



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Мелешко, О регуляризованных неортогональных факторизациях и псевдообращениях возмущённых матриц,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 485–498

<https://www.mathnet.ru/zvmmf4015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

21 апреля 2025 г., 20:53:06



УДК 519.61

О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЯХ
И ПСЕВДООБРАЩЕНИЯХ ВОЗМУЩЕННЫХ МАТРИЦ

МЕЛЕШКО В. И.

(Харьков)

Предлагаются и исследуются регуляризованные методы Гаусса и Холецкого факторизации и псевдообращения возмущенных матриц неполного ранга, возникающих при решении некорректных задач.

При численном решении некорректных задач [1]–[3], сводящихся к псевдообращению прямоугольной возмущенной, возможно неполного ранга матрицы, довольно часто возникает необходимость использовать методы неортогональной факторизации типа Гаусса и Холецкого [3], [4]. В настоящей работе предлагаются их конструктивные регуляризованные модификации в общем случае псевдообращения матриц неполного ранга. Для этих модификаций устанавливаются оценки возмущений для получаемых на их основе приближений, доказываются устойчивость предлагаемых алгоритмов и пределы изменения параметров регуляризации, обеспечивающие эту устойчивость. Исследование регуляризованного метода Холецкого ведется путем построения общей теории возмущений U^*IU -факторизаций для симметричных законечноопределенных матриц неполного ранга. Отметим, что близкие алгоритмы псевдообращения прямоугольных (квадратных вырожденных) матриц ранее указывались в [4], [5], но нигде анализ возмущений и тем самым обоснование этих алгоритмов для матриц неполного ранга не проводились.

§ 1. Регуляризованные методы неортогональной факторизации

Всюду в дальнейшем нормы векторов евклидовы, а нормы матриц спектральные; для упрощения изложения операторы перестановки строк и столбцов, связанные с выбором «ведущего» элемента на каждом шаге, опущены, поскольку их введение очевидно. Псевдообратная матрица понимается как матрица, порождающая среднеквадратичные решения минимальной евклидовой нормы [6], [7].

В регуляризованном методе Гаусса (р.м.Г.) строится последовательность матриц $A^{(k)}$, $k=0, 1, \dots$, $A^{(0)}=A$, в виде

$$(1.1) \quad A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}^{(k)}$ — обратимая матрица размера $k \times k$.

Для этого на k -м шаге у имеющейся клетки $A_{22}^{(k)}$ ищется ведущий ts -й элемент

$$|a_{ts}^{(k)}| = \max_{\substack{i \\ h < i \leq n, h < j \leq m}} |a_{ij}^{(k)}|,$$

где $a_{ij}^{(k)}$ есть ij -й элемент матрицы $A^{(k)}$.

Если $|a_{\tau s}^{(k)}| > \varepsilon$, то делается перестановка τ -й строки и s -го столбца с $(k+1)$ -ми строкой и столбцом матрицы $A^{(k)}$. Затем пересчитывается по полученной после перестановок клетке

$$(1.2) \quad A_{22}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k+1, k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ w^{(k)} & W^{(k)} \end{pmatrix}$$

матрица $A^{(k+1)}$, при этом

$$(1.3) \quad A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & \begin{pmatrix} a_{k+1, k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ \alpha^{(k)} & A_{22}^{(k+1)} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где $A_{22}^{(k+1)} = W^{(k)} - \alpha^{(k)} d^{(k)}$, $\alpha^{(k)} = (a_{k+1, k+1}^{(k)})^{-1} w^{(k)}$.
Если $|a_{\tau s}^{(k)}| \leq \varepsilon$, то процесс факторизации прекращается и определяется неортогональная факторизация матрицы A в виде

$$(1.4) \quad A_\varepsilon = U_k R_k, \quad U_k^* = (U_1^* : U_2^*), \quad R_k = (R_1 : R_2), \quad U_2 = A_{21}^{(k)}, \\ R_2 = A_{12}^{(k)}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_{21}^{(k)} & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}^{(k)} & a_{k2}^{(k)} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & a_{1k}^{(k)} \\ a_{22}^{(k)} & \dots & \dots & a_{2k}^{(k)} \\ 0 & \dots & \dots & a_{kk}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Приближение для псевдообратной матрицы строится таким образом:

$$(1.5) \quad A_\varepsilon^+ = R_k^+ U_k^+$$

Предложение 1. Если A не возмущена и $\varepsilon=0$, то в р.м.Г. будет сделано ровно r шагов факторизации, где $r = \text{rank } A$, и

$$(1.6) \quad A_\varepsilon = A = U_r R_r, \quad A^+ = R_r^+ U_r^+$$

Действительно, если будет не r шагов факторизации, то UR будет иметь ранг, отличный от r . Второе соотношение в (1.6) следует из теоремы 6 работы [7].

Вычисление R^+ в (1.5) (U^+ в (1.5)), когда R (соответственно, U^*) — верхнетрапецеидальная матрица, эффективно проводится ортогональной факторизацией $R = SQ$ с помощью преобразований Гивенса или Хаусхолдера [3], [4], где S — нижнетреугольная квадратная, Q — ортогональная матрицы. Тогда $R^+ = Q^* S^{-1}$.

Перейдем к описанию регуляризованного метода Холецкого (р.м.Х.) факторизации симметричных вырожденных законечноопределенных матриц.

Пусть имеется симметричная матрица A порядка n с элементами a_{ij} . Будем строить последовательность матриц

$$(1.7) \quad A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} & A_2^{(k)} \\ 0 & A_3^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k=0, 1, \dots,$$

где $A_1^{(k)}$ — верхнетреугольная матрица размера $k \times k$, $A_2^{(k)}$ — прямоугольная матрица, $A_3^{(k)}$ — симметричная матрица порядка $n-k$, 0 — нулевая матрица.

Для этого у клетки $A_3^{(k)}$ определяется ведущий элемент путем сравнения максимальных ее элементов, стоящих на диагонали и вне диагонали:

$$|a_{\tau\tau}| = \max_{k < i \leq n} |a_{ii}|, \quad |a_{\tau s}| = \max_{k < i \leq n, i < j \leq n} |a_{ij}|.$$

Если $|a_{\zeta\tau}^{(k)}| \geq |a_{\tau s}^{(k)}|$ и $|a_{\zeta\tau}^{(k)}| > \varepsilon$, то у матрицы $A^{(k)}$ меняются местами ζ -е строка и столбец с $(k+1)$ -ми строкой и столбцом соответственно.

После перестановок определяется матрица $A^{(k+1)}$, которая отличается от полученной после перестановок $A^{(k)}$ только элементами клетки

$$(1.8a) \quad A_3^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k+1, k+1}^{(k)} & d^{(k)} \\ d^{(k)*} & W_k \end{pmatrix},$$

принимающей вид

$$(1.8b) \quad \begin{pmatrix} |a_{k+1, k+1}^{(k)}|^{1/2} & \alpha^{(k)} \\ 0 & A_3^{(k+1)} \end{pmatrix},$$

где $\alpha^{(k)} = |a_{k+1, k+1}^{(k)}|^{-1/2} d^{(k)} \text{sign } a_{k+1, k+1}^{(k)}$, $A_3^{(k+1)} = W_3^{(k)} - (a_{k+1, k+1}^{(k)})^{-1} d^{(k)*} d^{(k)}$. Делается переход к следующему шагу факторизации.

