



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Никитин, О логарифмических коэффициентах одно-
листных функций,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 42–49

<https://www.mathnet.ru/ivm5115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 апреля 2025 г., 01:33:26



[5], с. 23—28), то выписать многочлены $P_n^\pm(x)$ при произвольном a для любого n не представляется возможным.

Замечание 3. Знакопостоянные многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на системе из двух симметричных отрезков в пространстве L_p ($1 \leq p < \infty$), изучались в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.— 184 с.
2. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Соч.— Т. II. Конструктивная теория функций.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.— 627 с.
3. Кузьмина А. Л. О неотрицательных многочленах, наименее уклоняющихся от нуля в $C[-1, 1]$ // Конструктив. теория функций и функц. анализ.— Казань, 1987.— Вып. 6.— С. 83—91.
4. Ахизер Н. И. Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах // Изв. АН СССР. ОМОН.— 1930.— С. 161—178.
5. Achyzer N. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. 3.— 1928.— Т. 3.— Вып. 2.— С. 1—69.
6. Тырыгин И. Я. О знакопостоянных полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на системе отрезков в пространствах L_p // Теория приближения и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев, 1987.— С. 88—93.

г. Казань

Поступила
24.10.1988

С. В. Никитин

УДК 517.54

О ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Неравенство для логарифмической площади и некоторые следствия

Пусть S — класс регулярных и однолистных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, нормированных разложением $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$. Если $f(z) \in S$, то обозначим

$$\log \frac{f(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k z^k \quad (1)$$

и будем называть числа $2\gamma_k$ ($k = 1, 2, \dots$) логарифмическими коэффициентами функции $f(z)$, а площадь образа круга $|z| \leq r$ при отображении функцией $\log(f(z)/z)$ — логарифмической площадью. Величина логарифмической площади $\sigma(r, \log(f(z)/z))$ может быть представлена в виде

$$\sigma\left(r, \log \frac{f(z)}{z}\right) = \iint_{|z| < r} \left| \left(\log \frac{f(z)}{z} \right)' \right|^2 d\sigma = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k}.$$

При любом $p > 0$ положим

$$\left(\frac{f(z)}{z} \right)^{p/2} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(p) z^k, \quad I_p(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta. \quad (1')$$

Теорема 1 (Л. де Бранж [1]). Для каждой функции $f(z) \in S$ и любой последовательности чисел $\{\sigma_k\}_1^{n+1}$, подчиненной условиям невозрастания и выпуклости:

- 1) $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq \sigma_{n+1} = 0$ ($n \geq 1$),
- 2) $\sigma_k - \sigma_{k+1} \geq \sigma_{k+1} - \sigma_{k+2}$ ($k = 1, n-1$; $n \geq 2$),

выполняется неравенство для логарифмических коэффициентов

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k k |\gamma_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{k}.$$

Знак равенства имеет место только для функций Кёбе $K(z) = z(1-z)^{-2}$.

В работе [2] И. М. Милин доказал следующее следствие из теоремы 1.

Следствие. Для каждой функции $f(z) \in S$ при выполнении условий теоремы 1 справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k k |\gamma_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{k} - (\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3) \left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right), \quad n \geq 2; \quad (3)$$

знак равенства имеет место только для функций Кёбе.

Используя это следствие, можно усилить неравенство для логарифмической площади: $\sigma(r, \log(f(z)/z)) \leq \sigma(r, \log(K(\cdot)/z))$, где $f(z) \in S$, $K(\cdot)$ — функция Кёбе, известное как гипотеза И. Е. Базилевица и впервые доказанное в [3], а именно, справедлива

Теорема 2. Для каждой функции $f(z) \in S$ при любом $r \in (0, 1)$ величина логарифмической площади удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k} \leq \log \frac{1}{1-r^2} - r^2 (1-r^2)^2 \left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right) \quad (4)$$

со знаком равенства для функций Кёбе.

Доказательство. Применим к функции $f(z)$ следствие, взяв в качестве последовательности $\{\sigma_k\}_{k=1}^{n+1}$, $\sigma_k = r^{2k} - r^{2n+2}$, $k = 1, n+1$, которая удовлетворяет условиям (2). Из (3) имеем

$$\sum_{k=1}^n k |\gamma_k|^2 r^{2k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k} + r^{2n+2} \sum_{k=1}^n \left(k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) - (\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3) \left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right). \quad (5)$$

Так как $\sum_{k=1}^n \left(k |\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) < \delta$, где $\delta < 0,312$ [4] (теорема 3.1), то переходя

в (5) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая, что $\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 = r^2(1-r^2)^2$,

а $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r^{2k} = \log \frac{1}{1-r^2}$, получаем (4). Проверкой убеждаемся, что для функции Кёбе в (4) имеет место знак равенства.

