf{p})]^{-1} \frac{\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; k, l)}{\varepsilon_l - z} \frac{\tilde{\delta}_0^*(\mathbf{p}; k', l')}{\varepsilon_{l'} - z}. \tag{2.27}$$

Спектральный анализ оператора H_A в дальнейшем полностью опирается на формулу (2.27). При этом ключевую роль будут играть формула

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z}(\mathbf{p};z)=\sum_{l=0}^{\infty}(\varepsilon_l-z)^{-2}\sum_{k=0}^{N-1}|\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};k,l)|^2 \tag{2.28}$$

и асимптотика

$$\tilde{Q}(\mathbf{p};z)=-(2\pi)^{-1}[\psi(1/2-z/\omega)+\ln(\pi|\xi|)+2C_E]+O(r(z)), \tag{2.29}$$

где $r(z)\to 0$ при $\mathrm{Re}z\to-\infty$ равномерно по $\mathbf{p}$ из любого компакта в $\mathbb{R}^2$. Равенство (2.28) — это известное соотношение $dQ/dz=\Gamma^*_{\bar z}\Gamma_z$ [56], переписанное в терминах ядер $\tilde{Q}$ и $\tilde{\Gamma}_z$(см. (2.25), (2.26) с учетом (2.21), (2.22)). Асимптотика (2.29) легко получается из формулы (2.3).

Прежде чем исследовать спектр H_A, займемся изучением спектра слоя $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ оператора $\tilde{H}_A$ над точкой $\mathbf{p}\in\mathbb{T}^2$, пользуясь его функцией Грина (2.27). Очевидно, в спектр $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ входят все решения E дисперсионного уравнения (2.17) ($E\neq\varepsilon_l\quad\forall l$) и, возможно, точки ε_l. Положение корней уравнения (2.17) легко определить, исследовав поведение функции $\tilde{Q}(\mathbf{p};E)$ при $E\in\mathbb{R}$. Прежде всего формула (2.28) показывает, что $\tilde{Q}(\mathbf{p};\cdot)$ имеет полюсы в тех точках ε_l, для которых соответствующий вектор $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p},\cdot,l)$ ненулевой. В связи с этим убедимся вначале, что для п.в. $\mathbf{p}\in\mathbb{T}^2$ имеем $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};\cdot,l)\neq 0\quad\forall l=0,1,\ldots$ Обозначим

$$U_l=\{\mathbf{p}\in\mathbb{T}^2:\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};\cdot,l)\neq 0\}\quad(l\in\mathbb{N}). \tag{2.30}$$

Очевидно, $U_l\neq\varnothing\quad\forall l$, иначе из (1.4) и (2.22) вытекало бы, что некоторый многочлен Эрмита имеет бесконечное число нулей. В силу леммы 3 U_l — всюду плотное открытое множество полной меры, поэтому $\bigcap\limits_{l\geqslant 0}U_l$ тоже имеет полную меру. (Можно доказать, кроме того, что $\bigcup\limits_{l\geqslant 0}U_l=\mathbb{T}^2$, см. предложение 10).

Итак, зафиксируем $\mathbf{p}\in\mathbb{T}^2$ и обозначим через $\varepsilon_{l_0},\varepsilon_{l_1},\ldots$ строго возрастающую последовательность уровней Ландау, являющихся полюсами функции $\tilde{Q}(\mathbf{p};\cdot)$; будем считать, не умаляя общности, эту последовательность бесконечной. Формула (2.28) показывает, что при вещественных $E\ \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial E}(\mathbf{p};E)>0$, следовательно, $\tilde{Q}(\mathbf{p};E)$ строго возрастает на отрезках $(-\infty,\varepsilon_{l_0})$, $(\varepsilon_{l_0},\varepsilon_{l_1}),\ldots$, причем $|\tilde{Q}(\mathbf{p};E)|\to\infty$ при $E\to\varepsilon_{l_i}$. Из (2.29) вытекает, что $\tilde{Q}(\mathbf{p};E)\to-\infty$ при $E\to-\infty$. Схематически поведение функции $\tilde{Q}(\mathbf{p};E)$ от E при фиксированном $\mathbf{p}$ изображено на рис.3. Таким образом, на каждом из отрезков $(-\infty,\varepsilon_{l_0})$, $(\varepsilon_{l_0},\varepsilon_{l_1}),\ldots$ дисперсионное уравнение (2.17) имеет единственное решение. Последовательность полученных решений обозначим $E_{l_0}(\mathbf{p})$, $E_{l_1}(\mathbf{p}),\ldots$ Каждое из этих чисел, отличных от всех ε_l, — невырожденное собственное значение оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$. Собственный вектор, соответствующий собственному числу $E_{l_i}(\mathbf{p})$, есть последовательность $((\varepsilon_l-E_{l_i}(\mathbf{p}))^{-1}\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};k,l))_{k,l}$ из $\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{N})$. Эти утверждения вытекают из общих свойств Q и Г-функций М.Г.Крейна (см., например, [55], теорема 1).

Зафиксируем теперь произвольный уровень Ландау ε_m и обозначим $P=-\mathrm{Res}((\tilde{H}_A(\mathbf{p})-z)^{-1};\varepsilon_m)$, $P_0=-\mathrm{Res}((\tilde{H}_0(\mathbf{p})-z)^{-1};\varepsilon_m)$. Тогда P_0 — ортопроектор на собственное подпространство оператора $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$, соответствующее собственному числу ε_m, т.е. на подпространство $\mathbb{C}^N\otimes e_m$ пространства $\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{N})$. Если ε_m — собственное число оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$, то P — ортопроектор на соответствующее

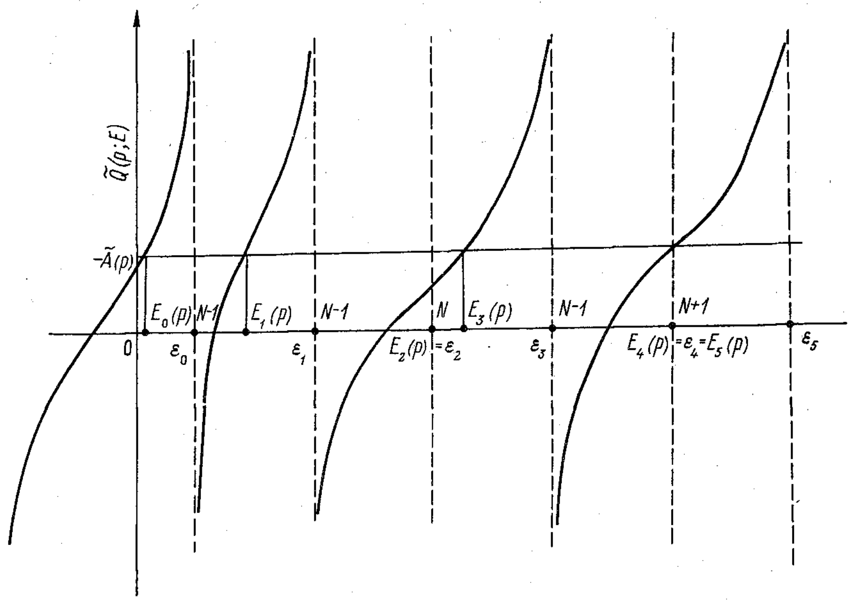

Рис.3.

собственное подпространство, в противном случае $P = 0$. Обозначим $S = P - P_0$; таким образом, S — это вычет в точке $z = \varepsilon_m$ второго слагаемого в правой части формулы (2.27). Возможны следующие случаи: 1)$\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};\cdot,m) \neq 0$; 2)$\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};\cdot,m) = 0$, $\tilde{Q}(\mathbf{p};\varepsilon_m) + \tilde{A}(\mathbf{p}) \neq 0$; 3)$\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};\cdot,m) = 0$, $\tilde{Q}(\mathbf{p};\varepsilon_m) + \tilde{A}(\mathbf{p}) = 0$. Напомним, что в случае 1) точка $z = \varepsilon_m$ — полюс первого порядка функции $\tilde{Q}(\mathbf{p};z)$, а в случаях 2) и 3) — устранимая особая точка этой функции.

Рассмотрим случай 1). Из формул (2.27) и (2.28) немедленно получаем, что $S = -P_1$, где P_1 — ортопроектор на одномерное подпространство в $\mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N})$, натянутое на вектор $a_m = (\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};k,m)\delta_{ml})_{k,l}$. Тем самым в случае 1) P есть ортопроектор на ортогональное дополнение вектора a_m в пространстве $\mathbb{C}^N \otimes e_m$. Следовательно, при $N = 1$ ε_m не входит в спектр $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$, а при $N > 1$ — является собственным числом оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ кратности $N - 1$. Аналогично исследуются случаи 2) и 3). Результаты этого исследования резюмирует следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть поток η — целый: $\eta = N$, а решетка Γ одноатомная: $\Gamma = \Lambda$. Зафиксируем $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$, и пусть $\varepsilon_{l_0} < \varepsilon_{l_1} < \cdots < \varepsilon_{l_i} < \ldots$ — все те собственные числа Ландау ε_l, для которых вектор $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p};\cdot,l)$ из $\mathbb{C}^N \otimes e_l$ ненулевой. Тогда спектр оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ дискретный, его образуют два (возможно, пересекающиеся) множества:*

1. Собственные значения $E_{l_i}(\mathbf{p})$, расположенные так, что $E_{l_0}(\mathbf{p}) < \varepsilon_{l_0} < E_{l_1}(\mathbf{p}) < \varepsilon_{l_1} < \cdots < E_{l_i}(\mathbf{p}) < \varepsilon_{l_i} < \ldots$ Множество собственных значений $E_{l_i}(\mathbf{p})$ совпадает с множеством корней дисперсионного уравнения (2.17). Если $E_{l_i}(\mathbf{p})$ отлично от всех *чисел Ландау* ε_l *(что всегда так для п.в.* $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$*), то это — простое собственное значение с собственным вектором* $((\varepsilon_l - E_{l_i}(\mathbf{p}))^{-1}\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; k, l))_{k,l}$.

2. Собственные числа Ландау ε_l*, кратность которых* d_l *в спектре* $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ *определяется следующим образом:*

(i) *если* $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; \cdot, l) \neq 0$*, то* $d_l = N - 1$;

(ii) *если* $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; \cdot, l) = 0$*, но* $\tilde{Q}(\mathbf{p}; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}) \neq 0$*; то* $d_l = N$;

(iii) *если* $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; \cdot, l) = 0$ *и* $\tilde{Q}(\mathbf{p}; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}) = 0$*, то* $d_l = N + 1$.

Собственное подпространство, соответствующее ε_l*, в случае* (i) *есть ортогональное дополнение вектора* $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; \cdot, l)$ *в* $\mathbb{C}^N \otimes e_l$*; в случае* (ii) *есть* $\mathbb{C}^N \otimes e_l$*; а в случае* (iii) *есть линейная оболочка* $\mathbb{C}^N \otimes e_l$ *и вектора* $((\varepsilon_m - \varepsilon_l)^{-1}\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; k, m))_{k,m}$ *(в этом выражении считаем* $0^{-1} \cdot 0 = 0$*). Последний вектор является одновременно и собственным вектором, соответствующим одному из чисел* $E_{l_i}(\mathbf{p})$.