Если $|a_{\zeta\tau}^{(k)}| < |a_{\tau s}^{(k)}|$ и $|a_{\tau s}^{(k)}| > \varepsilon$, то вводится ортогональное преобразование

$$(1.9) \quad G_k = (g_{ij})_{i,j=1}^n,$$

элементы которого совпадают с единичной матрицей, за исключением четырех элементов, определяемых следующим образом: $g_{\tau\tau} = -g_{ss} = g_{\tau s} = g_{s\tau} = 2^{-1/2}$. Вычисляется матрица

$$(1.10) \quad \check{A}^{(k)} = G_k A^{(k)} G_k,$$

у которой затем τ -й столбец и s -я строка переставляются с $(k+1)$ -м столбцом и $(k+2)$ -й строкой так, чтобы полученный $(k+1)$ -й диагональный элемент был наибольшим. Далее делается пересчет в соответствии с (1.8) элементов клетки $\check{A}_3^{(k)}$ и осуществляется переход к следующему шагу факторизации, при этом за $A^{(k+1)}$ принимается полученная $\check{A}^{(k+1)}$.

Как только $|a_{\tau s}^{(k)}| \leq \varepsilon$ и $|a_{\zeta\tau}^{(k)}| \leq \varepsilon$, так процесс факторизации прекращается и неортогональная факторизация матрицы A определяется в виде

$$(1.11) \quad A_\varepsilon = U_\varepsilon^* \check{I} U_\varepsilon, \quad U_\varepsilon = U_k G_{(k)},$$

где верхнетрапецеидальная матрица $U_k = (A_1^{(k)} : A_2^{(k)})$ составляется из клеток $A_1^{(k)}$ и $A_2^{(k)}$ полученной матрицы (1.7); $G_{(k)} = G_k \dots G_1$, где $G_i = I$, если преобразование (1.9) не проводилось; \check{I} — диагональная матрица с k -м диагональным элементом, определяемым как $\check{i}_k = \text{sign } a_{kk}^{(k-1)}$.

Предложение 2. Пусть симметричная матрица A порядка n имеет ранг $r \leq n$ и параметр регуляризации взят $\varepsilon = 0$. Тогда в р.м. X будет сделано ровно r шагов факторизации и

$$(1.12) \quad A_\varepsilon = A, \quad A^+ = G_{(r)} U_r^+ \check{I} U_r^{+*} G_{(r)}^*.$$

Если дополнительно A — неотрицательно-определенная матрица, то ведущим элементом является диагональный элемент, преобразование (1.9) нет необходимости проводить, \check{I} является единичной матрицей и тем самым

$$(1.13) \quad A_\varepsilon = U_r^* U_r = A, \quad A_\varepsilon^+ = U_r^+ U_r^{+*}.$$

Действительно, предположим, что матрица A неотрицательно-определенная и в то же время на каком-то шаге факторизации оказалось, что $|a_{\tau s}^{(k)}| > |a_{ss}^{(k)}| > 0$. Тогда $|a_{\tau s}^{(k)}| > |a_{\tau\tau}^{(k)}|$ и $|a_{\tau s}^{(k)}| > |a_{ss}^{(k)}|$. У матрицы \tilde{A} диагональные элементы после преобразования G_h по формуле (1.10) примут вид

$$\tilde{a}_{\tau\tau}^{(k)} = a_{\tau\tau}^{(k)} + 1/2(a_{\tau\tau}^{(k)} + a_{ss}^{(k)}), \quad \tilde{a}_{ss}^{(k)} = -a_{\tau\tau}^{(k)} + 1/2(a_{\tau\tau}^{(k)} + a_{ss}^{(k)})$$

и тем самым (с учетом указанных соотношений) станут разных знаков. Поэтому после факторизации получим, что у диагональной матрицы \tilde{I} есть единичный отрицательный элемент, а это противоречит неотрицательной определенности \tilde{A} .

§ 2. Исследование возмущений р. м. Г.

Предположим, что вместо истинной матрицы A задана возмущенная матрица $\tilde{A} = A + B$, по которой ведутся вычисления описанными методами факторизации и псевдообращения, где B — матрица возмущений. Промежуточные переменные, которые получаются в этих методах при вычислениях, проводимых по возмущенной матрице \tilde{A} , пометим тильдой. Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к неортогональным факторизациям и справедливые для невозмущенной матрицы A . Всюду в дальнейшем $\ker A$, $R(A)$ — ядро и образ A , P_X — ортопроектор на подпространство X , $P_X^\perp = I - P_X$, X^\perp — ортогональное дополнение X .

Лемма 1. Предположим, что имеется размера $r \times r$ клеточная верхнетреугольная обратимая матрица

$$(2.1) \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

у которой $A_1^* A_1 \geq \lambda_1^2 I > 0$, $A_3^* A_3 \geq \lambda_3^2 I > 0$, $\|A_2\| \leq \lambda_2$. Тогда

$$(2.2) \quad \|A^{-1}\| \leq 2^{1/2} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - 4\lambda_1^2 \lambda_3^2]^{1/2} \}^{-1/2},$$

а если дополнительно $\lambda_1^2 \leq \lambda_3^2$, $\lambda_2^2 \leq t\lambda_1^2$, $t \geq 0$, то

$$(2.3) \quad \|A^{-1}\| \leq 2^{1/2} [2 + t - (t^2 + 4t)^{1/2}]^{-1/2} \lambda_3^{-1}.$$

Для доказательства рассмотрим обратную к (2.1) матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1} A_2 A_3^{-1} \\ 0 & A_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя это выражение, получаем

$$(2.4) \quad \|A^{-1}\|^2 = \max_{\|x\| \leq 1} (A^{-1} \cdot A^{-1} x, x) = \max_{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \leq 1} [\|A_1^{-1}(x_1 - A_2 A_3^{-1} x_2)\|^2 + \|A_3^{-1} x_2\|^2] \leq \max_{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \leq 1} [\lambda_1^{-2} (\|x_1\| + \lambda_2 \lambda_3^{-1} \|x_2\|)^2 + \lambda_3^{-2} \|x_2\|^2].$$

Если взять двумерные матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \lambda_1^{-1} \lambda_3^{-1} \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3^{-1} \end{pmatrix},$$

то

$$(2.5) \quad \|C^{-1}\|^2 = \max_{\tau_1^2 + \tau_2^2 \leq 1} [\lambda_1^{-2} (\tau_1 + \lambda_2 \lambda_3^{-1} \tau_2)^2 + \lambda_3^{-2} \tau_2^2] = \\ = 2 \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2 - 4\lambda_1^2 \lambda_3^2]^{1/2} \}^{-1},$$

где при вычислении квадрата нормы $|C^{-1}|^2$ использовалось минимальное собственное значение двумерной матрицы CC^* , которое легко непосредственно вычисляется, а обратная величина к нему и дает (2.5).

Сравнивая (2.4), (2.5), находим (2.2), а из (2.2), (2.4) следует (2.3).