Следствие 1. Для каждой функции $f(z) \in S$ при любом $r \in (0, 1)$ справедлива усиленная теорема искажения

$$|f(z)| \leq \kappa_1 \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \kappa_1 = \exp \left[-r(1-r)^2 \left(1 - \left|\frac{c_2}{2}\right|^2\right) \right] \leq 1, \quad (6)$$

со знаком равенства только для функций Кёбе.

Доказательство. Согласно (1') при $p=1$ и (1) имеем

$$\sqrt{J(z)/z} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(1) z^k = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k \right\}; \quad (7)$$

отсюда с помощью неравенства Коши получим

$$\frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{1-r} \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(1)|^2 r^k, \quad z = re^{i\theta}. \quad (8)$$

Но для тождества (7) известно следующее неравенство Лебедева — Милина [5]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(1)|^2 r^k \leq \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^k \right\}. \quad (9)$$

Поэтому (8) переписывается так:

$$\frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{1-r} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^k \right\}.$$

Применив заключение теоремы 2, в котором r^2 заменено на r , получим

$$|f(z)| \leq \frac{r}{1-r} \exp \left[\log \frac{1}{1-r} - r(1-r)^2 \left(1 - \left| \frac{c_2}{2} \right|^2 \right) \right];$$

отсюда и следует (6). Так как равенство в неравенстве Лебедева — Милина (9) достигается только для функций Кёбе, то и в (6) оно имеет место только для таких функций.

Следствие 2. Для каждой функции $f(z) \in S$ при любом $r \in (0, 1)$ справедливо неравенство для среднеинтегрального модуля $I_1(r, f)$:

$$I_1(r, f) \leq \alpha_2 \frac{r}{1-r^2}, \quad \alpha_2 = \exp \left[-r^2(1-r^2)^2 \left(1 - \left| \frac{c_2}{2} \right|^2 \right) \right],$$

со знаком равенства только для функций Кёбе.

Доказательство. Из (1') при $p=1$ имеем

$$I_1(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(z)}{z} \right| d\theta = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{1/2} \right|^2 d\theta, \quad z = re^{i\theta},$$

или

$$I_1(r, f) = r \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(1)|^2 r^{2k}. \quad (10)$$

Ввиду неравенства Лебедева — Милина (9) и (10) получим

$$I_1(r, f) \leq r \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^{2k} \right\};$$

отсюда и из теоремы 2 получаем утверждение следствия 2 со знаком равенства только для функций Кёбе.

§ 2. Оценка $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| r^k$ и $\sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k$, $0 < r \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$

Из [6] имеем $\left| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k r^k \right| \leq \log \frac{1}{1-r}$. Далее, из неравенства Коши и неравенства из гипотезы Базилевича получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| r^k \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |\gamma_k|^2 r^k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \right)^{1/2} \leq \log \frac{1}{1-r},$$

где равенство достигается только для функций Кёбе.

Рассмотрим теперь оценку сверху конечной суммы $2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k$, $r \in (0, 1]$.

Имеем

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k = 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} |\gamma_k| \frac{r^k}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n k |\gamma_k|^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k}.$$

Применяя результат И. М. Милина ([4], теорема 3.1) к $\sum_{k=1}^n k |\gamma_k|^2$, в правой части последнего неравенства получим

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k} + \delta, \quad (11)$$

где δ определено там же [4].

Цель данного параграфа — усиление неравенства (11). Точнее, будет усиливаться некоторая мажоранта для (11), что при $r=1$ даст усиление и для самой формулы (11).

По функции $f(\zeta) \in S$ построим $F(z) = 1/f(\zeta)$, $z = 1/\zeta \in B^0 = \{z: |z| > 1\}$, а затем при любом конечном w рассмотрим функцию $\log [z/(F(z) - w)]$ и ее разложение в ряд Тейлора около $z = \infty$. Пусть

$$\log \frac{z}{F(z) - w} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(w) z^{-k}, \quad (12)$$