Перейдем теперь к описанию спектра оператора H_A, $H_A \simeq \int_{\mathbb{T}^2}^{\oplus} \tilde{H}_A(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}$. В дополнение к (2.30) обозначим $U_{-1} = \mathbb{T}^2$, кроме того, обозначим $\varepsilon_{-1} = -\infty$. Теорема о неявной функции показывает, что дисперсионное уравнение (2.17) определяет на открытом множестве $U_{l-1} \cap U_l$ вещественно-аналитическую функцию $E = E_l(\mathbf{p})$ такую, что $\varepsilon_{l-1} < E_l(\mathbf{p}) < \varepsilon_l$. Из ограниченности функции $\tilde{A}(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^2$ и формулы (2.29) вытекает, что $\inf E_0(\mathbf{p}) > -\infty$; таким образом, каждая функция $E_l(\mathbf{p})$ ограничена в своей области определения. На самом деле $E_l(\mathbf{p})$ продолжается до непрерывной функции на всем торе $\mathbb{T}^2$.

Предложение 4. *Каждая функция* $E = E_l(\mathbf{p})$ *продолжается по непрерывности на весь тор* $\mathbb{T}^2$*. Продолженные функции (обозначаемые снова* $E_l(\mathbf{p})$*) обладают свойствами:*

1. *Если* $\varepsilon_{l-1} < E_l(\mathbf{p}) < \varepsilon_l$*, то* $E_l(\mathbf{p})$ *— единственный корень уравнения* (2.17)*, лежащий в промежутке* $(\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l)$.
2. *Если* ε_l *— полюс функции* $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$*, то* $E_l(\mathbf{p}) < \varepsilon_l < E_{l+1}(\mathbf{p})$.
3. *Пусть* ε_l *не является полюсом функции* $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$*; тогда*
если $\tilde{Q}(\mathbf{p}; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}) < 0$*, то* $E_l(\mathbf{p}) = \varepsilon_l < E_{l+1}(\mathbf{p})$;
если $\tilde{Q}(\mathbf{p}; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}) > 0$*, то* $E_l(\mathbf{p}) < \varepsilon_l = E_{l+1}(\mathbf{p})$;
если $\tilde{Q}(\mathbf{p}; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}) = 0$*, то* $E_l(\mathbf{p}) = \varepsilon_l = E_{l+1}(\mathbf{p})$.

Доказательство этого предложения см. в Приложении. Различные возможности поведения функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; E)$ и расположения чисел $E_l(\mathbf{p})$ при фиксированном $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$, иллюстрирует рис.3. Над точкой ε_l поставлена кратность собственного числа ε_l в спектре $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$. Этот рисунок вместе с теоремой 10 и предложением 4 дает следующую наглядную картину образования спектра оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$. Если кривая $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\mathbf{p}; E)$ пересекает прямую $E = \varepsilon_l$ *выше* прямой $\tilde{Q} = -\tilde{A}(\mathbf{p})$ или асимптотически подходит к прямой $E = \varepsilon_l$, то по этой кривой „скатывается“ один из N уровней Ландау E_l, пока не достигнет прямой $\tilde{Q} = -\tilde{A}(\mathbf{p})$, на которой он и „задерживается“. Эта интуитивная картина позволяет легко подсчитывать кратности собственных чисел в спектре $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$, а также понять поведение спектра $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ и в случае n-атомного кристалла или произвольного рационального потока η.

Обозначим через J_l отрезок $\{E_l(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \mathbb{T}^2\}$. Будем называть этот отрезок l-й *зоной Ландау (магнитной зоной)*; это согласуется с терминологией, введенной в

§ 1.5. Очевидно, J_l замкнут, ограничен, и $J_l \subset [\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l]$. Функция $E = E_l(\mathbf{p})$ будет называться законом дисперсии l-й зоны Ландау.

Рассмотрим вопрос о том, могут ли среди функций $E_l(\mathbf{p})$ быть постоянные, т.е. может ли некоторая зона Ландау J_l вырождаться в точку?

Предложение 5. *Оператор H_A не может иметь более одной вырожденной зоны, и для любого E, $E \in \mathbb{R}\backslash\sigma(H_0)$, найдется такой оператор H_A, для которого $\{E\}$ — вырожденная зона. Если A диагонален, то H_A не имеет вырожденных зон.*

Доказательство. Пусть $E \in \mathbb{R}\backslash\sigma(H_0)$, положим $A = -Q(E)$. Очевидно, $\{E\}$ — вырожденная зона Ландау для H_A. Допустим теперь, что некоторый оператор H_A имеет две вырожденные зоны $\{E_1\}$ и $\{E_2\}$, $E_1 \neq E_2$. Тогда $Q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'; E_1) = Q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'; E_2) \quad \forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}' \in \Lambda$. Воспользуемся теперь асимптотикой

$$\Psi(a, 1; x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(a)_m^2}{m!} x^{-a-m} + O(x^{-a-M-1}), \tag{2.31}$$

$x \to +\infty$([25], т.1). Полагая в этой формуле $a_i = 1/2 - E_i/\omega\,(i = 1,2)$ с учетом формул (2.3) и (1.2), получаем противоречие. Наконец, если A диагонален: $A(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}') = \alpha\delta_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}'}$, то из выполнения равенства $\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \alpha = 0$ при всех $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$ вытекало бы, что $Q(\boldsymbol{\lambda}, 0; E) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \neq 0$ (см.(2.16)), что опять противоречит (2.31). Предложение доказано.

Теперь, используя свойства спектра прямого интеграла операторов (см., например, § XIII.16 в [10]), можно дать полное описание спектра H_A в рассматриваемом случае.

Теорема 11. *Пусть поток η целый: $\eta = N$, а решетка Γ одноатомная: $\Gamma = \Lambda$. Тогда спектр H_A существенный и не имеет сингулярно непрерывной компоненты: $\sigma(H_A) = \sigma_{\text{ess}}(H_A)$, $\sigma_{\text{sc}}(H_A) = \varnothing$. При этом $\sigma(H_A)$ представим в виде объединения $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ двух (возможно, пересекающихся) частей.*

1. Зонная часть спектра Σ_1 есть объединение зон Ландау: $\Sigma_1 = \bigcup_{l=0}^{\infty} J_l$. Зона J_l представляет собой отрезок, лежащий в $[\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l]$ и являющийся множеством значений непрерывной функции $E = E_l(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^2$ — ветви многозначной функции, определяемой дисперсионным уравнением $\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tilde{A}(\mathbf{p}) = 0$. Каждая функция $E_l(\mathbf{p})$ вещественно-аналитична на открытом множестве полной меры в $\mathbb{T}^2$. Для того чтобы отрезки J_l и J_{l+1} имели общий конец, необходимо и достаточно, чтобы точка $z = \varepsilon_l$ не была полюсом функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ при двух (не обязательно различных) значениях квазиимпульса $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ таких, что

$$\tilde{Q}(\mathbf{p}_1; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}_1) \geqslant 0, \quad \tilde{Q}(\mathbf{p}_2; \varepsilon_l) + \tilde{A}(\mathbf{p}_2) \leqslant 0.$$

Из зон J_l не более одной вырождается в точку; если оператор A диагонален, то вырожденных зон нет.

2. Если $N = 1$, то $\Sigma_2 = \varnothing$; если $N > 1$, то Σ_2 состоит из всех уровней Ландау ε_l. При этом кратность ε_l при п.в. фиксированных значениях квазиимпульса равна $N - 1$.

Абсолютно непрерывная компонента спектра $\sigma(H_A)$ состоит из Σ_1 за вычетом вырожденной зоны J_d (если она есть); точечный спектр H_A есть объединение Σ_2 и J_d.

Замечание. Возможность вхождения уровней Ландау в спектр δ-образного возмущения оператора H_0 была обнаружена в численных экспериментах Т.Андо [60] и строго доказана в [17]. Критерий вхождения уровней Ландау в точечный спектр H_A тесно связан с критерием полноты когерентных состояний [61], см. доказательство теоремы 8. Условие вхождения уровней ε_l в спектр H_A — $\eta > 1$ — имеет простую физическую интерпретацию; а именно при выполнении этого условия удвоенная площадь, охватываемая классической циклотронной орбитой заряженной частицы, меньше площади элементарной ячейки S_Λ, поэтому возможны состояния этой частицы, „не замечающие" ям нулевого радиуса, сосредоточенных в узлах решетки.

Доказательство теоремы 11 немедленно вытекает из теоремы 10 и предложений 4 и 5.

Возможный вид спектра оператора H_A при $N > 1$ схематически изображен на рис.4.

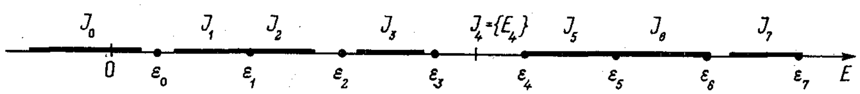

Рис.4.

Исследуем, какие из возможностей расположения зон Ландау J_l относительно уровней ε_l реализуются на самом деле.

Предложение 6. *При $N = 1$ для каждого l найдется такая точка $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$, что $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; 0, l) = 0$; следовательно, ε_l не является полюсом функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$.*

Доказательство. Будем писать $\tilde{\delta}(\mathbf{p}, l)$ вместо $\tilde{\delta}_0(\mathbf{p}; 0, l)$. Из формулы (2.22) вытекает, что

$$\tilde{\delta}(p_1 + 1, p_2, l) = \exp(-2\pi i p_2)\tilde{\delta}(p_1, p_2, l); \qquad \tilde{\delta}(p_1, p_2 + 1, l) = \tilde{\delta}(p_1, p_2, l).$$

Эти равенства означают, что при любом l функция $\tilde{\delta}(\mathbf{p}, l)$ есть непрерывное сечение расслоения M_l, которое нетривиально (см. § 1.6). Следовательно, $\tilde{\delta}(\mathbf{p}, l)$ обращается в нуль на $\mathbb{T}^2$.

Следствие. *В случае $N = 1$ каждая точка ε_l является краем одной из зон Ландау. (Напомним, что в этом случае ε_l не является собственным числом оператора H_A ни при каком l).*

Предложение 7. *Пусть решетка Λ фиксирована. Каково бы ни было $l_0, l_0 \geqslant 0$, найдется такое N_0, что при всех целых значениях потока $N, N \geqslant N_0$, все числа Ландау $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{l_0}$ являются полюсами функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ при всех $\mathbf{p}$ и тем самым представляют собой изолированные точки спектра H_A. В частности, если Λ — квадратная решетка, то уже при $N \geqslant 2$ нижний уровень Ландау ε_0 — изолированная точка в спектре H_A (рис. 4).*

Доказательство сводится к простым оценкам ряда (2.16) при $V = Q(z)$ вблизи точки $z = \varepsilon_l$ с использованием формулы (1.6). В частности, для квадратной решетки при $N \geqslant 2$ доказательство сводится к проверке неравенства

$$\sum_{n_1^2+n_2^2\neq 0} \exp(-\pi(n_1^2+n_2^2)) < 1.$$

Предложение 8. *Пусть решетка Λ квадратная, а $N = 2$. Тогда число ε_1 не является полюсом функции $\tilde{Q}(0;z)$; следовательно, уровень Ландау ε_1 входит в непрерывный спектр H_A, являясь краем по крайней мере одной из зон J_1 или J_2.*

Доказательство. Учитывая формулы $\mathrm{Res}(\Gamma(z);-1) = \mathrm{Res}(\psi(z);-1) = -1$, $L_1(x) = 1-x$, из формул (2.16) и (1.6) получаем, что

$$\mathrm{Res}(\tilde{Q}(0;z);\varepsilon_1) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (1-2\pi(n^2+m^2))\exp(-\pi(n^2+m^2)). \tag{2.32}$$

В Приложении показано, что сумма ряда (2.32) равна нулю.