Для возмущенной прямоугольной матрицы $\bar{A} = A + B$ введем неортogonalную факторизацию вида

$$(2.6) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} = U \bar{R} = \begin{pmatrix} U_1 \bar{R}_1 & U_1 \bar{R}_2 \\ U_2 \bar{R}_1 & U_2 \bar{R}_2 + \bar{R}_3 \end{pmatrix},$$

где

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & I \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 & \bar{R}_2 \\ 0 & \bar{R}_3 \end{pmatrix},$$

U_1, \bar{R}_1 — обратимые матрицы (необязательно треугольные и с любыми диагональными элементами) размера $k \times k$, $k \leq r = \text{rank } A$.

Теорема 1. *Предположим, что исходная прямоугольная матрица A имеет ранг r и матрица возмущений $B = \bar{A} - A$ такова, что выполняется условие*

$$(2.7) \quad \|A^+\| \|B\| < 1.$$

Тогда для любых k таких, что $1 \leq k < r$, и для любых факторизаций (2.6) имеют место оценки

$$(2.8a) \quad \|\bar{R}_3\| \geq \|A^+\|^{-1} - \|B\|, \quad \|\bar{R}_3^+\| \leq \|A^+\|,$$

$$(2.8b) \quad \|\bar{R}_3\|_E \geq (r-k)^{1/2} (\|A^+\|^{-1} - \|B\|),$$

где $\|T\|_E$ — евклидова норма матрицы T .

Доказательство. Из (2.7) следует, что

$$(2.9) \quad \bar{R}_3 = \bar{A}_{22} - \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{A}_{12}.$$

Введем для \bar{A} сингулярное разложение $\bar{A} = Q \bar{\Sigma} V$, где Q, V — ортогональные матрицы, $\bar{\Sigma}$ — диагональная матрица, у которой по диагонали стоят сингулярные числа $\bar{\sigma}_j$ ($\bar{\sigma}_k \leq \bar{\sigma}_{k+1}$), $j = 1, 2, \dots, s$, $r \leq s \leq \min\{n, m\}$. В силу условия (2.7), r из этих чисел удовлетворяют соотношениям

$$(2.10) \quad \sigma_i - |B| \leq \bar{\sigma}_i \leq \sigma_i + |B|, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Определим $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ и $V = (V_1 : V_2)$, где Q_1, V_1^* — клетки размера $k \times s$. Тогда можно записать

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \bar{\Sigma} V_1 & Q_1 \bar{\Sigma} V_2 \\ Q_2 \bar{\Sigma} V_1 & Q_2 \bar{\Sigma} V_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому (2.9) записывается в виде

$$\bar{R}_3 = Q_2 \bar{\Sigma} [I - V_1 (Q_1 \bar{\Sigma} V_1)^{-1} Q_1 \bar{\Sigma}] V_2 = Q_2 \bar{\Sigma} (I - N_X) V_2,$$

где введен косопроектор $N_X = V_1 (Q_1 \bar{\Sigma} V_1)^{-1} Q_1 \bar{\Sigma}$ на подпространство $X = R(V_1)$ — образ матрицы V_1 , так как N_X идемпотентен, т. е. $N_X N_X = N_X$.

Из ортогональности Q следует, что $Q_2^* Q_2 = I - Q_1^* Q_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{R}_3^* \bar{R}_3 &= V_2^* (I - N_X)^* \bar{\Sigma} Q_2^* Q_2 \bar{\Sigma} (I - N_X) V_2 = \\ &= V_2^* (I - N_X)^* \bar{\Sigma} (I - Q_1^* Q_1) \bar{\Sigma} (I - N_X) V_2 = V_2^* (I - N_X)^* \bar{\Sigma}^2 (I - N_X) V_2. \end{aligned}$$

Тем самым сингулярные числа матрицы \tilde{R}_3 совпадают с сингулярными числами матрицы $L = \tilde{\Sigma}(I - N_x)V_2$. Из ортогональности V следует соотношение $V_2V_2^* = I - V_1V_1^*$, используя которое, получаем

$$\begin{aligned} LL^* &= \tilde{\Sigma}(I - N_x)V_2V_2^*(I - N_x)\tilde{\Sigma} = \\ &= \tilde{\Sigma}(I - N_x)(I - V_1V_1^*)(I - N_x)^*\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}(I - N_x)(I - N_x)^*\tilde{\Sigma}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сингулярные числа у L и тем самым у \tilde{R}_3 совпадают с сингулярными числами матрицы $M = \tilde{\Sigma}(I - N_x)$. Заметим, что матрица $I - N_x$, порождаяемая косопроектором N_x , обладает тем свойством, что $\|(I - N_x)e\| \geq \|(I - P_x)e\|$ для любых $e \in R^s$, где P_x — ортопроектор на подпространство X . Поэтому

$$\begin{aligned} (2.11) \quad \|M^*M\| &= \|\tilde{R}_3\|^2 = \max_{\|e\|=1} (\tilde{\Sigma}^2(I - N_x)e, (I - N_x)e) \geq \\ &\geq \min_{\dim X=k} \max_{\|e\|=1} (\tilde{\Sigma}^2(I - P_x)e, (I - P_x)e) \geq \\ &\geq (\sigma_{r-k} - \|B\|)^2 \geq (\|A^+\|^{-1} - \|B\|)^2, \end{aligned}$$

где учтено, что из (2.10) следует $\delta_1 \geq (\|A^+\|^{-1} - \|B\|)$. Из (2.11) вытекает первая оценка в (2.8а).

С другой стороны, для любых $y \in X^\perp$ имеет место

$$\begin{aligned} (M^*My, y) &= (\tilde{\Sigma}^2(I - N_x)y, I - N_xy) \geq \\ &\geq (\tilde{\Sigma}^2(I - P_x)y, (I - P_x)y) \geq \|A^+\|^{-1}\|y\|, \end{aligned}$$

что доказывает вторую оценку в (2.8а).

В евклидовых нормах матриц справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_3\|_E^2 &= \text{tr } M^*M = \text{tr } (I - N_x)^*\tilde{\Sigma}^2(I - N_x) = \sum_{i=1}^s \delta_i^2 \|n_i\|^2 \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^s \delta_i^2 \|p_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{s-k} \delta_i^2 \geq (r-k) \delta_{s-r+1}^2 \geq (r-k) (\|A^+\|^{-1} - \|B\|)^2, \end{aligned}$$

где n_i есть i -й столбец косопроектора $I - N_x$, p_i есть i -й столбец ортопроектора P_x . Здесь использовано свойство

$$\sum_{i=1}^s \|p_i\|^2 = s - k.$$

Тем самым доказано (2.8б).

Всюду в дальнейшем $\beta = \|B\|$, $\sigma_1 = \|A^+\|^{-1}$, $\sigma_r = \|A\|$.