где $q_k(w)$ ($k=1, 2, \dots$) — полиномы, связанные с полиномами Фабера $F_k(w)$ согласно [4] (с. 14) соотношением

$$q_k(w) = \frac{1}{k} F_k(w) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Если в (12) положить $w=0$ и полученное разложение сравнить с разложением (1), то будем иметь

$$2\gamma_k = q_k(0) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (14)$$

Так как функция $F(z)$ не обращается в нуль в B^0 , то внутренность любой линии уровня $C_\rho = \{w: w = F(z), |z| = \rho\}$, $\rho > 1$, содержит точку $w=0$, а тогда по принципу максимума модуля для субгармонической функции, учитывая (14), получим

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k = \sum_{k=1}^n |q_k(0)| r^k \leq \max_{w \in C_\rho} \sum_{k=1}^n |q_k(w)| r^k. \quad (15)$$

Но на линии уровня C_ρ $q_k(w) = q_k(F(z))$, $|z| = \rho$, а $q_k(F(z))$ связана с функцией $A_k(z)$ в силу (13) и [4] (с. 15) равенством

$$q_k(F(z)) = (1/k) z^k + A_k(z) \quad (k=1, 2, \dots). \quad (16)$$

Подставив (16) в правую часть (15) и воспользовавшись неравенством треугольника и неравенством Коши, получим

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq \max_{|z|=\rho} \left(\sum_{k=1}^n k |A_k(z)|^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k} \right)^{1/2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\rho r)^k.$$

Отсюда, учитывая оценку $\sum_{k=1}^n k |A_k(z)|^2 \leq \log \frac{1}{1-\rho^{-2}}$, $|z| = \rho$ ([4], с. 29), найдем

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-\rho^{-2}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\rho r)^k. \quad (*)$$

Принимая во внимание, что $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\rho r)^k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rho^{2k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k}$, приходим

к неравенству

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-\rho^{-2}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rho^{2k}.$$

При этом минимум по ρ достигается при $\rho^2 = \exp [2x/(2n+1)]$ и $x = \log 2$,

т. е. $\rho^{2n+1} = 2$, и равен $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \delta$, т. е.

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \delta,$$

что совпадает с (11). Поэтому применим к (*) более тонкие оценки.

1. Оценка $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rho^{2k}$, $1 \leq \rho < \infty$. Имеем

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (\rho^{2k} - 1) = \sum_{k=1}^n \int_1^{\rho^2} t^{k-1} dt = \int_1^{\rho^2} \frac{1-t^n}{1-t} dt.$$

Положим $\rho^2 = e^{2x/(2n+1)}$, $0 \leq x < \infty$, и сделаем в последнем интеграле замену переменной $t = \exp [2\tau/(2n+1)]$. Тогда получим

$$S_n^{(1)} = \int_0^x \frac{t^{n+1/2} - t^{1/2}}{t^{1/2} - t^{-1/2}} \frac{dt}{t} = \frac{2}{2n+1} \int_0^x \frac{e^\tau - e^{\tau/(2n+1)}}{e^{\tau/(2n+1)} - e^{-\tau/(2n+1)}} d\tau. \quad (17)$$

Но для любого $0 \leq u < \infty$ имеем

$$2u \leq e^u - e^{-u} \leq 2u \frac{e^u + e^{-u}}{2} \leq 2ue^u, \quad (18)$$

что доказывается сравнением коэффициентов при одинаковых степенях разложений данных функций в ряд Тейлора. Используя (18), находим

$$\int_0^x \frac{2(e^\tau - e^{\tau/(2n+1)})}{e^{\tau/(2n+1)} + e^{-\tau/(2n+1)}} \frac{d\tau}{\tau} \leq S_n^{(1)} \leq \int_0^x \frac{e^\tau - e^{\tau/(2n+1)}}{\tau} d\tau. \quad (19)$$

Учитывая неравенство $e^x - 1 \geq x$, из (19) получаем

$$S_n^{(1)} \leq \int_0^x \frac{e^\tau - 1}{\tau} d\tau - \int_0^x \frac{e^{\tau/(2n+1)} - 1}{\tau} d\tau \leq \int_0^x \frac{e^\tau - 1}{\tau} d\tau - \frac{x}{2n+1}, \quad (20)$$

$$S_n^{(1)} \geq \int_0^x \frac{e^\tau e^{-\tau/(2n+1)} - 1}{\tau} d\tau \geq \int_0^x \frac{e^\tau - 1}{\tau} d\tau - \frac{e^x - 1}{2n+1}. \quad (21)$$

Если ввести обозначение

$$e(x) = \int_0^x \frac{e^\tau - 1}{\tau} d\tau, \quad 0 \leq x < \infty,$$

то из (20) и (21) получим

$$-\frac{e^x - 1}{2n+1} \leq S_n^{(1)} - e(x) \leq -\frac{x}{2n+1}.$$

2. Оценка $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} r^{2k}$, $0 < r \leq 1$. Имеем