Докажем еще одно простое, но важное утверждение. Рассмотрим диагональный оператор A, так что $\tilde{A}(\mathbf{p}) \equiv \alpha$. Обозначим через E_l^0 единственное на отрезке $(\varepsilon_{l-1},\varepsilon_l)$ решение уравнения

$$\alpha - (2\pi)^{-1}[\psi(1/2 - z/\omega) + \ln(\pi|\xi|) + 2C_E] = 0. \tag{2.33}$$

Легко показать, что E_l^0 — собственное число оператора H_0, возмущенного потенциалом нулевого радиуса, сосредоточенным в одной точке.

Предложение 9. . *Число E_l^0 входит в зону Ландау J_l.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{Q}_1(\mathbf{p};z)$ сумму ряда в формуле (2.16) по всем $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ (считаем $V = Q(z)$). Очевидно, функция $\tilde{Q}_1$ вещественна при вещественных z, кроме того, $\int_{\mathbb{T}^2} \tilde{Q}_1(\mathbf{p};E_l^0)d\mathbf{p} = 0$. Следовательно, найдется такая точка $\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_l \in \mathbb{T}^2$, что $\tilde{Q}_1(\mathbf{p}_l;E_l^0) = 0$. С учетом (2.33) это равенство означает, что $E_l^0 = E_l(\mathbf{p}_l)$, т.е. $E_l^0 \in J_l$.

Предложение 9 показывает, что зоны Ландау представляют собой расплывшиеся уровни одиночного атома того же вида, что и атомы, составляющие решетку Λ.

4. Спектральный анализ оператора H_A в случае целого потока и многоатомного кристалла. В рассматриваемом случае $\eta = N, \Gamma = \Lambda + K$, где $|K| = n \geqslant 1$. Схема исследования здесь та же, что и в п.3, однако теперь при каждом значении $\mathbf{p}$ $\tilde{Q}(\mathbf{p};z) + \tilde{A}(\mathbf{p})$ представляет собой матрицу порядка $n \otimes n$, что приводит к некоторым техническим осложнениям. Описанная в предложении 9 интуитивная картина образования зон Ландау путем „расплывания“ уровней одиночных атомов в магнитном поле дает основание предположить, если при $|K| = n$ между двумя последовательными уровнями Ландау (а также ниже основного состояния ε_0) должно образоваться n зон (точнее, n магнитных подзон зоны Ландау). В случае $B = 0$ именно такая картина имеет место для двумерного (или трехмерного) n-атомного кристалла точечных потенциалов: в отрицательной области спектра образуется, вообще говоря, n энергетических зон [21]. На самом деле, как будет видно из дальнейшего, число подзон при наличии магнитного поля с потоком $\eta = N$ равно $\min(n, N)$; это указывает, грубо говоря, на то, что магнитные подзоны формируются из уровней Ландау свободной заряженной частицы в магнитном поле, кратность вырождения которых при фиксированном квазиимпульсе как раз равна N. При этом расплывающиеся уровни Ландау могут сдвигаться вниз по оси энергии на величину, бо́льшую, чем ω, $\omega = \varepsilon_{l+1} - \varepsilon_l$.

Представление кристалла Γ в виде $\Gamma = \Lambda + K$ приводит к следующему разложению пространства $l^2(\Gamma): l^2(\Gamma) = l^2(\Lambda) \otimes l^2(K)$ $(\simeq l^2(\Lambda) \otimes \mathbb{C}^n)$. Тем самым любой инвариантный относительно сдвигов на векторы из Λ линейный ограниченный оператор V в $l^2(\Gamma)$ обычным преобразованием Фурье пространства $l^2(\Lambda)$ сводится к разложимому оператору $\tilde{V}$ в пространстве вектор-функций $L^2(\mathbb{T}^2) \otimes l^2(K) = \int_{\mathbb{T}^2}^{\oplus} \mathcal{H}_\eta^\Gamma(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$ (см. § 0). В слое $\mathcal{H}_\eta^\Gamma(\mathbf{p}) = l^2(K)$ оператор $\tilde{V}(\mathbf{p})$ действует умножением на некоторую матрицу с элементами $\tilde{V}(\mathbf{p}; \varkappa, \varkappa')(\varkappa, \varkappa' \in K)$. В случае оператора V в $l^2(\Gamma)$, инвариантного относительно магнитных трансляций, необходимо рассмотреть, обобщая формулу (2.15), преобразование $\mathcal{F}_\eta : l^2(\Gamma) \to L^2(\mathbb{T}^2) \otimes l^2(K)$, которое каждому элементу $\varphi \in l^2(\Gamma)$ сопоставляет вектор-функцию $\mathcal{F}_\eta \varphi$ по формуле

$$(\mathcal{F}_\eta \varphi)(\mathbf{p}; \varkappa) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi(\boldsymbol{\lambda} + \varkappa) \exp[\pi i \xi \varkappa \wedge \lambda - \\ -2\pi i(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + N\lambda_1\lambda_2/2)]. \tag{2.34}$$

Очевидно, $\mathcal{F}_\eta$ — изоморфизм гильбертовых пространств. Пользуясь соотношением (2.12), легко доказать, что для D-инвариантного линейного ограниченного оператора V в пространстве $l^2(\Gamma)$ оператор $\tilde{V} = \mathcal{F}_\eta V \mathcal{F}_\eta^{-1}$ действует в $L^2(\mathbb{T}^2) \otimes l^2(K) = \int_{\mathbb{T}^2}^{\oplus} \mathcal{H}_\eta^\Gamma(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$ послойно; в слое над $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$ оператор $\tilde{V}$ имеет матрицу

$$\tilde{V}(\mathbf{p}; \varkappa, \varkappa') = \sum_{\lambda \in \Lambda} V(\boldsymbol{\lambda} + \varkappa, \varkappa') \exp[\pi i \xi \varkappa \wedge \lambda - \\ -2\pi i(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + N\lambda_1\lambda_2/2)]. \tag{2.35}$$

Повторяя рассуждения из п.3, нетрудно прийти к следующему виду ядра $G(\mathbf{p}; k, l; k', l'; z)$ резольвенты $\tilde{R}_A(z)$ оператора $\tilde{H}_A$, действующего в пространстве $\int_{\mathbb{T}^2}^{\oplus} \tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}$

$$G(\mathbf{p}; k, l; k', l'; z) = (\varepsilon_l - z)^{-1} \delta_{kk'} \delta_{ll'} - \\ - \sum_{\varkappa, \varkappa' \in K} [\tilde{Q}(\mathbf{p}; z) + \tilde{A}(\mathbf{p})]^{-1}(\varkappa, \varkappa') \frac{\tilde{\delta}_\varkappa(\mathbf{p}; k, l)}{\varepsilon_l - z} \frac{\tilde{\delta}^*_{\varkappa'}(\mathbf{p}; k', l')}{\varepsilon_{l'} - z}. \tag{2.36}$$

Здесь $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ и $\tilde{A}(\mathbf{p})$ — матрицы порядка $n \times n$, полученные по формуле (2.35) при $V = Q(z)$ и $V = A$ соответственно, а $\tilde{\delta}_\varkappa(\mathbf{p}; k, l)$ определяется формулой (2.22).

Справедлив следующий аналог леммы 2.

Лемма 4. *Пусть матрицы $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ и $\tilde{A}(\mathbf{p})$ определены формулой (2.35) при всех $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ из $\mathbb{R}^2$. Тогда матричные элементы $\tilde{Q}(\mathbf{p}; \varkappa, \varkappa'; z)$ и $\tilde{A}(\mathbf{p}; \varkappa, \varkappa')$ представляют собой вещественно-аналитические функции по p_1, $p_2 \in \mathbb{R}$, а функция*

$\tilde{Q}(\mathbf{p};\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}';z)/\Gamma(1/2-z/\omega)$ *аналитична по* z, $z\in\mathbb{C}$. *Тем самым функция* $\tilde{Q}(\mathbf{p};\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}';z)$ *мероморфна по* z, *все ее полюсы простые и могут располагаться только в точках* ε_l.

Следующая формула для производной $\partial\tilde{Q}/\partial z$ доказывается аналогично формуле (2.28):

$$\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial z}(\mathbf{p};\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}';z)=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}(\varepsilon_l-z)^{-2}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{\delta}^*_{\varkappa}(\mathbf{p};k,l)\tilde{\delta}_{\varkappa'}(\mathbf{p};k,l). \tag{2.37}$$

Эта формула означает, что при вещественных z матрица $\partial\tilde{Q}(\mathbf{p};z)/\partial z$ есть матрица Грама системы векторов $\{((\varepsilon_l-z)^{-1}\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p};k,l))_{k,l}:\boldsymbol{\varkappa}\in K\}$ из $\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{N})$. Это обстоятельство влечет за собой следующее важное утверждение

Предложение 10. *При любом фиксированном* $\mathbf{p}$ *система векторов* $\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p})$, $\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p})=(\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p};k,l))_{k,l}$, $(\boldsymbol{\varkappa}\in K)$ *линейно-независима в пространстве* $\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{N})$.

Доказательство. Зафиксируем число z из $\rho(H_0)\cap\mathbb{R}$. Тогда $d\tilde{Q}/dz=\tilde{\Gamma}^*_z\tilde{\Gamma}_z\geqslant c_zI$, где $c_z>0$ [56]. Так как $d\tilde{Q}/dz$ — оператор умножения на матричную функцию $\partial\tilde{Q}/\partial z$, которая непрерывна по $\mathbf{p}$ (лемма 4), то при всех $\mathbf{p}\in\mathbb{T}^2$ имеем $\sum\limits_{\varkappa,\varkappa'\in K}\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial z}(\mathbf{p};\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}';z)\zeta^*_{\varkappa}\zeta_{\varkappa'}\geqslant c_z$; здесь $(\zeta_{\varkappa})\in l^2(K)$, $\sum|\zeta_{\varkappa}|^2=1$. С другой стороны, $\partial\tilde{Q}(\mathbf{p};z)/\partial z$ — это матрица Грама системы векторов $((\varepsilon_l-z)^{-1}\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p};k,l))_{k,l}$, поэтому эта система линейно-независима. Вместе с ней независима и система $\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p})\quad(\boldsymbol{\varkappa}\in K)$.

Далее будет использоваться следующий аналог асимптотики (2.29):

$$\tilde{Q}(\mathbf{p};\boldsymbol{\varkappa},\boldsymbol{\varkappa}';z)=-(2\pi)^{-1}\delta_{\varkappa\varkappa'}[\psi(1/2-z/\omega)+$$
$$+\ln(\pi|\xi|)+2C_E]+O(r(z)), \tag{2.38}$$

где $r(z)\to 0$ при $\mathrm{Re}z\to-\infty$ равномерно по $\mathbf{p}$ из любого компакта в $\mathbb{R}^2$.

