

УДК 536.242

## ТЕПЛОТДАЧА ЦИЛИНДРА И ПЛАСТИНЫ В ЖИДКОСТИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ПРАНДТЛЯ

© 1997 г. А. В. Кашеваров

Центральный аэрогидродинамический институт, г. Жуковский

Поступила в редакцию 16.08.96 г.

На основе точного аналитического решения полного уравнения энергии определены коэффициенты теплоотдачи кругового цилиндра и пластины конечной длины в жидкости с малым числом Прандтля  $Pr \ll 1$  для различных типов граничных условий на поверхности этих тел. Проведено сравнение полученных результатов с давно известными, также найденными аналитически, но из решения упрощенного уравнения энергии типа уравнения пограничного слоя.

**Введение.** Исследование теплоотдачи тел различной формы в жидкости с малым числом Прандтля  $Pr \ll 1$  представляет как практический, так и чисто теоретический интерес. Применение жидкостей с  $Pr \ll 1$  (жидких металлов) в качестве теплоносителей в атомной энергетике [1] определяет практический интерес. Предлагаемая работа посвящена теоретическому аспекту указанной проблемы.

При решении задачи конвективного теплообмена тела в жидкости с  $Pr \ll 1$  можно использовать допущение о потенциальности ее течения [1, 2]. Рассмотрим уравнение баланса энергии движущейся несжимаемой жидкости в полубезразмерном виде, наиболее удобном для дальнейшего анализа

$$Reu\nabla T - \Delta T = 0. \quad (1)$$

Здесь  $T$  – избыточная температура (размерная) жидкости по отношению к температуре набегающего потока на бесконечности;  $Re = Re Pr$  – число Пекле;  $u$  – обезразмеренное через скорость набегающего потока поле скоростей течения.

Если  $Re = O(1)$  при  $Pr \rightarrow 0$ , то число Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$ , и это означает, что поле скоростей формально можно считать потенциальным  $u = \text{grad}\phi$ , где  $\phi$  – потенциал течения. При  $Pr \ll 1$  толщина вязкого пограничного слоя существенно меньше толщины теплового, и влиянием вязкости на теплообмен можно пренебречь.

При потенциальном поле скоростей в случае плоского обтекания оказывается возможным получать точные аналитические решения как исходного полного уравнения энергии (1), так и упрощенных его форм.

Основной формой упрощения уравнения (1) является классическое уравнение теплового пограничного слоя [2], которое получается из (1), если пренебречь в нем членом  $\partial^2 T / \partial x^2$  по сравнению с  $\partial^2 T / \partial y^2$ , где  $x, y$  – координаты вдоль и перпендикулярно поверхности тела. Считается, что

это справедливо при  $Re \gg 1$ , когда основное изменение температуры происходит в тонком слое перпендикулярно поверхности тела.

При  $Pr \rightarrow 0$ , пренебрегая динамическим пограничным слоем, дополнительно заменяют профиль скоростей  $u(x, y)$  скоростью невязкого внешнего течения, зависящего только от  $x$ . В [2] приведены два точных решения уравнения теплового пограничного слоя для течения в окрестности критической точки тела и для продольного обтекания плоской полубесконечной пластины с постоянной температурой поверхности. Теплообмен пластины более подробно рассматривался в [3] для условий постоянства теплового потока на ее поверхности и распределения температуры на пластине в виде степенного ряда.

В [3] использовался другой способ упрощения уравнения (1), справедливый только для течения жидкости с числом  $Pr \ll 1$ . Он заключается в замене переменных  $x, y$  в (1) на  $\psi(x, y), \phi(x, y)$ , где  $\psi(x, y)$  – функция тока. Эта замена называется преобразованием Буссинеска. Затем в преобразованном уравнении член  $\partial^2 T / \partial \phi^2$  полагался пренебрежимо малым по сравнению с  $\partial^2 T / \partial \psi^2$ . В результате упрощенная форма уравнения (1) принимала вид, подобный уравнению теплового пограничного слоя для продольного обтекания пластины жидкостью с  $Pr \ll 1$  [2]

$$Re \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2}. \quad (2)$$

Важно отметить, что уравнение (2) является самостоятельным уравнением типа теплового пограничного слоя и в общем случае его нельзя получить из уравнения теплового пограничного слоя, приведенного в [2].