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (r^{2k} - 1) = - \sum_{k=1}^n \int_{r^2}^1 t^{k-1} dt = - \int_{r^2}^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt.$$

Положим $r^2 = e^{-2x/(2n+1)}$, $0 \leq x < \infty$, и сделаем замену переменной в последнем интеграле $t = \exp[-2\tau/(2n+1)]$. Тогда

$$S_n^{(2)} = - \frac{2}{2n+1} \int_0^x \frac{e^{-\tau/(2n+1)} - e^{-\tau}}{e^{\tau/(2n+1)} - e^{-\tau/(2n+1)}} d\tau.$$

Используя (18), получим

$$- \int_0^x \frac{e^{-\tau/(2n+1)} - e^{-\tau}}{\tau} d\tau \leq S_n^{(2)} \leq - \int_0^x \frac{2(e^{-\tau/(2n+1)} - e^{-\tau})}{\tau(e^{\tau/(2n+1)} + e^{-\tau/(2n+1)})} d\tau. \quad (22)$$

Преобразовав левое неравенство из (22) с использованием неравенства $1 - e^{-\tau/(2n+1)} \geq \frac{\tau}{2n+1} e^{-\tau/(4n+2)}$, которое следует из (18), находим

$$S_n^{(2)} \geq - \int_0^x \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau + 2[1 - e^{-x/(2(2n+1))}], \quad (23)$$

$$S_n^{(2)} \leq - \int_0^x \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau + \frac{2x - (1 - e^{-x})}{2n+1}. \quad (24)$$

Заметив, что $-\int_0^x \frac{1-e^{-\tau}}{\tau} d\tau = e(-x)$, из (23) и (24) получаем

$$2[1 - e^{-x/(2(2n+1))}] \leq S_n^{(2)} - e(-x) \leq \frac{2x - (1 - e^{-x})}{2n+1}. \quad (25)$$

3. Оценка $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (pr)^k$. Имеем

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} [(pr)^k - 1] = \begin{cases} \int_1^{pr} \frac{1-t^n}{1-t} dt, & pr \geq 1; \\ \int_{pr}^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt, & pr \leq 1. \end{cases}$$

Пусть $p^2 = e^{2x/(2n+1)}$, $r^2 = e^{-2y/(2n+1)}$, $pr = e^{(x-y)/(2n+1)}$. Воспользовавшись результатами пп. 1 и 2, получим

$$- \frac{e^{(x-y)/2} - 1}{2n+1} \leq S_n^{(3)} - e\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq - \frac{x-y}{2(2n+1)}, \quad pr \geq 1 (x \geq y), \quad (26)$$

$$2[1 - e^{-x/(4(2n+1))}] \leq S_n^{(3)} - e\left(-\frac{y-x}{2}\right) \leq \frac{y-x - (1 - e^{-(y-x)/2})}{2n+1}, \quad pr \leq 1 (x \leq y). \quad (27)$$

4. Оценка $\log \frac{1}{1-\rho^{-2}}$. Положив $\rho^2 = \exp [2x/(2n+1)]$, $0 < x < \infty$, будем иметь

$$\log \frac{1}{1-\rho^{-2}} = \frac{x}{2n+1} + \log (e^{x/(2n+1)} - e^{-x/(2n+1)})^{-1}.$$

Используя (18), получим отсюда

$$\log \frac{1}{1-\rho^{-2}} \leq \frac{x}{2n+1} + \log \frac{1}{x} + \log \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Так как $\log \left(n + \frac{1}{2} \right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - C$, где C — постоянная Эйлера, то окончательно

$$\log \frac{1}{1-\rho^{-2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \log \frac{1}{x} - C + \frac{x}{2n+1}. \quad (28)$$

Вернемся теперь к оценке $\sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k$. В обозначениях п. 3 в силу (28), (25) — (27) имеем:

$$a) \log \frac{1}{1-\rho^{-2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \log \frac{1}{x} - C + \frac{x}{2n+1};$$

$$b) S_n^{(2)} - e(-y) \leq 2y/(2n+1);$$

$$c) S_n^{(3)} - e\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq \begin{cases} -(x-y)/(2(2n+1)), & x \geq y; \\ (y-x)/(2n+1), & x \leq y. \end{cases}$$

Теперь, используя утверждения а) — с), получаем для (11) и (*) соответственно мажоранты