Прежде чем переходить к исследованию спектра оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ при фиксированном $\mathbf{p}$, введем некоторые обозначения. Через $G_l(\mathbf{p})\quad(l\in\mathbb{N})$ будем обозначать матрицу Грама системы векторов $\{\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p};\cdot,l):\boldsymbol{\varkappa}\in K\}$, а также определяемый ею линейный оператор в конечномерном пространстве $l^2(K)$. Подчеркнем, что здесь вектор $\tilde{\delta}_{\varkappa}(\mathbf{p};\cdot,l)$ принадлежит $\mathbb{C}^N$, так как l фиксировано. Через $r_l(\mathbf{p})$ будем обозначать ранг матрицы $G_l(\mathbf{p})$. В силу (2.37) справедлива формула

$$\mathrm{Res}[\tilde{Q}(\mathbf{p};z);\varepsilon_l]=-G_l(\mathbf{p}). \tag{2.39}$$

Обозначим далее: $P_l(\mathbf{p})$ — ортопроектор в $l^2(K)$ на $\mathrm{Ker}G_l(\mathbf{p})$, $D_l(\mathbf{p})$ — оператор в $\mathrm{Ker}\quad G_l(\mathbf{p})$, определяемый равенством

$$D_l(\mathbf{p})=\lim_{z\to\varepsilon_l}P_l(\mathbf{p})[\tilde{Q}(\mathbf{p};z)+\tilde{A}(\mathbf{p})]|\mathrm{Ker}G_l(\mathbf{p})$$

(этот предел существует в силу (2.39)). По аналогии с (2.30) для каждого $l\in\mathbb{N}$ определим множество U_l:

$$U_l=U'_l\cap U''_l, \tag{2.40}$$

где

$$U'_l = \{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2 : r_l(\mathbf{p}) = \min(n, N)\}, \qquad (2.40')$$

$$U"_l = \{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2 : \text{ оператор } D_l(\mathbf{p}) \text{ обратим } \}. \qquad (2.40'')$$

Очевидно, равенство $r_l(\mathbf{p}) = \min(n, N)$ означает, что ранг матрицы $G_l(\mathbf{p})$ максимален, поэтому при $n \leqslant N$ $U_l = U'_l$. Чтобы избежать рассмотрения возможных патологий, ограничимся далее изучением лишь *типичных* операторов H_A; так будем называть операторы, для которых $\bigcap_{l\geqslant 0} U_l \neq \varnothing$. Обратим внимание на то, что это соотношение даже при $n \leqslant N$ *не вытекает* из предложения 10, так как в нем речь идет о векторах из $\mathbb{C}^N \otimes l^2(\mathbb{N})$, а в определении матрицы $G_l(\mathbf{p})$ — о векторах из $\mathbb{C}^N$. Если $U_l \neq \varnothing$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, то H_A будем называть типичным на уровне l. Заметим, что при $n = 1$ оператор H_A всегда типичный (см.п.3). Легко показать, что сколь угодно малым шевелением точек $\varkappa$ в ячейке Q_Λ всегда можно удовлетворить условию $\bigcap_{l\geqslant 0} U'_l \neq \varnothing$, а сколь угодно малым шевелением диагональных матричных элементов оператора A, рассматриваемых как элементы $l^2(K)$, — удовлетворить условию $\bigcap_{l\geqslant 0} U''_l \neq \varnothing$. В случае рационального потока $\eta = N/M$ нам потребуется рассмотрение множества K из Q_Λ, состоящего из точек вида $sM^{-1}\mathbf{a}_2$ $(s = 0, \ldots, M-1)$. Легко показать, что получающиеся при этом операторы H_A типичны на уровне l при всех M, кроме, возможно, конечного числа. На самом деле, если зафиксировать внедиагональные элементы матрицы A и рассматривать зависимость A от параметров $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n) \in Q_\Lambda^n$ и $(\alpha(\varkappa_1), \ldots, \alpha(\varkappa_n)) \in l^2(K)$, то типичность A будет иметь место для всех значений этих параметров из некоторого G_δ-множества полной меры в $Q_\Lambda^n \times l^2(K)$. Наконец, отметим, что предложение 1 и теорема 8 влекут выполнение условия $U'_0 \neq \varnothing$ для всех H_A, т.е. изучение поведения основного состояния оператора H_0 при включении периодического точечного потенциала по крайней мере при $n \leqslant N$ не требует дополнительных ограничений на H_A.

Зафиксируем теперь квазиимпульс $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$. Формула (2.36) показывает, что в спектр $\sigma(\tilde{H}_A(\mathbf{p}))$ могут входить лишь уровни Ландау ε_l, а также решения дисперсионного уравнения

$$\det[\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tilde{A}(\mathbf{p})] = 0, \qquad (2.41)$$

где $E \in \mathbb{R}$, $E \neq \varepsilon_l$, $l = 0, 1, \ldots$ На самом деле все решения этого уравнения входят в $\sigma(\tilde{H}_A(\mathbf{p}))$, это нетрудно вывести из предложения 10. В силу мероморфности матричнозначной функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$ по z, уравнение (2.41) в каждом промежутке $(-\infty, \varepsilon_0)$, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \ldots$ имеет конечное число решений. Обозначим через $E_l^{(i)}(\mathbf{p})$ $(i = 1, \ldots, s_l)$ все решения уравнения (2.41), лежащие в промежутке $(\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l)$ (считаем $\varepsilon_{-1} = -\infty$). Ниже мы дадим более естественную нумерацию собственных чисел $E_l^{(i)}(\mathbf{p})$, из которой, в частности, будет видно, что при $n > N$ возможно равенство $s_l = 0$ даже при $\mathbf{p} \in \cap U_l$; решения уравнения (2.41) в этой новой нумерации будут обозначаться $E_l^i(\mathbf{p})$. Обобщением на рассматриваемый случай теоремы 10 является следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть поток η целый: $\eta = N$, а кристалл Γ n-атомный: $\Gamma = \Lambda + K, |K| = n$. Тогда при любом $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$ спектр оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ дискретный, его образуют два множества:*

1. *Сгруппированные в серии собственные числа* $E_l^{(i)}(\mathbf{p})$ $(i = 1, \ldots, s_l; l = 0, 1, \ldots)$; *серия* $\{E_l^{(i)}(\mathbf{p}) : i = 1, \ldots, s_l\}$ *лежит на отрезке* $(\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l)$. *Совокупность чисел* $E_l^{(i)}(\mathbf{p})$ *составляет множество всех решений дисперсионного уравнения* (2.41), *лежащих в* $(\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l)$. *Кратность собственного числа* $E_l^{(i)}(\mathbf{p})$ *совпадает с размерностью подпространства* $M_l^i(\mathbf{p}) = \mathrm{Ker}[\tilde{Q}(\mathbf{p}; E_l^{(i)}(\mathbf{p})) + \tilde{A}(\mathbf{p})]$ *в* $l^2(K)$. *Все собственные векторы оператора* $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$, *соответствующие собственному значению* $E_l^{(i)}(\mathbf{p})$, *задаются формулой*

$$\Big(\sum_{\varkappa \in K} \alpha_\varkappa (\varepsilon_m - E_l^{(i)}(\mathbf{p}))^{-1} \tilde{\delta}_\varkappa(\mathbf{p}; k, m)\Big)_{k,m}, \tag{2.42}$$

где $(\alpha_\varkappa)$ *пробегает* $M_l^i(\mathbf{p}) \setminus \{0\}$.

2. *Множество собственных чисел Ландау* ε_l, *кратность которых в спектре* $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$ *обозначим* $d_l(\mathbf{p})$. *Если оператор* $D_l(\mathbf{p})$ *обратим, то* $d_l(\mathbf{p}) = N - r_l(\mathbf{p})$, *в противном случае* $d_l(\mathbf{p})$ *допускает оценку* $N - r_l(\mathbf{p}) \leqslant d_l(\mathbf{p}) \leqslant n + N - r_l(\mathbf{p})$. *Собственное подпространство, отвечающее* ε_l, *в первом случае есть ортогональное дополнение* L_l *векторов* $\tilde{\delta}_\varkappa(\mathbf{p}; \cdot, l)(\varkappa \in K)$ *в* $\mathbb{C}^N \otimes e_l$, *во втором случае оно содержит* L_l; *кроме того, во втором случае* ε_l *может совпадать с одним из чисел* $E_m^{(i)}(\mathbf{p})$.

Доказательство этой теоремы лишь техническими деталями отличается от доказательства теоремы 10, и мы его опускаем. Заметим лишь, что вторая часть спектра $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$, разумеется, может быть пустой.

Перейдем теперь к изучению спектра оператора H_A, $H_A \simeq \int_{\mathbb{T}^2}^{\oplus} \tilde{H}_A(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}$. Для этого при каждом $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$ рассмотрим упорядоченный по возрастанию набор $\beta_1(\mathbf{p}; E) \leqslant \cdots \leqslant \beta_n(\mathbf{p}; E)$ всех собственных чисел (с учетом кратности) матрицы $[\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tilde{A}(\mathbf{p})]/\Gamma(1/2 - E/\omega)$. Хотя по лемме 4 эта матрица вещественно аналитична по совокупности переменных $p_1,, p_2$, E, функции $\beta_i(\mathbf{p}; E)$ всего лишь непрерывны по совокупности тех же переменных; более того, вообще говоря, никакой перестановкой индексов i $(i = 1, \ldots, n)$ нельзя сделать функции этого набора вещественно-аналитическими [38]. Это обстоятельство приводит к дополнительным техническим осложнениям по сравнению с п.3. Пусть, далее, $\mu_i(\mathbf{p}; E) = \Gamma(1/2 - E/\omega)\beta_i(\mathbf{p}; E)$ суть все собственные числа матрицы $\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tilde{A}(\mathbf{p})$. Ключевой для построения законов дисперсии оператора H_A в рассматриваемом случае будет следующая лемма.

Лемма 5. *При фиксированном* $\mathbf{p}$ *справедливы следующие утверждения:* 1. *Функции* $\mu_i(\mathbf{p}; E)$ *строго возрастают по* E *на каждом промежутке* $(\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l)(l \in \mathbb{N})$. 2. $\lim\limits_{E \to -\infty} \mu_i(\mathbf{p}; E) = -\infty$ $\forall i$. 3.*При заданном* l, $l \in \mathbb{N}$, *ровно* $r_l(\mathbf{p})$ *функций* μ_i *обладают свойством:*

существуют конечные, отличные от нуля пределы $\lim\limits_{E \to \varepsilon_l} (\mu_i(\mathbf{p}; E)/\Gamma(1/2 - E/\omega))$ *и, значит,*

$$\lim_{E \to \varepsilon_l} |\mu_i(\mathbf{p}; E)| = \infty;$$

для остальных функций μ_i *существуют конечные пределы* $\lim\limits_{E \to \varepsilon_l} \mu_i(\mathbf{p}; E)$.

Доказательство леммы см. в Приложении. Эта лемма позволяет свести изучение дисперсионного уравнения (2.41) к изучению эквивалентной ему совокупности уравнений

$$\mu_i(\mathbf{p}; E) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{2.43}$$

Рассмотрим теперь множества U_l (см.(2.40)), считая $U_{-1} = \mathbb{T}^2$. Ясно, что все U_l — открытые множества полной меры в $\mathbb{T}^2$. Предположим пока, что $n \leqslant N$. В силу леммы 5, каждое уравнение совокупности (2.43) в любом промежутке $(\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l)$ (напомним, что $\varepsilon_{-1} = -\infty$) имеет единственное решение $E_l^i(\mathbf{p})$, как только $\mathbf{p} \in U_{l-1} \cap U_l$. По теореме о неявной функции все функции $E_l^i(\mathbf{p})\,(i = 1, \dots, n)$ непрерывны в $U_{l-1}' \cap U_l$. Кроме того, все эти функции ограничены: нетривиально лишь неравенство $\inf\{E_0^i(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in U_0\} > -\infty$, но оно немедленно вытекает из формулы (2.38) и ограниченности функций $\tilde{A}(\mathbf{p}; \varkappa, \varkappa')$ на торе $\mathbb{T}^2$. Теперь аналогично тому, как это сделано в предложении 4, каждую функцию $E_l^i(\mathbf{p})$ можно продолжить на весь тор $\mathbb{T}^2$ по непрерывности:

Предложение 11. *Каждая функция $E_l^i(\mathbf{p})$ продолжается по непрерывности на весь тор $\mathbb{T}^2$. Продолженные функции (обозначаемые снова $E_l^i(\mathbf{p})$) обладают свойствами: 1) если $\varepsilon_{l-1} < E_l^i(\mathbf{p}) < \varepsilon_l$, то $E_l^i(\mathbf{p})$ есть корень уравнения $\mu_i(\mathbf{p}; E) = 0$ и, следовательно, корень уравнения* (2.41); 2) *существуют открытые множества полной меры U_l^i, $U_l^i \subset \mathbb{T}^2$ такие, что $E_l^i(\mathbf{p})$ вещественно аналитична на U_l^i.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 4, за исключением ч.2), которую несложно получить из подготовительной теоремы Вейерштрасса с учетом вещественной аналитичности левой части уравнения (2.41).