Точные решения уравнения (2) при обтекании кругового цилиндра были найдены в [3] для четырех типов граничных условий: постоянной

температуры, постоянного теплового потока на поверхности цилиндра, косинусоидального закона распределения температуры на его поверхности и более общего случая распределения температуры в виде некоторого ряда. В [3] указано, что этот метод применим для определения коэффициентов теплоотдачи цилиндра произвольного сечения, если только  $\varphi$  и  $\psi$  известны.

Недавно были получены точные аналитические решения полного уравнения энергии (1) для кругового цилиндра [4] и эллиптического цилиндра и пластины [5], обтекаемых жидкостью с  $Pr \ll 1$ . Сравнение результатов [4, 5] и [2] позволило определить пределы применимости по числу  $Re$  уравнения теплового пограничного слоя для некоторых случаев обтекания тел жидкостью с  $Pr \ll 1$ . Так, для критической точки оказалось, что уравнение теплового пограничного слоя можно применить для расчета коэффициента теплоотдачи не только при больших  $Re$ , как считалось, а практически для всех чисел  $Re$  за исключением  $Re \ll 1$  [4, 5]. Для продольного обтекания плоской пластины конечной длины показано, что уравнение теплового пограничного слоя также можно использовать для расчета теплообмена при  $Re \sim 1$ , но лишь на некоторой части пластины вблизи передней кромки. Длина этой части увеличивается с ростом  $Re$  [5].

В [4, 5] было рассмотрено только условие постоянной температуры поверхности тела. Цель данной работы состоит в том, чтобы дополнить результаты [4, 5], рассмотрев другие типы граничных условий, как в [3]. Необходимо сравнить получающиеся результаты с имеющимися в [3] и тем самым проверить правомерность подхода [3] для упрощения уравнения энергии, установить пределы его применимости и оценить возможные погрешности определения коэффициентов теплоотдачи, возникающие при использовании этого подхода. Это представляется важным, так как результаты [3] в виде функциональных зависимостей среднего числа Нуссельта  $\langle Nu \rangle (Pe)$  включены в книгу [1], т.е. рекомендованы для практического использования.

**Анализ решений.** Точное решение уравнения (1) при потенциальном обтекании эллиптического цилиндра, частными случаями которого являются круговой цилиндр и пластина, имеет вид [5]

$$T = \exp[Pe \operatorname{ch}(\xi - \xi_0) \cos(\eta - \gamma)] \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{Fe}_n(\xi - \xi_0, -q) \operatorname{ce}_n(\eta - \gamma, -q). \quad (3)$$

Здесь  $\xi, \eta$  – эллиптические координаты, причем  $\xi \geq \xi_0$ , где  $\xi_0 \geq 0$  – радиальная эллиптическая координата контура эллипса,  $\gamma$  – угол атаки, а именно угол между направлением скорости набегающего потока и большой осью эллипса,  $C_n$  – постоянные интегрирования,  $\operatorname{Fe}_n$  и  $\operatorname{ce}_n$  – функции

Матье [6],  $q = \kappa^2 = Pe^2/4$ . Характерной длиной  $l$ , по которой определяется число  $Pe$ , является полу-сумма большой и малой полуосей эллипса.

Для пластины  $\xi_0 = 0$ , и  $l$  равна четверти пластины. Круговому цилиндру соответствует  $\xi_0 \rightarrow \infty$ , и распределение избыточной температуры жидкости получается из (3) в полярной системе координат  $r, \theta$  формальной заменой  $\xi - \xi_0 = \ln r, \eta - \gamma = \theta$ , где полярный угол  $\theta$  отсчитывается от задней критической точки. Радиальная координата  $r$  обезразмерена через характерную длину, которой является радиус цилиндра.