Лемма 2. Если в р.м.Г. вычисления ведутся по возмущенной матрице \tilde{A} , ранг невозмущенной матрицы A равен r и возмущения B удовлетворяют (2.7), то на каждом k -м шаге, $k=0, 1, \dots, r-1$, ведущий элемент удовлетворяет соотношению

$$(2.12) \quad \|\tilde{a}_{rs}^{(k)}\| \geq (r-k)^{1/2} [(n-k)(m-k)]^{-1/2} (\sigma_1 - \beta) \geq \omega_{nmr} (\sigma_1 - \beta)$$

и выполняются оценки

$$(2.13) \quad \|(\tilde{A}_{11}^{(k)})^{-1}\| \leq 2^{k-1} \omega_{nmr}^{-1} (\sigma_1 - \beta)^{-1} \prod_{i=1}^{k-1} [2+i - (i^2+4i)^{1/2}]^{-1},$$

$$(2.14) \quad \|\tilde{R}_1^{-1}\| \leq 2^{(k-1)/2} \omega_{nmr}^{-1} (\sigma_1 - \beta)^{-1} \prod_{i=1}^{k-1} [2+i - (i^2+4i)^{1/2}]^{-1/2},$$

$$(2.15) \quad \|\bar{U}_1^{-1}\| \leq 2^{(k-1)/2} \prod_{i=1}^{k-1} [2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1/2},$$

где $\bar{A}_{11}^{(k)} = \bar{U}_1 \bar{R}_1$; \bar{U}_1, \bar{R}_1 определены в (1.4); $\omega_{nmr} = \min \{ [(n-r+1) \times (m-r+1)]^{-1/2}, r^{1/2}(nm)^{-1/2} \}$.

В силу теоремы 1, на каждом шаге ведущий элемент будет удовлетворять неравенствам (2.12). При этом $d_*^{(k-i)}$ в разложении

$$T_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{k-i, k-i}^{(k-i)} & d_*^{(k-i)} \\ 0 & T_i \end{pmatrix},$$

где $T_i = a_{kk}^{(k)}$, $i=1, 2, \dots, k-1$, будет удовлетворять $\|d_*^{(k-i)}\| \leq \forall i |a_{k-i, k-i}^{(k-i)}|$.

Поэтому если обозначить $\|T_i^{-1}\| = \psi_i$ и учесть, что $|a_{k-i, k-i}^{(k-i)}| \geq \psi_i^{-1}$, то из леммы 1 получим соотношение

$$(2.16) \quad \psi_{i+1} \leq 2^{1/2} [2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1/2} \psi_i, \quad i=1, 2, \dots, k-1,$$

где $\psi_i = |\bar{a}_{kk}^{(k)}|^{-1} \leq \omega_{nmr}^{-1} (\sigma_1 - \beta)^{-1}$.

Так как в силу принятых обозначений $T_k = R_1$, то из (2.16) следует (2.14). Аналогично доказывается (2.15). Оценка (2.13) следует из соотношения $\|(A_{11}^{(k)})^{-1}\| \leq \|R_1^{-1}\| \|U_1^{-1}\|$ и оценок (2.14), (2.15).

Отметим, что в частных случаях невырожденных, например симметричных, матриц (см. ниже второе утверждение леммы 3) оценки (2.12) — (2.15) могут быть значительно улучшены.

Теорема 2. *Предположим, что в р.м.Г. вычисления ведутся по возмущенной матрице $\bar{A} = A + B$, при этом A — прямоугольная матрица ранга r . Возмущения B удовлетворяют*

$$(2.17) \quad \rho\beta < 1$$

и для параметра регуляризации ε выполняется

$$(2.18) \quad c\beta \leq \varepsilon < \omega_{nmr} (\sigma_1 - \beta),$$

где $c = 1 + \rho [2\sigma_r + \beta + \sigma_r^2 \rho (1 - \rho\beta)]^{-1/2}$,

$$\rho = 2^{r-1} \omega_{nmr}^{-1} (\sigma_1 - \beta)^{-1} \prod_{i=1}^{r-1} [2+i-(i^2+4i)^{1/2}]^{-1}.$$

Тогда в р.м.Г. будет сделано ровно r шагов факторизации, а когда дополнительно $(c+1)\beta < \sigma_1$, то для приближения \bar{A}_ε^+ из (1.5), найденного приведенным р.м.Г., справедлива оценка

$$(2.19) \quad \|\bar{A}_\varepsilon^+ - A^+\| \leq \chi (1+c) \sigma_1^{-2} [1 - \sigma_1^{-1} (1+c)\beta]^{-1} \beta,$$

где

$$\chi = \begin{cases} (1 + \sqrt{5})/2, & \text{если } A \text{ неполного ранга } (r < \min\{n, m\}), \\ \sqrt{2}, & \text{если } A \text{ полного ранга } (r = \min\{n, m\}), \\ 1, & \text{если } A \text{ обратима } (r = n = m). \end{cases}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 2, для ведущего элемента в р.м.Г. при проведении вычислений по возмущенной матрице \bar{A} на всех k шагах до r -го включительно будет выполняться (2.12). Поэтому при выборе параметра регуляризации ε , удовлетворяющего правому

неравенству в (2.18), процесс факторизации до r -го шага останавливаться не будет. С другой стороны, используя оценку (2.13) и условие (2.17), получаем, что на каждом k -м шаге $\|\tilde{A}_{11}^{-1}\| \leq \rho$ и $\|\tilde{A}_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}\| \leq \rho^2(1-\rho\beta)^{-1}\beta$. Следовательно, для клетки $A_{22}^{(k)}$, указанной в (1.1), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_{22}^{(k)} - A_{22}^{(k)}\| &\leq \|\tilde{A}_{22} - A_{22}\| + \|A_{21}\tilde{A}_{11}^{-1}(\tilde{A}_{12} - A_{12}) + \\ &+ A_{21}(\tilde{A}_{11}^{-1} - A_{11}^{-1})A_{12} + (\tilde{A}_{21} - A_{21})\tilde{A}_{11}^{-1}\tilde{A}_{12}\| \leq \\ &\leq \{1 + \rho[2\sigma_r + \beta + \sigma_r^2\rho(1-\rho\beta)^{-1}]\}\beta = c\beta. \end{aligned}$$

Поэтому на r -м шаге для ведущего элемента справедливо

$$\|\tilde{a}_{rs}^{(r)}\| \leq \|\tilde{A}_{22}^{(k)} - A_{22}^{(k)}\| \leq c\beta \leq \varepsilon.$$

Тем самым процесс факторизации при выполнении левого неравенства в (2.18) прекратится именно на r -м шаге. В результате получим факторизацию $\tilde{A}_r = \tilde{U}_r \tilde{R}_r$ ранга r по типу (1.4), для которой

$$\|\tilde{A}_r - A_r\| \leq \left\| \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} - A_{11} & \tilde{A}_{12} - A_{12} \\ \tilde{A}_{21} - A_{21} & \tilde{A}_{22} - A_{22} - \tilde{A}_{22}^{(k)} \end{pmatrix} \right\| \leq (c+1)\beta.$$

Отсюда на основе теории возмущений псевдообратных матриц [8], [9] получаем оценку (2.19).

С л е д с т в и е 1. Если параметр регуляризации ε удовлетворяет условию $0 < \varepsilon < \omega_{nmr}\sigma_1$, то в р.м.Г. для любой матрицы A неполного ранга имеет место

$$\lim_{\|B\| \rightarrow 0} \tilde{A}_\varepsilon^+ = A^+,$$

т. е. р.м.Г. является устойчивым.