Функции $E = E_l^i(\mathbf{p})$ на $\mathbb{T}^2$ называют *законами дисперсии* гамильтониана H_A. Замкнутый ограниченный отрезок $\{E_l^i(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \mathbb{T}^2\}$ обозначим I_l^i, этот отрезок может быть вырожденным. Очевидно, $I_l^i \subset [\varepsilon_{l-1}, \varepsilon_l]$. Объединение $J_l = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_l^i$ назовем l-й *зоной Ландау (магнитной зоной)*, отрезку I_l^i — *магнитными подзонами* этой зоны. Подзоны одной зоны могут, вообще говоря, перекрываться. Введенная сейчас терминология согласуется с принятой в § 1.5 и в п.3 этого параграфа.

Итак, при $n \leqslant N$ законы дисперсии построены. Ключевым моментом их построения являлось следующее свойство функции $\mu_i(\mathbf{p}; E)$: если $\mathbf{p} \in U_{l-1} \cap U_l$, то при всех i $\;(i = 1, \dots, n)$ $\;\mu_i(\mathbf{p}; E) \to -\infty$, когда $E \to \varepsilon_{l-1} + 0$ и $\mu_i(\mathbf{p}; E) \to +\infty$, когда $E \to \varepsilon_l - 0$. В случае $n > N$, как показывает лемма 5, такое поведение функций μ_i уже невозможно. Однако, зафиксировав $\mathbf{p} \in \cap U_l$, мы можем из этих функций сконструировать новые функции $\nu_l^i(\mathbf{p}; E)$ $\;(i = 1, \dots, N; l = 0, 1, \dots)$, обладающие следующими свойствами: 1) каждая функция $E \mapsto \nu_l^i(\mathbf{p}; E)$ определена, непрерывна и строго возрастает на промежутке вида $(\varepsilon_{l-s}, \varepsilon_l)$(считаем $\varepsilon_m = -\infty$ при $m < 0$); здесь s, $s > 0$, зависит от i и допускает оценку: $s \leqslant n/N$, если N делит n, в противном случае $s \leqslant [n/N] + 1$; 2)$\nu_l^i(\mathbf{p}; E) \to -\infty$ при $E \to \varepsilon_{l-s} + 0$, $\nu_l^i(\mathbf{p}; E) \to +\infty$ при $E \to \varepsilon_l - 0$; 3) каков бы ни был промежуток вида $(\varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m)$, набор всех определенных на нем функций $\nu_l^i(\mathbf{p}; E)$ совпадает с набором функций $\mu_j(\mathbf{p}; E)$ на этом промежутке. Опуская формальное описание построения функций ν_l^i, проиллюстрируем это построение с помощью рис.5, на котором схематически изображен набор функций $\mu_i(\mathbf{p}; E)$ при $N = 2$, $n = 3$($\mathbf{p}$ фиксировано). В этом случае имеем: 1) ν_0^1 и ν_0^2 определены на $(-\infty, \varepsilon_0)$ и совпадают на этом промежутке с μ_3 и μ_2 соответственно; 2) ν_1^1 определена на промежутке $(-\infty, \varepsilon_1)$ и совпадает с μ_1 на нем, ν_1^2 определена на $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ и совпадает на нем с μ_2; 3) ν_2^1 совпадает с μ_3 на $(\varepsilon_0, \varepsilon_2)$, а ν_2^2 совпадает с μ_2 на $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и т.д. В силу п.1) и 2) определе-

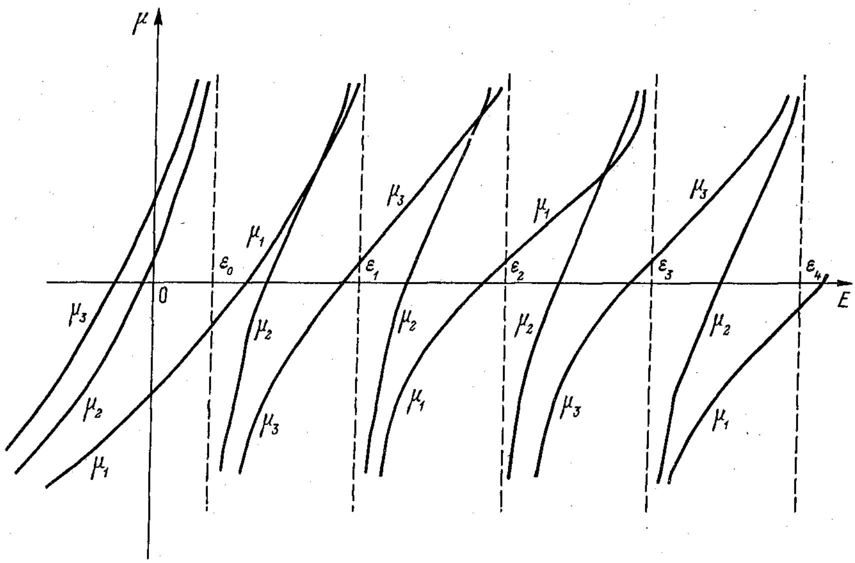

Рис.5.

ния функций ν_l^i при каждом $\mathbf{p} \in \cap U_l$ на отрезке $(\varepsilon_{l-s}, \varepsilon_l)$ уравнение $\nu_l^i(\mathbf{p}; E) = 0$ имеет единственное решение $E_l^i(\mathbf{p})$. В силу п.3) этого определения совокупность всех полученных решений $E_l^i(\mathbf{p}) \quad (i = 1, \dots, N; l = 0, 1, \dots)$ совпадает с множеством всех корней уравнения (2.41) при заданном $\mathbf{p}$. Таким образом, в случае $n > N$ (и при фиксированном $\mathbf{p}$) каждый N-кратно вырожденный уровень ε_l невозмущенного оператора $\tilde{H}_0(\mathbf{p})$ при включении периодического точечного возмущения распадается на N уровней $E_l^1(\mathbf{p}), \dots, E_l^N(\mathbf{p})$ возмущенного оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$. „Распадный“ уровень $E_l^i(\mathbf{p})$ сдвигается по оси энергии вниз от ε_l, но не далее уровня ε_{l-s}. Как показано выше, такая же картина имеет место и при $n = N$, в то время как при $n < N$ от ε_l „отщепляется“ лишь n уровней $E_l^1(\mathbf{p}), \dots, E_l^n(\mathbf{p})$, каждый из которых сдвигается вниз от ε_l, но не далее ε_{l-1}. При этом кратность оставшегося уровня ε_l понижается и становится равной $N - n$.

Функции $\nu_l^i(\mathbf{p}; E)$ с описанными выше свойствами 1)–3) можно построить при всех $\mathbf{p} \in \bigcap_{j=0}^{s} U_{l-j}$, где $s \leqslant [n/N] + 1$. Тем самым функции $E_l^i(\mathbf{p})$ определены и непрерывны в открытом подмножестве из $\mathbb{T}^2$, имеющем в $\mathbb{T}^2$ полную меру. Для этих функций справедливо предложение 11, которое дает их продолжение до непрерывных функций на всем торе $\mathbb{T}^2$; продолженная функция $E_l^i(\mathbf{p})$ вещественно-аналитична на некотором открытом множестве U_l^i, $U_l^i \subset \mathbb{T}^2$, имеющем полную меру в $\mathbb{T}^2$. Полученные таким способом *законы дисперсии* $E = E_l^i(\mathbf{p})$ определяют *магнитные подзоны* $I_l^i = \{E_l^i(\mathbf{p}) : \mathbf{p} \in \mathbb{T}^2\} \quad (i = 1, \dots, N)$, на которые распадается *зона Ландау* $I_l = \bigcup\limits_{i=1}^{N} I_l^i$. В итоге мы приходим к следующему обобщению теоремы 11.

Теорема 13. *Пусть поток η целый: $\eta = N$, а решетка Γ n-атомная: $\Gamma = \Lambda + K, |K| = n$. Тогда спектр $\sigma(H_A)$ существенный и не имеет сингулярно непрерывной компоненты. При этом $\sigma(H_A)$ распадается на две (возможно, пересекающиеся) части: $\sigma(H_A) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.*

1. *Зонная часть спектра Σ_1 есть объединение зон Ландау: $\Sigma_1 = \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} J_l, J_l$ содержится в отрезке $[\varepsilon_{l-s}, \varepsilon_l]$, где $0 < s \leqslant n/N$, если N делит n, в противном случае $0 < s \leqslant [n/N]+1$. Каждая зона J_l распадается на m, $m = \min(n, N)$, магнитных подзон: $J_l = \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_l^i$. Подзона I_l^i является множеством значений непрерывной функции $E = E_l^i(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^2$ — ветви многозначной функции, определяемой дисперсионным уравнением $\det[\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tilde{A}(\mathbf{p})] = 0$. Каждая функция $E_l^i(\mathbf{p})$ вещественно-аналитична на открытом множестве полной меры в $\mathbb{T}^2$. Подзоны I_l^i одной зоны J_l, а при $n > N$ и сами зоны J_l могут перекрываться: некоторые из подзон I_l^i могут вырождаться в точку.*

2. *Если $n \geqslant N$, то $\Sigma_2 = \varnothing$; если $n < N$, то Σ_2 состоит из всех уровней Ландау ε_l, причем кратность ε_l в точечном спектре оператора H_A при почти всех фиксированных значениях квазиимпульса равна $N - n$.*

Абсолютно непрерывная компонента спектра $\sigma(H_A)$ состоит из Σ_1 за вычетом вырожденных подзон: точечный спектр H_A есть объединение Σ_2 и вырожденных подзон (если они имеются).

Спектр H_A при $n = 2$, $N \geqslant 3$ схематически изображен на рис.6.

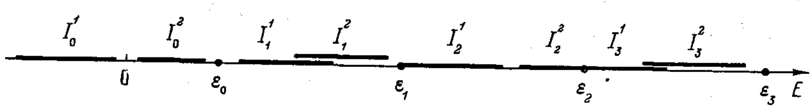

Рис.6 .

5. Спектральный анализ оператора H_A в случае рационального потока. Разложение представления D на неприводимые представления. Исследование спектра $\sigma(H_A)$ в случае рационального потока $\eta = N/M$ сводится в принципе к случаю целого потока $\eta' = N$ путем укрупнения решетки Λ. А именно перейдем к решетке Λ' с образующими $\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2' = M\mathbf{a}_2$; тогда кристалл Γ, $\Gamma = \Lambda + K$, может быть представлен в виде $\Gamma = \Lambda' + K'$, где $K' = K + \{0, \mathbf{a}_2, \ldots, (M-1)\mathbf{a}_2\}$. Спектр H_A в данной ситуации описывает теорема 13, однако проведенный в § 1.5 анализ показывает, что в рассматриваемом случае должно возникать дополнительное M-кратное вырождение спектра. Исследование этого вырождения требует разложения оператора H_A в прямой интеграл над тором $\mathbb{T}_\eta^2$ (см. обозначения в § 0): $H_A \simeq \int_{\mathbb{T}_\eta^2}^{\oplus} \tilde{H}_A(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}$, для чего в свою очередь необходимо найти разложение представления D (см.п.2) на неприводимые представления. Заметим, что в случае целого потока и n-атомного кристалла искомое разложение дает формула (2.34).