Число Нуссельта, по определению равное

$$Nu = \alpha l / \lambda,$$

где  $\alpha, \lambda$  – коэффициенты теплоотдачи и теплопроводности жидкости, в зависимости от типа граничного условия на поверхности тела удобно вычислять либо по формуле

$$Nu = q_w l / T_w \lambda \quad (4)$$

для постоянного потока тепла  $q_w$  на поверхности, либо так как

$$q_w = -\left. \frac{\lambda}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_0}, \quad (5)$$

по формуле

$$Nu = -\left. \frac{1}{T_w h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi = \xi_0} \quad (6)$$

в иных случаях.

Здесь  $T_w$  – распределение по контуру тела избытка температуры стенки по отношению к температуре набегающего потока,  $h_\xi = 2 \exp(-\xi_0) (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{1/2}$  – коэффициент Ламе.

**Постоянная температура стенки.** Этот случай был подробно исследован в [4, 5]. Распределение числа  $Nu_c$  по обводу кругового цилиндра определяется формулой

$$Nu_c = -2 \exp(Pe \cos \theta) \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* \operatorname{Fe}'_n(0, -q) \operatorname{ce}_n(\theta, -q), \quad (7)$$

$$C_n^* = \frac{\operatorname{ce}_n(0, -q)}{\mu_n \operatorname{Fe}_n(0, -q)},$$

$$\mu_n = \begin{cases} \operatorname{ce}_{2k}(0, q) / A_0^{(2k)}, & n = 2k \\ -\kappa^{-1} \operatorname{se}'_{2k+1}(0, q) / B_1^{(2k+1)}, & n = 2k+1, k = 0, 1, 2 \dots \end{cases}$$

Здесь  $A_0^{(2k)}, B_1^{(2k+1)}$  – коэффициенты в главных членах разложений функций Матье  $\operatorname{ce}_{2k}(\theta, q)$  и  $\operatorname{se}_{2k+1}(\theta, q)$  соответственно;  $\kappa = Pe/2$ ; штрихом обозначены производные.

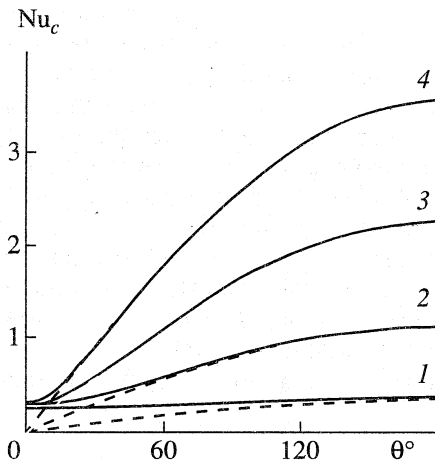


Рис. 1. Распределения числа Нуссельта  $Nu_c(\theta)$  по обводу цилиндра при различных числах  $Pe$  для постоянной температуры поверхности: 1 –  $Pe = 0.1$ , 2 – 1, 3 – 4, 4 – 10. Здесь и далее сплошные линии – точное решение полного уравнения энергии, штриховые – точное решение упрощенного уравнения энергии типа теплового пограничного слоя [3].

Зависимости  $Nu_c(\theta)$ , рассчитанные по (7) с использованием таблиц [7, 8], для некоторых чисел  $Pe$  приведены на рис. 1. Вычислительная задача довольно сложна, для ее решения требуется высокая точность расчетов. На этом же рисунке приведены соответствующие зависимости  $Nu_c(\theta)$  работы [3], полученные аналитически из решения уравнения типа пограничного слоя (2). Переходя к обозначениям, принятым в данной работе, результат [3] перепишем в виде

$$Nu_c = 1.128Pe^{0.5} \sin^{0.5}(\theta/2). \quad (8)$$

Более точно коэффициент в (8) равен  $2/\sqrt{\pi}$ .