Т е о р е м а 3. Если прямоугольная матрица A размера $r \times t$ имеет полный ранг, вычисления в р.м.Г. ведутся по возмущенной матрице $\tilde{A} = A + B$ и параметр регуляризации удовлетворяет неравенствам $0 \leq \varepsilon < m^{-1/2}(\sigma_1 - \beta)$, то для приближения \tilde{A}_ε^+ из (1.5) в р.м.Г. имеет место оценка

$$\|\tilde{A}_\varepsilon^+ - A^+\| \leq \sigma_1^{-2}(1 - \sigma_1^{-1}\beta)^{-1}\beta.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, для матриц полного ранга параметр регуляризации ε в р.м.Г. можно брать нулевым, а оценка возмущений псевдообращаемой матрицы значительно улучшается по сравнению с оценкой (2.19), справедливой для матриц неполного ранга.

§ 3. Исследование возмущений р. м. X.

Для получения оценок возмущений факторизаций в приведенном выше р. м. X. в общем случае симметричных закононеопределенных возмущенных матриц сначала укажем новые общие результаты теории возмущений симметричных факторизаций.

Введем $\mathfrak{N}_{r,n}$ — пространство верхнетрапецеидальных матриц, состоящее из трапецеидальных матриц $N = (N_1 : N_2)$ размера $r \times n$, в которых N_1 — верхнетреугольная невырожденная матрица размера $r \times r$, N_2 — прямоугольная $[r \times (n-r)]$ -матрица.

Пусть имеются две неортогональные факторизации: $A = U^* \tilde{I} U$ и $\tilde{A} = \tilde{U}^* \tilde{I} \tilde{U}$, где $U \in \mathfrak{N}_{r,n}$, $\tilde{U} \in \mathfrak{N}_{r,n}$, \tilde{I} — диагональная матрица с элементами $+1$,

—1. Можно записать

$$(3.1) \quad B \equiv \bar{A} - A = (U + E)^* \check{I} (U + E) - A = U^* \check{I} E + E^* \check{I} U + E^* \check{I} E,$$

где $E = \check{U} - U$.

Определим линейный оператор S , действующий из \mathfrak{R}_{rn} в пространство симметричных матриц \mathfrak{S}_{nn}^r ранга r , следующим образом:

$$(3.2) \quad SE \equiv F^* E + E^* F, \text{ где } F = \check{I} U,$$

и (3.1) перепишем в виде

$$(3.3) \quad SE = B - E^* \check{I} E \equiv D.$$

Так как пространства \mathfrak{S}_{rn} , \mathfrak{S}_{nn}^r изоморфны, то можно говорить об обратном операторе S^{-1} .

Теорема 4. Обозначим $F = (F_1; F_2)$, где F_1 — верхнетреугольная матрица размера $r \times r$, F_2 — прямоугольная $[r \times (n-r)]$ -матрица. Тогда для оператора S , определяемого соотношением (3.2), имеет место оценка

$$(3.4) \quad \|S^{-1}D\| \leq \tau \|D\| \quad \forall D \in \mathfrak{S}_{nn}^r,$$

где

$$(3.5) \quad \tau = \tau_1 + \kappa \alpha_1 (1 + 2^{-1/2} r^{1/2} \alpha_1 \alpha_2), \quad \tau_1 = r \alpha_1 [1 + 2^{-1/2} r^{1/2} (1 + \alpha_3^2)^{1/2} \alpha_3];$$

здесь $\alpha_1 = \|F_1^{-1}\|$, $\alpha_2 = \|F_2\|$, $\alpha_3 = \text{cond } F_1$; $\kappa = 1$, если F — верхнетреугольная матрица, и $\kappa = 0$, если F — верхнетреугольная матрица.

Доказательство начнем с частного случая, когда F , E — верхнетреугольные матрицы размера $r \times r$, т. е. $S: \mathfrak{R}_{rr} \rightarrow \mathfrak{S}_{rr}^r$. Для этого применим схему доказательства теоремы 2.1 работы [10], поскольку самой оценкой этой теоремы воспользоваться невозможно даже в частном случае треугольных F из-за того, что она содержит неточность: в выражении для τ_1 , задаваемом соотношением (3.5), при доказательстве пропущен сомножитель $[1 + (\text{cond } F_1)^2]^{1/2}$.

Заметим, что (3.4) имеет место для $r=1$. Теперь предположим, что оценка (3.4) верна для $r \geq 1$ и некоторого $F \in \mathfrak{R}_{rr}$. Тогда для $\bar{F} \in \mathfrak{R}_{r+1, r+1}$ (и \bar{E} , \bar{D} соответственно) имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} F^* & 0 \\ f^* & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & e \\ 0 & v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^* & 0 \\ e^* & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & f \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & d \\ d^* & \delta \end{pmatrix},$$

откуда

$$(3.6) \quad F^* E + E^* F = D, \quad F^* e + E^* f = d, \quad 2f^* e + 2\varphi v = \delta.$$

Если L — верхнетреугольная матрица, то

$$(3.7) \quad \|L + L^*\|_E \geq 2^{1/2} \|L\|_E,$$

где $\|L\|_E$ — евклидова норма матрицы L .

Учитывая, что из (3.2), (3.3) следует $EF^{-1} + F^{*-1}E^* = F^{*-1}DF^{-1}$, и применяя оценку (3.7), находим

$$(3.8) \quad \|EF^{-1}\| \leq \|EF^{-1}\|_E \leq 2^{-1/2} r^{1/2} \|F^{-1}\|^2 \|D\|.$$

Второе и третье равенства в (3.6) можно записать для вектора $\tilde{e} = \begin{pmatrix} e \\ \delta/2 \end{pmatrix}$ в виде матричного соотношения

$$F^* \tilde{e} = \begin{pmatrix} d \\ \delta/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E^* f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

откуда с учетом (3.8) получаем

$$(3.9) \quad \|\tilde{e}\| \leq \|\tilde{F}^{-1}\| \left\| \begin{pmatrix} d \\ \delta/2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} I_r \\ -\varphi^{-1}f \end{pmatrix} F^{*-1} E^* f \right\| \leq \\ \leq \|\tilde{F}^{-1}\| \{1 + 2^{-1/2} r^{1/2} [1 + (\text{cond } \tilde{F})^2]^{1/2} \text{cond } \tilde{F}\} \|\tilde{D}\|,$$

где использована оценка

$$\left\| \begin{pmatrix} I_r \\ -\varphi^{-1}f \end{pmatrix} \right\| \leq [1 + (\text{cond } \tilde{F})^2]^{1/2}$$

и свойство $\|\tilde{F}^{-1}\| \geq \|F^{-1}\|$. Поскольку предполагалось, что $\|E\| \leq \tau_1 \|D\|$, то из (3.9) следует

$$\|E\| \leq (\tau_1 + \|\tilde{F}^{-1}\| \{1 + 2^{-1/2} r^{1/2} [1 + (\text{cond } \tilde{F})^2]^{1/2} \text{cond } \tilde{F}\}) \|D\|.$$

Теперь предположим, что F — верхнетрапецеидальная матрица и тем самым $S: \mathfrak{N}_{rn} \rightarrow \mathfrak{S}_{rn}$. Для $F = (F_1; F_2)$, $E = (E_1; E_2)$ можно записать

$$SE = \begin{pmatrix} F_1^* E_1 + E_1^* F_1 & F_1^* E_2 + E_1^* F_2 \\ F_2^* E_1 + E_2^* F_1 & F_2^* E_2 + E_2^* F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2^* & D_3 \end{pmatrix},$$

где F_1 — верхнетреугольная матрица.