Прежде чем описать требуемое разложение представления D, введем некоторые обозначения. Через $j \oplus j'$ и $j \ominus j'$ будем обозначать сложение и вычитание в $\{0, 1, \dots, M-1\}$ по модулю M. Обозначим через S и $\Delta'(\mathbf{p})$ $(\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2_\eta)$ операторы в $\mathbb{C}^M$, которые на векторах $\mathbf{e}_j$ стандартного базиса задаются равенствами $S\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{j\ominus 1}$, $\Delta'(\mathbf{p})\mathbf{e}_j = \exp(-2\pi i p_2 \delta_{j,M-1})\mathbf{e}_{j\oplus 1}$. Для каждого $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2_\eta$ зададим физическое представление $\Delta_d(\cdot, \mathbf{p})$ группы W_η в пространстве $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M$, определив его на образующих $(\mathbf{a}_1, 1)$ и $(\mathbf{a}_2, 1)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta_d((\mathbf{a}_1,1);\mathbf{p}) = \Delta((\mathbf{a}_1,1);\mathbf{p}) \otimes I_{\mathbb{C}^M}, \\ \Delta_d((\mathbf{a}_2,1);\mathbf{p}) = S \otimes \Delta'(\mathbf{p}). \end{cases} \tag{2.44}$$

Нетрудно проверить, что определение (2.44) корректно, при этом $\Delta_d(\cdot;\mathbf{p})$ эквивалентно представлению $\Delta(\cdot;\mathbf{p}) \otimes I_{\mathbb{C}^M}$. Наконец, определим отображение

$$F_\eta l^2(\Gamma) \to \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^2_\eta} \mathcal{H}^\Gamma_\eta(\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = L^2(\mathbb{T}^2_\eta) \otimes \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M \otimes l^2(K)$$

формулой

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_\eta\varphi)(\mathbf{p}; j, m, \boldsymbol{\varkappa}) = \sum_{\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{Z}} &\varphi(\lambda_1\mathbf{a}_1 + (\lambda_2 M + m)\mathbf{a}_2 + \boldsymbol{\varkappa}) \times \\ \times \exp[\pi i \xi \boldsymbol{\varkappa} \wedge (\lambda_1 \mathbf{a}_1 &+ \lambda_2 M \mathbf{a}_2) - 2\pi i(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \\ &+ \frac{N}{2}\lambda_1(\lambda_2 + \frac{m+2j}{M}))], \quad \varphi \in l^2(\Gamma).\end{aligned}$$

Теорема 14. *Отображение $\mathcal{F}_\eta$ есть изоморфизм гильбертовых пространств, реализующий разложение представления D в прямой интеграл представлений, кратных неприводимым:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\eta D \mathcal{F}_\eta^{-1} &= \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^2_\eta} \Delta_d(\cdot;\mathbf{p}) \otimes I_{l^2(K)}\, d\mathbf{p} \simeq \\ &\simeq \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^2_\eta} \Delta(\cdot;\mathbf{p}) \otimes I_{\mathbb{C}^M} \otimes I_{l^2(K)}\, d\mathbf{p}.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы, сводящееся к прямым вычислениям, мы опускаем.

Следствие. *Кратность спектра D в случае n-атомного кристалла Γ равна nM (и не зависит тем самым от N). Спектр D простой в том и только в том случае, когда Γ — одноатомный кристалл, а поток η — целый.*

Пусть теперь V — D-инвариантный линейный ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$; через $\tilde{V}(\mathbf{p}; j, m, \boldsymbol{\varkappa}; j', m', \boldsymbol{\varkappa}')$ обозначим ядро оператора $\tilde{V} = \mathcal{F}_\eta V \mathcal{F}_\eta^{-1}$ в $\int^{\oplus}_{\mathbb{T}^2_\eta} \mathcal{H}^\Gamma_\eta(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}$.

Имеет место следующая формула:

$$\tilde{V}(\mathbf{p}; j, m, \varkappa; j', m', \varkappa') = \delta_{jj'} \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}} V(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + (\lambda_2 M + m)\mathbf{a}_2 + \varkappa, m'\mathbf{a}_2 + \varkappa') \times$$
$$\times \exp[\pi i \xi \varkappa \wedge (\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 M \mathbf{a}_2) - 2\pi i(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 +$$
$$+ \frac{N}{2}\lambda_1(\lambda_2 + \frac{m + 2j}{M}))]. \tag{2.45}$$

Для проверки этой формулы достаточно проверить на векторах стандартного базиса из $l^2(\Gamma)$ следующее равенство: $\tilde{V}\mathcal{F}_\eta = \mathcal{F}_\eta V$. Эта проверка сводится к прямым вычислениям, использующим теорему 14.

С помощью формулы (2.45) и теоремы 14, обобщая рассуждения, использованные при выводе формул (2.27) и (2.36), получаем, наконец, общее утверждение о разложении резольвенты $R_A(z)$ оператора H_A в прямой интеграл по тору квазиимпульсов.

Теорема 15. *Пусть $\tilde{R}_A(z)$ — резольвента оператора H_A в представлении Ландау–Зака: $\tilde{R}_A(z) = \mathcal{L}_\eta(H_A - z)^{-1}\mathcal{L}_\eta^{-1}$ (см. § 1.4). Тогда $\tilde{R}_A(z)$ разлагается в прямой интеграл по тору $\mathbb{T}_\eta^2$: $\tilde{R}_A(z) = \int_{\mathbb{T}_\eta^2}^{\oplus} \tilde{R}_A(\mathbf{p}; z)\, d\mathbf{p}$. Ядро оператора $\tilde{R}_A(\mathbf{p}; z)$, действующего при фиксированном $\mathbf{p}$ в слое $\tilde{\mathcal{H}}_\eta(\mathbf{p}) = \mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^N \otimes l^2(K)$, имеет вид*

$$G(\mathbf{p}; j, k, l; j', k', l'; z) = (\varepsilon_l - z)^{-1}\delta_{jj'}\delta_{kk'}\delta_{ll'} -$$
$$-\delta_{jj'} \sum_{m,m'=0}^{M-1} \sum_{\varkappa, \varkappa' \in K} [\tilde{Q}(\mathbf{p}; j; z) + \tilde{A}(\mathbf{p}; j)]^{-1}(m, \varkappa; m', \varkappa') \times$$
$$\times \frac{\tilde{\delta}_{m\varkappa}(\mathbf{p}; j, k, l)}{\varepsilon_l - z} \frac{\tilde{\delta}^*_{m'\varkappa'}(\mathbf{p}; j, k', l')}{\varepsilon_{l'} - z}, \tag{2.46}$$

где $\tilde{Q}(\mathbf{p}; j; z) + \tilde{A}(\mathbf{p}; j)$ есть оператор в $\mathbb{C}^M \otimes l^2(K)$ с матрицей $[\tilde{Q}(\mathbf{p}; j; z) + \tilde{A}(\mathbf{p}; j)](m, \varkappa; m', \varkappa')$, получаемой по формуле (2.45), в которой надо положить $V = Q(z) + A$ и $j = j'$; функции же $\tilde{\delta}_{m\varkappa}(\mathbf{p}; j, k, l)$ определены формулой

$$\tilde{\delta}_{m\varkappa}(\mathbf{p}; j, k, l) =$$
$$= N^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n(p_2 + k)/N)\psi_0^*(m\mathbf{a}_2 + \varkappa; p_1 + j\eta + n, l).$$

Из теоремы 14 можно получить, что операторы $\tilde{Q}(\mathbf{p}; j; z) + \tilde{A}(\mathbf{p}; j)$ при разных j унитарно эквивалентны; это и приводит к диктуемому теоретико-групповыми соображениями M-кратному вырождению спектра оператора $\tilde{H}_A(\mathbf{p})$, действующего в слое над $\mathbf{p}$. Сформулируем теперь теорему о спектре $\sigma(H_A)$ в случае рационального потока, ограничившись, для простоты, одноатомным кристаллом.

Теорема 16. *Пусть поток η рациональный: $\eta = N/M$, а решетка Γ одноатомная: $\Gamma = \Lambda$. Тогда спектр $\sigma(H_A)$ существенный и не имеет сингулярно непрерывной компоненты. При этом $\sigma(H_A)$ распадается на две (возможно, пересекающиеся) части: $\sigma(H_A) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.*

1. *Зонная часть спектра* Σ_1 *есть объединение зон Ландау:* $\Sigma_1 \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} J_l$, J_l *содержится в отрезке* $[\varepsilon_{l-s}, \varepsilon_l]$, *где* $0 < s \leqslant M$, *если* $N = 1$, *в противном случае* $0 < s \leqslant [M/N]+1$. *Каждая зона* J_l *распадается на* m, $m = \min(M, N)$, *магнитных подзон:* $J_l = \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_l^i$. *Подзона* I_l^i *является множеством значений каждой из* M *совпадающих непрерывных функций* $E = E_l^{ij}(\mathbf{p})$ $(j = 0, \ldots, M-1)$ *на торе* $\mathbb{T}_\eta^2 : E_l^{ij}(\mathbf{p}) = E_l^{ik}(\mathbf{p})$ $\forall \mathbf{p}, l, i, j, k$. *Функция* $E = E_l^{ij}(\mathbf{p})$ $(i = 1, \ldots, m; l = 0, 1, \ldots)$ — *это непрерывная ветвь многозначной функции, определяемой дисперсионным уравнением* $\det[\tilde{Q}(\mathbf{p}; j; E) + \tilde{A}(\mathbf{p}; j)] = 0$. *Тем самым при почти всех фиксированных значениях квазиимпульса* $\mathbf{p}$ *каждая подзона* I_l^i M*-кратно вырождена. Подзоны* I_l^i *одной зоны* J_l, *а при* $M > N$ *и сами зоны* J_l *могут перекрываться; некоторые из подзон могут вырождаться в точку.*

2. *Если* $M \geqslant N$, *то* $\Sigma_2 = \varnothing$; *если* $M < N$, *то* Σ_2 *состоит из всех уровней Ландау* ε_l, *причем кратность* ε_l *в точечном спектре оператора* H_A *при почти всех значениях квазиимпульса равна* $M(N - M)$.

Абсолютно непрерывная компонента спектра $\sigma(H_A)$ *состоит из* Σ_1 *за вычетом вырожденных подзон. Точечный спектр* H_A *есть объединение* Σ_2 *и вырожденных подзон (если они имеются).*

Замечание. Мы видим, что число магнитных подзон одноатомного гамильтониана H_A при $N/M \leqslant 1$ совпадает с N, а при $N/M \geqslant 1$ совпадает с M. Это показывает, что в модели потенциалов нулевого радиуса имеет место двойственность числа магнитных подзон в случае сильного $(\eta > 1)$ и слабого $(\eta < 1)$ поля $\mathbf{B}$ (см. обсуждение этого вопроса в § 1.5). Отметим также еще раз, что при $\eta \leqslant 1$ спектр $\sigma(H_A)$ имеет чисто зонную структуру: $\sigma(H_A) = \Sigma_1$, в то время как при $\eta > 1$ в спектр $\sigma(H_A)$ входят все уровни Ландау ε_l как собственные значения оператора H_A.