Как видно из рис. 1, различие между числами  $Nu_c$ , найденными двумя способами, заметно лишь при очень малом числе  $Pe = 0.1$ . Однако уже при  $Pe = 1$  числа  $Nu_c$  практически совпадают для передней части поверхности цилиндра  $\theta > 90^\circ$ , причем с очень высокой точностью в несколько десятичных знаков для передней критической точки  $\theta = 180^\circ$ . С уменьшением  $\theta$  точность совпадения уменьшается, и для задней части поверхности расхождение между числами  $Nu_c$ , определенными по формулам (7) и (8), становится заметным. С увеличением числа  $Pe$  протяженность зоны, для которой приближенное решение (8) дает заметную погрешность по сравнению с точным решением (7), уменьшается. Выражение (8) нельзя использовать для определения  $Nu_c$  в задней критической точке  $\theta = 0^\circ$ , так как (8) дает  $Nu_c(0) = 0$ . Расчет по точной формуле (7) показывает, что  $Nu_c(0)$  очень медленно возрастает от 0.302 при  $Pe = 1$  до 0.318 при  $Pe = 18$ .

Зависимость среднего по обводу числа  $\langle Nu_c \rangle (Pe)$ , приведенная в [3], после пересчета на числа  $Nu$  и  $Pe$ , определенные по радиусу, запишется в виде

$$\langle Nu_c \rangle = 0.72Pe^{0.5}. \quad (9)$$

Интегрируя (7) по обводу цилиндра, найдем, что точное решение уравнения (1) дает

$$\langle Nu_c \rangle = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{ce_n(0, -q)}{\mu_n} \right]^2 \frac{Fe'_n(0, -q)}{Fe_n(0, -q)}. \quad (10)$$

Зависимость  $\langle Nu_c \rangle (Pe)$ , рассчитанная по (10) в диапазоне  $1 \leq Pe \leq 18$ , представлена графически в [5]. С помощью метода наименьших квадратов она аппроксимируется функцией

$$\langle Nu_c \rangle = 0.741Pe^{0.49}, \quad (11)$$

уточняющей (9).

Нужно отметить, что впервые точное решение уравнения (1) было найдено в [9] для задачи конвективного массопереноса теории зонда Ленгмюра, поэтому формула (11) может быть полезна и для теории зондовых измерений в плазме. В (11) надо заменить  $Pe$  на диффузионное число Пекле  $Pe_d$ , тогда (11) описывает зависимость средней по обводу цилиндра производной квазинейтральной концентрации заряженных частиц, связанной с интегральным зондовым током насыщения. В [9] эта зависимость была рассчитана только до  $Pe_d = 3$ .

Рассмотрим продольное обтекание плоской пластины. В этом единственном случае уравнение типа пограничного слоя (2) совпадает с классическим уравнением теплового пограничного слоя, так как  $\varphi = x$ ,  $\psi = y$ . Сравнение точного решения полного уравнения энергии (1) при потенциальном обтекании пластины конечной длины с точным решением уравнения теплового пограничного слоя для полубесконечной пластины проделано в [5]. О результатах сравнения уже говорилось во введении.

В [5] показано, что для того, чтобы получить распределение числа  $Nu$  по контуру эллиптического цилиндра, обтекаемого под произвольным углом атаки  $\gamma$  при некотором  $Pe$ , достаточно знать соответствующее распределение  $Nu_c(\theta)$  для кругового цилиндра. Искомая зависимость для эллиптического цилиндра, частным случаем которого является пластина, получается затем простым пересчетом. Приведем формулу, позволяющую сделать такой пересчет для продольного обтекания плоской пластины при  $\gamma = 0$ ,

$$Nu_L(x, Pe_L) = \frac{2}{\sin \theta} Nu_c(\theta, Pe = Pe_L/4), \quad (12)$$

$$x = 0.5(1 + \cos \theta),$$

где  $Nu_L, Re_L$  – числа Нуссельта и Пекле, определенные по длине пластины  $L$ ;  $x$  – безразмерное (через  $L$ ) расстояние от ее передней кромки.