Из этого матричного соотношения следует равенство $F_1^* E_2 + E_1^* F_2 = D_2$. Отсюда $E_2 = F_1^{*-1} (D_2 - E_1^* F_2)$, что с учетом (3.8) дает оценку $\|E_2\| \leq \|F_1^{-1}\| (1 + 2^{-1/2} r^{1/2} \|F_1^{-1}\| \|F_2\|) \|D\|$. Поэтому $\|E\| \leq [\tau_1 + \|F_1^{-1}\| (1 + 2^{-1/2} r^{1/2} \|F_1^{-1}\| \|F_2\|)] \|D\|$, откуда вытекает (3.4), (3.5).

Теорема 5. Предположим, что для пары симметричных матриц A, \tilde{A} размера $n \times n$ и ранга $r \leq n$ выполняется условие

$$(3.10) \quad \|\tilde{A} - A\| \|A^+\| < 1,$$

а \tilde{A} имеет факторизацию $\tilde{A} = \tilde{U}^* \tilde{U}$, где $\tilde{U} \in \mathfrak{N}_{rn}$, при этом

$$(3.11) \quad \tau^2 \|\tilde{A} - A\| < 1/4,$$

где τ определено выражениями (3.5), в которых теперь $\alpha_1 = \|\tilde{U}_1^{-1}\|$, $\alpha_2 = \|\tilde{U}_2\|$, $\alpha_3 = \text{cond } \tilde{U}_1$, $\tilde{U} = (\tilde{U}_1; \tilde{U}_2)$, \tilde{U}_1 — верхнетреугольная матрица.

Тогда существует такая единственная факторизация $A = U^* \tilde{U} U$, $U \in \mathfrak{N}_{rn}$, что

$$(3.12) \quad \|\tilde{U} - U\| \leq 2\tau \|\tilde{A} - A\|.$$

Ясно, что если выполняется (3.10), то близлежащие сингулярные числа матриц \tilde{A} , A ограничены: $|\tilde{\sigma}_i - \sigma_i| \leq \|\tilde{A} - A\|$, $i = 1, 2, \dots, r$; поэтому у данных матриц дефект и индекс одинаковы, и тем самым при проведении факторизации у \tilde{A} существует такая же диагональная матрица \tilde{I} , как и у A . Кроме того, сингулярные числа матриц \tilde{F} и \tilde{U} , связанных соотношением $\tilde{F} = \tilde{I} \tilde{U}$, одинаковы. Поэтому можно рассмотреть вытекающее из (3.3) операторное уравнение

$$(3.13) \quad E = K(E), \quad K(E) = S^{-1} B - S^{-1} E^* \tilde{I} E.$$

Оператор $K(E)$ при выполнении условия (3.11) переводит шар $S = \{E \mid \|E\| < 2\tau \|B\|\}$ в себя. Действительно, при выполнении условия (3.11)

$$\|K(E)\| \leq \tau (\|B\| + \|E^2\|) \leq \tau (\|B\| + 4\tau^2 \|B\|^2) \leq 2\tau \|B\|.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|K(E_2) - K(E_1)\| &= \|S^{-1}[(E_2 + E_1) \check{I} E_2 + E_1 \check{I} (E_2 - E_1)]\| \leq \\ &\leq 4\tau^2 \|B\| \|E_2 - E_1\| < \|E_2 - E_1\|, \end{aligned}$$

т. е. $K(E)$ — сжимающий оператор в шаре S . Множество S компактно, K непрерывен, поэтому, по теореме о сжимающем отображении [41], получаем, что операторное уравнение (3.13) имеет единственное решение, которое удовлетворяет (3.12).

Следствие 2. Предположим, что для симметричной невырожденной A и симметричной возмущенной \check{A} матриц выполняются условия (3.10), (3.11), где теперь в выражении (3.11)

$$\tau = n \|A^{-1}\|^{1/2} \{1 + 2^{-1/2} n^{1/2} [1 + (\text{cond } A)^2]^{1/2} (\text{cond } A)^{1/2}\}.$$

Тогда для всякой факторизации $A = G^* U \check{I} U G$, где \check{I} — диагональная матрица с элементами ± 1 и U — верхнетреугольная, G — ортогональная матрицы, существует такая единственная факторизация $\check{A} = G^* \check{U} \check{I} U G$, также с верхнетреугольной матрицей \check{U} , что справедлива оценка (3.12).

Следствие 2 уточняет, а теорема 5 обобщает на закононеопределенные вырожденные симметричные матрицы результат работы [40], ранее доказанный для невырожденных положительно-определенных матриц.

По аналогии с (2.7) для возмущенной симметричной матрицы \check{A} введем неортогональную факторизацию

$$(3.14) \quad \check{A} = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & \check{A}_2 \\ \check{A}_2^* & \check{A}_3 \end{pmatrix} = \check{U} \check{R} = \begin{pmatrix} \check{R}_1 \check{I} \check{R}_1 & \check{R}_1 \check{I} \check{R}_2 \\ \check{R}_2 \check{I} \check{R}_1 & \check{R}_2 \check{I} \check{R}_2 + \check{R}_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\check{U} = \begin{pmatrix} \check{R}_1 \check{I} & 0 \\ \check{R}_2 \check{I} & I \end{pmatrix} \quad \check{R} = \begin{pmatrix} \check{R}_1 & \check{R}_2 \\ 0 & \check{R}_3 \end{pmatrix},$$

\check{I} — диагональная матрица, по диагонали которой стоят +1 или -1.

Лемма 3. Если \check{R}_1 — обратимая клетка, то в (3.14) имеет место оценка $\|\check{R}_3\| \geq \|\check{A}^+\|^{-1}$. Если дополнительно \check{A} положительно определена, то

$$\begin{aligned} \|\check{A}_1^{-1}\| &\leq \|\check{A}^{-1}\|, \quad \text{cond } \check{A}_1 \leq \text{cond } \check{A}, \quad \|\check{R}_1\| \leq \|\check{A}\|^h, \\ \|\check{R}_3\| &\leq \|\check{A}\|, \quad \|\check{R}_3^{-1}\| \leq \|\check{A}^{-1}\|, \quad \text{cond } \check{R}_3 \leq \text{cond } \check{A}, \end{aligned}$$

а любой диагональный элемент \check{r}_{ss} матрицы \check{R}_3 удовлетворяет неравенству $\|\check{A}^{-1}\|^{-1} \leq \check{r}_{ss} \leq \|\check{A}\|$.