6. Замечание о магнитно-блоховских функциях оператора H_A. Рассмотрим магнитно-блоховские функции, соответствующие расплывшемуся уровню Ландау. Для простоты будем рассматривать только целый поток: $\eta = N$, и одноатомную решетку; кроме того, ограничимся изучением нижнего уровня Ландау. При $N \geqslant 2$ нижняя магнитная зона отделена щелью от оставшейся части спектра, границей последней является нерасплывшийся уровень ε_0(§ 2.3). Согласно теореме 10, в представлении Ландау–Зака магнитно-блоховская функция $\varphi_{\mathbf{q}}^0$ квазиимпульса $\mathbf{q}$, соответствующая точке $E_0(\mathbf{q})$ нижней зоны Ландау, имеет вид

$$\varphi_{\mathbf{q}}^0(\mathbf{p}, k, l) = (\varepsilon_l - E_0(\mathbf{q}))^{-1} \tilde{\delta}_0(\mathbf{q}; k, l) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

Пользуясь формулой (1.26), получаем следующий вид этой же функции в координатном представлении:

$$\varphi_{\mathbf{q}}^0(x, y) = N^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_l - E_0(\mathbf{q}))^{-1} \times \\ \times \exp(-2\pi i m(q_2 + k)/N) \psi_0(x, y; q_1 + m, l). \tag{2.47}$$

С учетом (2.22) из (2.47) получаем, что при замене (q_1, q_2) на $(q_1 + 1, q_2)$ и на $(q_1, q_2 + 1)$ функция $\varphi_{\mathbf{q}}^0$ не меняется. Тем самым возникшее расслоение $M_0^1(H_A)$ магнитно-блоховских функций нижней зоны Ландау $E = E_0(\mathbf{p})$ тривиально.

Нерасплывшемуся уровню Ландау ε_0 соответствует расслоение ранга $N-1$ магнитно-блоховских функций этого уровня, которое обозначим $M_0^2(H_A)$. В силу формулы С.П.Новикова [2] для чисел Чженя c_1 должно выполняться равенство $c_1(M_0^1)+c_1(M_0^2)=1$. Так как $c_1(M_0^1)=0$, то $c_1(M_0^2)=1$. Физически это означает, что квантованная холловская проводимость остается нулем при заполнении нижней зоны Ландау и меняется на величину e^2/h (см.[1], здесь e — заряд электрона, $h=2\pi\hbar$) при полном заполнении нерасплывшегося нижнего уровня Ландау.

Формула (2.47) дает „топологическое" объяснение отсутствия при $N=1$ щели между первой зоной Ландау и уровнем ε_0. Действительно, наличие такой щели привело бы к формуле, аналогичной (2.47), и, следовательно, к равенству $c_1(M_0^1)=0$. Так как при $N=1$ $M_0^2=0$, то из закона сохранения квантового заряда [2] получаем $c_1(M_0^1)=1$; противоречие. В связи с этим замечанием было бы интересно строго доказать выполнимость упомянутой в § 1.6 формулы С.П.Новикова и для возмущений H_0 потенциалами нулевого радиуса.

Приложение

1. Доказательство теоремы 8. Можно считать, что $\xi>0$. Если H_0 и H_A имеют общую собственную функцию уровня ε_0, то по предложению 1 найдется целая функция $\varphi(z)$, обращающаяся в нуль в точках из Γ, и такая, что $\int\limits_{\mathbb{C}}\exp(-\pi\xi|z|^2)|\varphi(z)|^2dzdz^*<\infty$. Отсюда $|\varphi(z)|\leqslant C\exp(\pi\xi|z|^2/2)$ ([61], с.26). Пусть $\nu(R)$ — число нулей функции $\varphi(z)$ в круге $|z|<R$, λ — порядок роста $\varphi(z)$. Очевидно, $\lambda\leqslant 2$; если $\lambda<2$, то получим $\lim\limits_{R\to\infty}\inf n(R)/R^\lambda\leqslant\lim\limits_{R\to\infty}\sup\nu(R)/R^\lambda<\infty$ ([63], с.277), откуда $c_\Gamma=0$, что невозможно. Тем самым $\lambda=2$, а тип μ функции $\varphi(z)$ удовлетворяет неравенству $\mu\leqslant\pi\xi/2$. Но тогда $c_\Gamma\leqslant 2\mu/\pi$([61], с.253), откуда $c_\Gamma\leqslant\xi$. Противоречие доказывает теорему.

2. Доказательство предложения 4. Обозначим для простоты $\mu(\mathbf{p},z)=\tilde{Q}(\mathbf{p};z)+\tilde{A}(\mathbf{p})$; напомним, что $\mu(\mathbf{p},E)$ строго возрастает по E на любом отрезке $(\varepsilon_{l-1},\varepsilon_l)$ (см. формулу (2.28) и предложение 10, доказательство последнего не опирается на предложение 4 и его следствия). Зафиксируем $l\in\mathbb{N}$. В силу ограниченности функции $E_l(\mathbf{p})$ на $U_{l-1}\cap U_l$, для любого заданного $\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2$ можно выбрать последовательность $(\mathbf{p}_n)$ из $U_{l-1}\cap U_l$ такую, что $\mathbf{p}_n\to\mathbf{q}$, а $(E_l(\mathbf{p}_n))$ стремится к некоторому конечному пределу E'.

Справедливы следующие утверждения: а) если $\varepsilon_{l-1}<E'<\varepsilon_l$, то E' — единственный корень уравнения $\mu(\mathbf{q},E)=0$, лежащий в промежутке $\varepsilon_{l-1},\varepsilon_l)$; б) E' не является полюсом функции $\tilde{Q}(\mathbf{q};z)$; в) если $E'=\varepsilon_l$, то $\lim\limits_{E\to E'}\mu(\mathbf{q},E)\leqslant 0$; если же $E'=\varepsilon_{l-1}$, то $\lim\limits_{E\to E'}\mu(\mathbf{q},E)\geqslant 0$.

Для доказательства утверждения а) заметим, что $\mu(\mathbf{p},E)$ непрерывна по совокупности переменных в окрестности точки $(\mathbf{q},E')\in\mathbb{T}^2\times(\varepsilon_{l-1},\varepsilon_l)$ (лемма 2), поэтому $\mu(\mathbf{q},E')=0$. Так как $\mu(\mathbf{q},E)$ строго возрастает по E, $E\in(\varepsilon_{l-1},\varepsilon_l)$, то а) доказано. Докажем теперь б). Обозначим $\beta(\mathbf{p},z)=\mu(\mathbf{p},z)/\Gamma(1/2-z/\omega)$; по определению функции $E_l(\mathbf{p})$ имеем $\beta(\mathbf{p}_n,E_l(\mathbf{p}_n))=0$, но тогда по лемме 2 $\beta(\mathbf{q},E')=0$. Следовательно, $\mu(\mathbf{p},z)$ не может иметь полюс в точке $z=E'$. Докажем, наконец, в). Пусть $E'=\varepsilon_l$, но $\lim\limits_{E\to E'}\mu(\mathbf{q},E)>0$. Тогда $\mu(\mathbf{q},E_0)>0$ для некоторого E_0, $E_0\in(\varepsilon_{l-1},\varepsilon_l)$. Следовательно, при некотором m имеем $E_l(\mathbf{p}_m)>E_0$, $\mu(\mathbf{p}_m,E_0)>0$.

Отсюда получаем противоречие $0 = \mu(\mathbf{p}_m, E_l(\mathbf{p}_m)) > \mu(\mathbf{p}_m, E_0) > 0$. Аналогично рассуждаем, если $E' = \varepsilon_{l-1}$. Утверждения а)–в) доказаны.

Теперь докажем, что число E' зависит лишь от точки $\mathbf{q}$, но не зависит от выбора последовательности $(\mathbf{p}_n)$. Пусть $\tilde{\mathbf{p}}_n \to \mathbf{q}$, где $\tilde{\mathbf{p}}_n \in U_{l-1} \cap U_l$, и пусть при этом $E_l(\tilde{\mathbf{p}}_n) \to \tilde{E}$. Допустим, что $E' < \tilde{E}$. В силу а) $E' = \varepsilon_{l-1}$, или $\tilde{E} = \varepsilon_l$. Используя а) и в), получаем, что $\lim\limits_{E\to E'} \mu(\mathbf{q}, E) \geqslant 0$, $\lim\limits_{E\to\tilde{E}} \mu(\mathbf{q}, E) \leqslant 0$. Возьмем E_1, E_2 такие, что $E' < E_1 < E_2 < \tilde{E}$, тогда $0 \leqslant \mu(\mathbf{q}, E_1) < \mu(\mathbf{q}, E_2) \leqslant 0$ — противоречие.

Итак, функция $E_l(\mathbf{p})$ продолжается по непрерывности в любую точку $\mathbf{q} \in \mathbb{T}^2$. При этом утверждения 1)–3) доказываемого предложения совпадают по существу с доказанными только что утверждениями а)–в).

3. Доказательство формулы

$$\sigma_1 \equiv \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (2\pi(n^2+m^2)-1)\exp(-\pi(n^2+m^2)) = 0. \tag{П1}$$

Дифференцируя по α равенство

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\alpha(n^2+m^2)) = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\alpha n^2)\Big)^2$$

и подставляя $\alpha = 1$, получаем

$$\sigma_1 = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2)\Big)\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (4\pi n^2 - 1)\exp(-\pi n^2)\Big).$$

Достаточно теперь показать, что $\sigma_2 = 0$, где $\sigma_2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (4\pi n^2 - 1)\exp(-\pi n^2)$. Обозначая $q = e^{-\pi}$, получаем соотношение, эквивалентное равенству $\sigma_2 = 0$:

$$8\pi \sum_{n\geqslant 1} n^2 q^{n^2} = \theta_3(0,q) \tag{П2}$$

(по поводу θ-функций будем ссылаться на [64]). Легко проверить, что $8\pi \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 q^{n^2} = -\pi\theta_3''(0,q)$. Используя формулу

$$\theta_3''(z,q) = 4\theta_3(z,q)\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n q^n (1-q^{2n})^{-1} \sin nz$$

([64], с.371), получаем

$$\theta_3''(0,q) = 8\theta_3(0,q)\sigma_3, \text{ где } \sigma_3 = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n n q^n (1-q^{2n})^{-1}.$$

Отсюда $8\pi \sum\limits_{n\geqslant 1} n^2 q^{n^2} = -8\pi\theta_3(0,q)\sigma_3$. Таким образом, (П 2) равносильно равенству $-8\pi\sigma_3 = 1$. Рассмотрим разложение

$$\sum_{n\geqslant 1} n q^n (1-q^{2n})^{-1} \cos nx = K^2(k)(2\pi^2)^{-1}(1 - k^2\mathrm{sn}^2 u - E(k)/K(k)),$$

где $u = K(k)x/\pi$([64], с.415). При $x = \pi/2$ имеем $\mathrm{sn}u = \mathrm{sn}K = 1$([64], гл.22), поэтому $\sigma_3 = (2\pi^2)^{-1}(K^2(k) - k^2K(k) - K(k)E(K))$. Здесь $q = \exp(-\pi K'/K)$, причем при $k = 1/\sqrt{2}(= k_0)$ получаем $K = K'$. Тем самым обозначая $K_0 = K(k_0), E_0 = E(k_0)$, имеем $\sigma_3 = -K_0(2E_0 - K_0)/4\pi^2$. Так как $K_0 = (4\sqrt{\pi})^{-1}(\Gamma(1/4))^2$, $2E_0 - K_0 = 2\pi^{3/2}(\Gamma(1/4))^{-2}$ ([64], с.421), то $\sigma_3 = -1/8\pi$, и (П1) доказано.