Среднее на единицу длины пластины число  $\langle Nu_L \rangle$  также находится из  $\langle Nu_c \rangle$  следующим пересчетом  $\langle Nu_L \rangle = \pi \langle Nu_c \rangle$  при  $Re_L = 4Re$  [5], т.е. из (11) получим

$$\langle Nu_L \rangle = 1.18 Re_L^{0.49}. \quad (13)$$

Работа [3] дает зависимость

$$\langle Nu_L \rangle = 1.128 Re_L^{0.5}.$$

Отметим, что (13) определяет  $\langle Nu_L \rangle$  не только для продольного обтекания, но и для обтекания пластины под любым углом атаки [5].

**Постоянный тепловой поток.** Довольно легко получить распределения  $Nu_c(\theta)$  по обводу кругового цилиндра и в случае  $q_w = \text{const}$ . Для этого необходимо найти постоянные  $C_n$  в (3). Определим их, применив формулу (5), где  $h_\xi = 1$ , к (3) и разложив, как и для случая  $T_w = \text{const}$ , функцию  $\exp(-Pecos\theta)$  в ряд по функциям Маттье, используя интегральное уравнение [6]

$$ce_n(z, -q) = \frac{\mu_n}{\pi} \int_0^\pi \exp(-2k \cos u \cos z) \times ce_n(u, -q) du. \quad (14)$$

Затем по формуле (4) найдем, что

$$Nu_c = -2 \exp(-Pecos\theta) \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* Fe_n(0, -q) ce_n(\theta, -q) \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$C_n^* = \frac{ce_n(0, -q)}{\mu_n Fe_n'(0, -q)}.$$

Результат [3] для этого граничного условия имеет вид

$$Nu_c = \frac{\sqrt{\pi}}{K(k)} \sqrt{Pe}, \quad k = \cos \frac{\theta}{2}, \quad (16)$$

где  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода.

На рис. 2 приведено сравнение чисел  $Nu_c$ , рассчитанных по (15) и (16). Для одного и того же числа  $Pe$  согласие между двумя кривыми лишь несколько хуже, чем для соответствующих кривых рис. 1, и, так же, как и для условия  $T_w = \text{const}$ , улучшается с ростом  $Pe$ . Видно, что решение упрощенного уравнения энергии нельзя применить для определения числа  $Nu_c$  в некотором диапазоне углов  $\theta$  в окрестности задней критической точки.

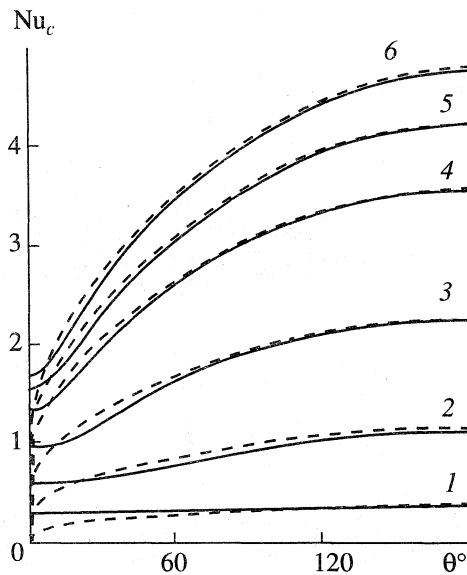


Рис. 2. Распределение  $Nu_c(\theta)$  при различных  $Pe$  для условия постоянного теплового потока на поверхности цилиндра: 1–4, как на рис. 1, 5 –  $Pe = 14$ , 6 – 18.

Точно так же, как и для предыдущего случая, ширина этого диапазона уменьшается с ростом  $Pe$ .