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + e(-y) + \delta + \frac{2y}{2n+1}, \quad (11')$$

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} e(-y) + e\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x} - \frac{1}{2} C + \frac{2y}{2n+1}. \quad (*')$$

Оценка (*') представляет собой однопараметрическое семейство неравенств. При надлежащем выборе параметра x неравенство (*') сильнее неравенства (11') при каждом $0 \leq y < \infty$. Действительно, т. к. функция $e(t)$ выпукла: $e''(t) = (1 - (1-t)e')/t^2 \geq 0$ при $t \in (-\infty, \infty)$, то $e((x-y)/2) \leq \frac{1}{2} [e(x) + e(-y)]$. Поэтому, обозначая правые части неравенств (*') и (11') соответственно через $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi(x)$, имеем

$$\varphi_1(x, y) \leq \varphi(y) + \frac{1}{2} \left[e(x) + \log \frac{1}{x} - C \right] - \delta. \quad (29)$$

Остается заметить, что наименьшее значение выражения в квадратных скобках в (29) достигается при $x = \log 2$ и равно 2δ по определению этой постоянной в [4].

Найдем теперь минимум по x правой части неравенства (*') при любом фиксированном $y \in [0, \infty)$. Положим

$$\psi(x, y) = e((x-y)/2) + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x}.$$

Так как $\psi(x, y)$ — строго выпуклая функция от x при $x \in (0, \infty)$, $\psi(0, y) = \psi(\infty, y) = \infty$, то $\psi(x, y)$ как функция от x достигает минимума при

$x = x^* \in (0, \infty)$, где $x^* = x^*(y)$ — единственное решение уравнения $1/x^* = (e^{(x^*-y)/2} - 1)/((x^* - y)/2)$.

Итак, мы пришли к окончательному неравенству

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} e(-y) + e\left(\frac{x^*-y}{2}\right) + \frac{1}{2} \log \frac{1}{x^*} - \frac{1}{2} C + \frac{2y}{2n+1}, \quad (**)$$

где $y = -(2n+1) \log r$, $x^* = x^*(y)$.

Из предыдущего вытекает, что неравенство (**) усиливает неравенство (11') при всех $r \in (0, 1]$. Действительно, обозначая правую часть неравенства (**) через $\varphi_1(y)$, на основании (29) имеем

$$\varphi_1(y) = \min_x \varphi_1(x, y) \leq \min_x \left\{ \varphi(x) + \frac{1}{2} \left[e(x) + \log \frac{1}{x} - C \right] - \delta \right\} = \varphi(y).$$

При $y=0$, т. е. при $r=1$ и $x^* = \log(9/4)$, неравенство (**) усиливает и неравенство (11): при $r=1$ неравенство (**) дает оценку

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + e\left(\log \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} \log \left(\log \frac{9}{4}\right)^{-1} - \frac{1}{2} C = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \delta_0,$$

где $\delta_0 \approx 0,2668$, а неравенство (11) — более грубую оценку

$$2 \sum_{k=1}^n |\gamma_k| \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \delta,$$

где $\delta < 0,312$.

В заключение отметим, что из (**) нельзя получить предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ точную оценку для $\sum_{k=1}^n |\gamma_k| r^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Branges L. de. A proof of the Bieberbach conjecture // Препринт №Е5. ЛОМИ АН СССР.—1984.—21 с.
2. Милин И. М. Оценка интегральных средних однолистных функций // Тез. сообщ. Всесоюз. конф. по геометрич. теории функций.—Новосибирск, 1988.—С. 70.
3. Milin I. M., Grinshpan A. Z. Logarithmic coefficients means of univalent functions // Complex Variables.—1986.—V. 7.—P. 139—147.
4. Милин И. М. Однолистные функции и ортонормированные системы.—М.: Наука, 1971.—256 с.
5. Лебедев Н. А., Милин И. М. Об одном неравенстве // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр.—1965, вып. 19.—С. 157—158.
6. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.—М.: Наука, 1966.—628 с.

г. Ставрополь

Поступили
первый вариант 13.12.1988
окончательный вариант 09.04.1990

А. Э. Пасенчук

УДК 517.968

ОБРАТИМОСТЬ АБСТРАКТНЫХ ТЁПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Пусть H — гильбертово пространство, $B(H)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H . Через Γ будем обозначать единичную окружность $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$, а через Z_{\pm} — следующие подмножества группы целых чисел Z : $Z_{\pm} = \{i \in Z : i \geq 0\}$.