4. Доказательство леммы 5. 1. Как показывает доказательство предложения 10, при любом $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$ и при любых E', E'' таких, что $\varepsilon_{l-1} < E' < E'' < \varepsilon_l$, матрица $\tilde{Q}(\mathbf{p}; E'') - \tilde{Q}(\mathbf{p}; E')$ положительно определена. Но тогда по теореме Лидского ([38], с.159) $\mu_i(\mathbf{p}; E') < \mu_i(\mathbf{p}; E'')$ $\forall i$. 2. Это утверждение получается элементарными рассуждениями, использующими круги Гершгорина ([62], с.390) и асимптотику (2.38). 3. Зафиксируем $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^2$. Из теоремы Реллиха ([38], с.156) вытекает, что существуют непрерывно дифференцируемые в окрестности точки ε_l функции $\tilde{\beta}_1(E), \ldots, \tilde{\beta}_n(E)$ такие, что полные наборы $\{\tilde{\beta}_1(E), \ldots, \tilde{\beta}_n(E)\}$ и $\{\beta_1(\mathbf{p}; E), \ldots, \beta_n(\mathbf{p}; E)\}$ совпадают в этой окрестности. Число функций $\tilde{\beta}_i(E)$, отличных от нуля в точке $E = \varepsilon_l$, в точности совпадает с рангом $r_l(\mathbf{p})$ по определению последнего. Остальное элементарно.

Список литературы

[1] *Квантовый эффект Холла*, Новости физики твердого тела, Мир, М., 1986, с. 1–232.

[2] Новиков С. П., *Двумерные операторы Шрёдингера в периодических полях*, Соврем. проблемы мат. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), т. 23, ВИНИТИ, М., 1983, с. 3–32.

[3] Кричевер И. М., *Спектральная теория двумерных операторов и ее приложения*, Успехи мат. наук **44**, вып. 2 (1989), 121–184.

[4] Aharonov Y., Casher A., *Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field*, Phys. Rev. A **19** (1979), 2461–2462.

[5] Thouless D., Kohmoto M., Nightingale P., den Nijs M., *Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 405–408.

[6] Avron J., Seiler R., Simon B., *Homotopy and quantization in condensed matter physics*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 51–53.

[7] Xia J., *Geometric invariants of the quantum Hall effect*, Commun. Math. Phys. **119** (1988), 29–50.

[8] Brown E., *Bloch electrons in a uniform magnetic field*, Phys. Rev. A. **133** (1964), 1038–1045.

[9] Zak J., *Magnetic translation groups*, Phys. Rev. A. **134** (1964), 1602–1612.

[10] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*, т. 1, Мир, М., 1977.

[11] Кучмент П. А., *Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных*, Успехи мат. наук **37**, вып. 4 (1982), 3–52.

[12] Шубин М. А., *Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами*, Успехи мат. наук. **34**, вып. 2 (1979), 77-127.

[13] Zak J., *The kq-representation in the dynamics of electrons in solids*, Solid state physics (Ehrenreich H. e.a., ed.), vol. 27, Acad. Press, New York, 1972.

[14] Avron J., Seiler R., *On the quantum Hall effect*, J. Geom. Phys. **1** (1984), 13–23.

[15] Zak J., *Effective hamiltonians and magnetic energy bands*, Phys. Lett. A. **117** (1986), 367–371.

[16] Zak J., *Are boundary conditions with and without a magnetic field compatible?*, Phys. Lett. A. **135** (1989), 385–389.

[17] Гейлер В. А., Маргулис В. А., *Спектр магнитно-блоховского электрона в двумерной решетке*, Теорет. и мат. физика **58** (1984), 461–472.

[18] Гейлер В. А., Маргулис В. А., *Структура спектра магнитно-блоховского электрона в двумерной решетке*, Теорет. и мат. физика **61** (1984), 140–149.

[19] Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д., *Замечание об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом*, ДАН СССР **137** (1961), 1011–1014.

[20] Павлов Б.С., *Теория расширений и явнорешаемые модели*, Успехи мат.наук **42**, вып. 6 (1987), 99–131.

[21] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H., *Solvable models in quantum mechanics*, Springer-Verlag, New York etc., 1988.

[22] Демков Ю. Н., Островский В. Н., *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, ЛГУ, Л., 1975.

[23] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Квантовая механика*, Наука, М., 1974.

[24] Малкин И. А., Манько В. И., *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, М., 1979.

[25] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, Наука, М., 1973.

[26] Boon M. H., *Representations of the invariance group for a Bloch electron in a magnetic field*, J.Math. Phys. **13** (1972), 1268–1285.

[27] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. Г., *Статистическая физика.* ч.2, Наука, М., 1978.
[28] Кириллов А. А., *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
[29] Желобенко Д. П., Штерн А. И., *Представления групп Ли*, Наука, М., 1983.
[30] Zak J., *Group-theoretical consideration of Landau level broadening in crystals*, Phys. Rev. **A.136** (1964), 776-780.
[31] Thoma E., *Eine Charakterisierung diskreter Gruppen von Typ I*, Invent. Math. **6** (1968), 190–196.
[32] Opechowski W., Tamm W. G., *Invariance groups of the Schrödinger equation for the case of uniform magnetic field*, Physica **42** (1969), 529–556.
[33] Janssen A. J. E. M., *Bargmann transform, Zak transform, and coherent states*, J. Math. Phys. **23** (1982), 720–731.
[34] Cartier P., *Quantum mechanical commutation relations and theta-functions*, Proc. Symp. Pure Math. **9** (1966), 361–383.
[35] Bentosela F., *Magnetic Bloch functions*, Nuovo cim. **B16**, ser. 11 (1973), 115–126.
[36] Лион Ж., Вернь М., *Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды*, Мир, М., 1983.
[37] Wannier G.H., *Quantum numbers for Bloch electrons in a magnetic fields*, Phys. status solidi (b) **100** (1980), 163–170.
[38] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
[39] Grossmann A., *Momentum-like constants of motion*, Stat. Mech. and Field Theory (/Sen R.N., Weil C., ed.), Halsted Press, New York, 1972, pp. 101–110.
[40] Вонсовский С. В., Кацнельсон М. И., *Квантовая физика твердого тела*, Наука, М., 1983.
[41] Langbein D., *The tight-binding and the nearly-free-electron approach to lattice electrons in external magnetic fields*, Phys. Rev. **180** (1969), 633–648.
[42] Лыскова А.С., *Топологические характеристики спектра оператора Шрёдингера в магнитном поле и слабом потенциале*, Теорет. и мат. физика **65** (1985), 368–378.
[43] Schellnhuber H. J., Obermair G. M., *First-principle calculation of diamagnetic band structure*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 276–279.
[44] Dana I., Zak J., *Comment on "First-principle calculation of diamagnetic band structure"*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982).
[45] Obermair G. M., Schellnhuber H. J., *Respond*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982).
[46] Simon B., *Continuity of density of states in a magnetic field*, J. Phys. A **15** (1982), 2981–2983.
[47] Avron J., Simon B., *Stability of gaps for periodic potentials under variation of magnetic field*, J. Phys. A. **18** (1985), 2199–2206.
[48] Nenciu G., *Stability of energy gaps under variation of the magnetic field*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 127–132.
[49] Гейлер В. А., Маргулис В. А., *Плотность состояний 2D-электронов при наличии магнитного поля и случайного потенциала в точно решаемой модели*, Журн. эксперим. и теорет. физики **95** (1989), 1134–1145.
[50] Hofstadter D. R., *Energy bands and wave functions of Bloch electrons in rationan and irrational magnetic fields*, Phys. Rev. B. **14** (1976), 2239–2249.
[51] Claro F., Wannier G. H., *Magnetic subbands structure of electrons in hexagonal lattices*, Phys. Rev. B. **19** (1979), 6068–6074.
[52] Mac Donald A. H., *Landau-level subband structure on a square lattice*, Phys. Rev. B. **28** (1983), 6713–6717.
[53] Wannier G. H., *A result non dependent on rationality for Bloch electrons in a magnetic field*, Phys. status solidi (b) **88** (1978), 757–765.
[54] Kohmoto M., *Topological invariants and the quantization of the Hall conductance*, Ann. Phys. (USA) **160** (1985), 343–354.
[55] Гейлер В. А., Маргулис В. А., *Андерсоновская локализация в недискретной мэрилендской модели*, Теорет. и мат. физика **70** (1987), 192–201.
[56] Крейн М. Г., Лангер Г. К., *О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве* $\Pi_\varkappa$, Функцион. анализ и его прил. **5**, вып. 2 (1971), 59–71.
[57] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H., *Point interactions in two dimensions: Basic properties, approximations and applications to solid state physics*, J. reine und angew. Math. no. 380 (1987), 87–107.
[58] Ребане Т. К., Шариджанов Р. И., *Магнитные свойства простейших систем в модели потенциалов нулевого радиуса*, Теорет. и экспер. химия **10** (1974), 444–449.
[59] Новиков С. П., Фоменко А. Т., *Элементы дифференциальной геометрии и топологии*, Наука, М., 1987.

[60] Ando T., *Electron localization in a two-dimensional system in strong magnetic fields. I*, J. Phys. Soc. Japan. **52** (1983), 1740–1749.
[61] Переломов А. М., *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987.
[62] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
[63] Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*, т. 2, Наука, М., 1968.
[64] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., *Курс современного анализа*, т. 2, ГИФМЛ, М., 1963.
[65] Bellissard J., *C^*-algebras in solid state physics. 2D-electrons in a uniform magnetic field*, London Math. Soc. Lect. Not. Ser. no. 136 (1988), 49–76.
[66] Bellissard J., *K-theory of C^*-algebras in solid state physics*, Lect. Notes Phys. **257** (1986), 99–156.
[67] Nenciu G., *Bloch electrons in a magnetic field: rigorous justification of the Peierls–Onsager effective Hamiltonian*, Lett. Math. Phys. **17** (1989), 247–252.
[68] Helffer B., Sjöstrand J., *Analyse semi-classique pour l'equation de Harper (avec application a l'equation de Schrödinger avec champ magnétique)*, Bull. Soc. Math. France. **116,** suppl. 34 (1988), 1–113.
[69] Helffer B., *Semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications*, Lect. Notes Math. no. 1336 (1989), 1–107.
[70] Альбеверио С., Фенстад Й., Хёэг-Крон Р., Линдстрём Т., *Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике*, Мир, М., 1990.

Примечание при корректуре. После поступления статьи в редакцию появились работы: 1) Nakamura S., Bellissard J. Low energy bands do not contribute to quantum Hall effect // Commun. Math. Phys. 1990. 131, N 2. P. 283–305; 2) Helffer B., Sjöstrand J. Semi-classical analysis for Harper's equation. III. //Bull. Soc. Math. France. 1989. 117, N 4, suppl. 39. P. 1–124. В первой из этих работ для широкого класса периодических потенциалов доказано, что первый класс Чженя расслоения собственных функций нижней зоны Ландау равен нулю (см. § 2.6 обзора). Во второй — указан класс периодических потенциалов, приводящих в случае иррационального потока к появлению в спектре участка, представляющего собой канторовское множество нулевой меры (см. § 1.5).

Поступило 25 августа 1989 г.

Мордовский государственный
педагогический институт им. М. Е. Евсевьева
Саранск
430007, Студенческая ,13,
МГПИ, кафедра математики