Первое утверждение леммы следует из теоремы 1. Для доказательства первого неравенства во втором утверждении возьмем вектор $e = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$,

где v — произвольный нормированный собственный вектор матрицы \check{A}_1 . Тогда $e \in R(\check{A})$, и тем самым $\|\check{A}^{-1}\|^{-1} \leq (\check{A}e, e) = (\check{A}_1 v, v) = \theta$, где θ — собственное значение матрицы \check{A}_1 .

Введем сингулярное разложение матрицы $\check{A} = QDQ^*$, где $D = \text{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, δ_i — собственные значения матрицы \check{A} , $Q^* = (Q_1^* : Q_2^*)$ — ортогональная матрица, Q_1 — клетка $k \times n$. Тогда можно записать

$$\check{A} = \begin{pmatrix} \check{A}_1 & \check{A}_2 \\ \check{A}_2^* & \check{A}_3 \end{pmatrix} = QDQ^* = \begin{pmatrix} Q_1 D Q_1^* & Q_1 D Q_2^* \\ Q_2 D Q_1^* & Q_2 D Q_2^* \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\tilde{R}_3 = \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2^* \tilde{A}_1^{-1} \tilde{A}_2 = Q_2 T (I - P_X) T Q_2^* = Q_2 T P_{X^\perp} T Q_2^*,$$

где $T = D^{1/2}$, $P_X = D^{1/2} Q_1^* (Q_1 D Q_1^*)^{-1} Q_1 D^{1/2}$ — ортопроектор на подпространство $X = R(D^{1/2} Q_1^*) = R(T Q_1^*)$.

Так как $\tilde{R}_3 \tilde{R}_3^* = Q_2 T P_{X^\perp} T (I - Q_1^* Q_1) T P_{X^\perp} T Q_2^* = L^* L$, где $L = T P_{X^\perp} T Q_2^*$ и $LL^* = T P_{X^\perp} T (I - Q_1^* Q_1) T P_{X^\perp} T = T P_{X^\perp} T T P_{X^\perp} T$, то сингулярные числа матрицы \tilde{R}_3 совпадают с сингулярными числами матрицы $T P_{X^\perp} T = T U^* U T$; здесь введено $P_{X^\perp} = U^* U$, U — ортогональная матрица. В свою очередь, $(U T T U^* z, z) = (U D U^* z, z) \leq \delta_n(z, z)$ для любых $z \in R^{n-k}$, что и доказывает $\|\tilde{A}\| = \delta_n \geq \|\tilde{R}_3\|$. Поскольку матрица \tilde{R}_3 положительно определена, то ведущий элемент находится на диагонали, а любой ее s -й диагональный элемент \tilde{r}_{ss} удовлетворяет

$$\|\tilde{A}^{-1}\|^{-1} = \delta_1 \leq \tilde{r}_{ss} = \tilde{R}_3(e_s, e_s) \leq \delta_n = \|\tilde{A}\|,$$

где e_s есть s -й единичный орт.

Утверждение о неухудшении обусловленности главной подматрицы невырожденной матрицы \tilde{A} отмечалось также в [12].

Теорема 6. Пусть вычисления в р.м. X ведутся по возмущенной симметричной матрице $\tilde{A} = A + B$ порядка n , при этом матрица A имеет ранг r , а возмущение B таково, что

$$(3.15) \quad \xi \beta < 1$$

и параметр регуляризации ε удовлетворяет неравенству

$$(3.16) \quad c \beta \leq \varepsilon < \omega_{nr} (\sigma_1 - \beta),$$

где $c = 1 + \xi [2\sigma_r + \beta + \sigma_r^2 \xi (1 - \xi \beta)^{-1}]$, $\omega_{nr} = \min\{(n-r+1)^{-1}, r^{1/2} n^{-1}\}$,

$$\xi = 2^{r-1} \omega_{nr}^{-1} (\sigma_1 - \beta)^{-1} \prod_{i=1}^{r-1} [2+i - (i^2+4i)^{1/2}]^{-1}.$$

Тогда в процессе факторизации будет сделано ровно r шагов и вычислена факторизация

$$(3.17) \quad \tilde{A}_r = \tilde{U}_r^* \tilde{I} \tilde{U}_r, \quad \tilde{U}_r = \tilde{U}_r G(r),$$

где \tilde{U}_r — верхнетрапециевидальная матрица.

Если дополнительно

$$(3.18) \quad \sigma_1^{-1} (1+c) \beta < 1,$$

то для $\tilde{A}_r^+ = \tilde{U}_r^+ \tilde{I} \tilde{U}_r^{+*}$ справедлива оценка

$$(3.19) \quad \|\tilde{A}_r^+ - A^+\| \leq \chi \sigma_1^{-2} (1+c) [1 - \sigma_1^{-1} (1+c) \beta]^{-1} \beta,$$

где χ указано в (2.19).

Доказательство. Сначала предположим, что при проведении факторизации в р.м. X ортогональные матрицы G_k на каждом шаге являются единичными. Тогда из соотношений (3.14) и из представления (1.7) видно, что при вычислениях с возмущенной матрицей \tilde{A} на каждом шаге путем исключения Гаусса получается клетка $\tilde{R}_3 = \tilde{A}_{\infty} = \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2^* \tilde{A}_1^{-1} \tilde{A}_2$, где A_1 имеет размер $k \times k$.

Поэтому применима лемма 2 и из (2.15) следует, что ведущий элемент удовлетворяет соотношению $|\tilde{a}_{11}| \geq r^{1/2} n^{-1} (\sigma_1 - \beta) > \varepsilon$ и процесс факторизации не будет останавливаться до r -го шага. Из (2.16) получаем, что

$\|\tilde{A}_1^{-1}\| \leq \|\tilde{R}_1^{-1}\| \leq \zeta$, поэтому при выполнении (3.15) имеем $\|\tilde{A}_1^{-1} - A_1^{-1}\| \leq \zeta^2(1 - \zeta\beta)^{-1}\beta$. Следовательно, $\|\tilde{A}_3^{(h)} - A_3^{(h)}\| \leq c\beta$. Поэтому на r -м шаге факторизации ведущий элемент будет удовлетворять неравенству $|\tilde{a}_*^{(r)}| \leq c\beta < \varepsilon$, что приведет к прекращению в р. м. X. процесса факторизации именно на r -м шаге. При этом

$$(3.20) \quad \|\tilde{A}_r - A\| \leq \|\tilde{A}_r - \tilde{A}\| + \|\tilde{A} - A\| \leq \|\tilde{A}_3^{(r)}\| + \|B\| \leq (1+c)\beta.$$

При выполнении (3.18) на основе теории возмущений псевдообратных матриц [8], [9] из (3.20) получаем (3.19).

Теперь предположим, что ортогональная матрица $G_{(r)}$ отличается от единичной. Так как справедлива цепочка неравенств

$$c\beta + |a_*^{(h)}| \geq |\tilde{a}_*^{(h)} - a_*^{(h)}| + |a_*^{(h)}| \geq |a_*^{(h)}| > \varepsilon,$$

то $|a_*^{(h)}| > \varepsilon - c\beta \geq 0$, и тем самым матрица $\tilde{A} = G_{(r)}^* A G_{(r)}$ допускает факторизацию $\tilde{A} = U_r^* \tilde{I} U_r$ с той же диагональной матрицей I , где U_r — верхнетрапециевидальная матрица. Для матриц \tilde{A} и $\tilde{A}_* = G_{(r)}^* \tilde{A} G_{(r)}$ справедлива оценка (3.19). Поскольку $G_{(r)}$ ортогональна, то эти оценки верны также для A и \tilde{A} .

Теорема 7. *Предположим, что в условиях теоремы 6 выполняются требования (3.15), (3.16), (3.18) и дополнительно*

$$(3.21) \quad (1+c)\tau^2\beta < 1/4,$$

где τ определено выражением (3.5), в котором теперь

$$(3.22) \quad \alpha_1 = \zeta^{1/2}, \quad \alpha_2 = \zeta^{1/2}(\sigma_r + \beta), \quad \alpha_3 = [\zeta(\sigma_2 + \beta)]^{1/2};$$

ζ определено в теореме 6.

Тогда в р. м. X. при проведении вычисления над возмущенной матрицей \tilde{A} будет сделано r шагов и найдена факторизация (3.17), для которой существует такая единственная факторизация $A = G_r^* U^* \tilde{I} U G_{(r)}$ (где U — также верхнетрапециевидальная матрица), что

$$(3.23) \quad \|\tilde{U}_r - U\| \leq 2\tau \|\tilde{A} - A\|.$$

Ограничимся доказательством этой теоремы для $G_{(r)} = I$. В силу теоремы 6, в рассматриваемом случае при проведении вычислений р. м. X. над возмущенной матрицей \tilde{A} будет сделано ровно r шагов факторизации и найдена факторизация (3.17), где $\tilde{U}_r = (\tilde{U}_1; \tilde{U}_2)$, \tilde{U}_1 — верхнетреугольная матрица, $\tilde{U}_2 = \tilde{I} \tilde{U}_1^{-1} * A_2$. При этом из леммы 2 следует, что $\|\tilde{U}_1^{-1}\| \leq \zeta^{1/2}$ и $\|\tilde{U}_2\| \leq \zeta^{1/2}(\sigma_r + \beta)$, $\text{cond } \tilde{U}_1 = [\zeta(\sigma_r + \beta)]^{1/2}$. Матрица \tilde{A}_r имеет ранг r , и, по предположению, выполняется (3.18), (3.21), (3.22). Таким образом, выполнены условия применимости теоремы 5, откуда и следует требуемое утверждение и оценка (3.23).

Следствие 3. Если симметричная матрица A имеет ранг r и порядок n , а параметр регуляризации ε удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon < < \omega_{nr} \|A^+\|^{-1}$, то в р. м. X. для \tilde{A}_ε , \tilde{U}_ε , определенных выражениями (1.11) и вычисленных по $\tilde{A} = A + B$, справедливы соотношения

$$\lim_{\|B\| \rightarrow 0} \tilde{A}_\varepsilon^+ = A^+, \quad \lim_{\|B\| \rightarrow 0} \tilde{U}_\varepsilon = U,$$

где U — единственная верхнетрапециевидальная матрица, порождающая факторизацию $A = G_{(r)}^* U^* \tilde{I} U G_{(r)}$, $G_{(r)}$ — ортогональная матрица, указанная

в (1.11). Для невырожденных симметричных матриц оценки теорем 6, 7 могут быть значительно улучшены.

Теорема 8. Пусть A — положительно-определенная матрица размера $n \times n$, вычисления в р.м. X ведутся по возмущенной матрице $\tilde{A} = A + B$, параметр регуляризации ε удовлетворяет

$$(3.24) \quad 0 \leq \varepsilon < \sigma_1 - \beta.$$

Тогда в процессе факторизации будет сделано ровно n шагов, найдена факторизация $\tilde{A} = \tilde{U}_n^* \tilde{I} \tilde{U}_n$, где $\tilde{U}_n = \tilde{U}_n G_{(n)}$, \tilde{U}_n — верхнетреугольная матрица, а если дополнительно

$$(3.25) \quad \tau^2 \beta < 1/4,$$

где $\tau = n(\sigma_1 - \beta)^{-1/2} [1 + (n^{1/2}/\sqrt{2})(1 + \alpha^2)^{1/2} \alpha]$, $\alpha = [(\sigma_1 + \beta)(\sigma_1 - \beta)^{-1}]^{1/2}$, то существует такая единственная верхнетреугольная матрица U , что $A = G_{(n)}^* U^* I U G_{(n)}$ и

$$(3.26) \quad \|\tilde{U}_n - U\| \leq 2\tau \|\tilde{A} - A\|.$$

Ограничимся доказательством в предположении, что $G_{(n)} = I$. Из (3.24) следует, что $\sigma_1 - \beta > 0$, т. е. $\beta < \sigma_1$, поэтому индекс и дефект у матриц A , \tilde{A} одинаковый и \tilde{A} обратима. Из леммы 2 вытекает, что на каждом шаге для ведущего элемента имеет место $|\tilde{a}_i^{(k)}| \geq \sigma_1 - \beta$.

Таким образом, в р.м. X при параметре регуляризации ε , удовлетворяющем (3.24), будет произведено ровно n шагов. Для полученной в результате факторизации верхнетрапецидальной матрицы \tilde{U}_n справедливо $\|\tilde{U}_n^{-1}\| = (\sigma_1 - \beta)^{-1/2}$, $\|\tilde{U}_n\| = (\sigma_1 + \beta)^{1/2}$, $\text{cond } \tilde{U}_n = [(\sigma_1 + \beta)(\sigma_1 - \beta)^{-1}]^{1/2}$. Поэтому из теоремы 5 при выполнении (3.25) вытекает существование такой единственной верхнетрапецидальной матрицы U , что $A = U^* I U$ и справедлива оценка (3.26) для $\tilde{U}_n - U$.

Автор признателен В. В. Воеводину за полезные замечания, в значительной мере способствовавшие улучшению полученных результатов.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Морозов В. А. Оценивание точности решения некорректных задач и решение систем линейных алгебраических уравнений. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 6, с. 1341—1349.
3. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
4. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
5. Zlobec S. The Gauss-bordering method for generalized inversion of matrices. — Z. angew. Math. und Mech., 1975, № 55, p. 445—449.
6. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
7. Мелешко В. И. Псевдообратные операторы и рекуррентное вычисление псевдо-решений в гильбертовых пространствах. — Сибирский матем. ж., 1978, № 1, с. 108—121.
8. Wedin P. Perturbation theory pseudoinverses. — BIT, 1973, v. 13, p. 217—232.
9. Мелешко В. И. Возмущения неограниченных замкнутых псевдообратных операторов. — Дифференц. ур-ния, 1979, № 4, с. 681—694.
10. Stewart G. W. Perturbation bounds for the QR factorization of a matrix. — SIAM J. Numer. Anal., 1977, v. 14, № 3, p. 509—518.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
12. Икрамов Х. Д. О соотношениях двойственности, связанных с гауссовым исключением. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 1, с. 213—216.

Поступила в редакцию 6.VIII.1984
Переработанный вариант 4.I.1985