Среднее по обводу цилиндра число  $\langle Nu_c \rangle$  может быть получено с помощью численного интегрирования (15) и (16). В [3] интегрирование (16) выполнено недостаточно точно. Более точным результатом является

$$\langle Nu_c \rangle = 0.889 Pe^{0.5}. \quad (17)$$

Интегрирование (16) и последующее применение метода наименьших квадратов дает формулу, справедливую в диапазоне  $1 \leq Pe \leq 18$ ,

$$\langle Nu_c \rangle = 0.861 Pe^{0.51}. \quad (18)$$

Расчет по (17) приводит к незначительной ошибке определения  $\langle Nu_c \rangle$  по отношению к (18), полученной из точного решения уравнения энергии. Формулы (17) и (9) можно считать асимптотиками точных зависимостей  $\langle Nu_c \rangle (Pe)$  при  $Pe \rightarrow \infty$ , так как относительная погрешность определения по ним  $\langle Nu_c \rangle$ , обусловленная неточностями расчета в окрестности задней критической точки, стремится к нулю при  $Pe \rightarrow \infty$ .

К сожалению, при условии  $q_w = \text{const}$  не удается получить точного решения полного уравнения энергии (1) для конечной пластины, когда она рассматривается как предельный случай эллипса. Трудно найти постоянные интегрирования  $C_n$ , так как, согласно (5), для этого необходимо разлагать функцию  $\sin \theta \exp(-Pecos\theta)$  в ряд по функциям Маттье  $ce_n(\theta, q)$ .

- **Косинусоидальное распределение температуры стенки.** В [3] рассматривался также случай,

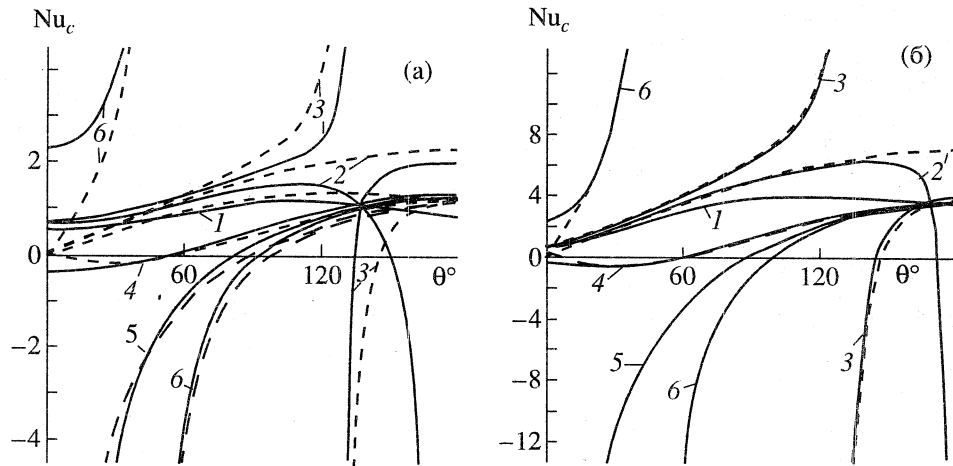


Рис. 3. а, б – распределения  $Nu_c(\theta)$  по обводу цилиндра для граничного условия  $T_w = T_m + T_a \cos \theta$  при  $Re = 1$  (а) и  $Re = 10$  (б) для различных  $\sigma = T_a/T_m$ : 1 –  $\sigma = 0.5$ , 2 – 1, 3 – 1.5, 4 – –0.5, 5 – –1, 6 – –1.5.

когда избыточная температура поверхности цилиндра описывается формулой

$$T_w(\theta) = T_m + T_a \cos \theta, \quad (19)$$

где  $T_m$  и  $T_a$  – некоторые постоянные. Точное решение уравнения (1) можно получить и для этого граничного условия.

С этой целью необходимо определить постоянные  $C_n$  в общем решении (3), что требует нахождения разложения функции  $\cos \theta \exp(-Pe \cos \theta)$  в ряд по функциям  $se_n(\theta, -q)$ . Это разложение найдем двукратным дифференцированием по  $z$  интегрального уравнения (17) при  $z = 0$ . Распределение  $Nu_c(\theta)$  получается затем по формуле (6). Окончательно имеем

$$Nu_c = \frac{2 \exp(Pe \cos \theta)}{1 + \sigma \cos \theta} \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n^* Fe_n'(0, -q) se_n(\theta, -q), \quad (20)$$

$$C_n^* = \frac{se(0, -q)}{\mu_n Fe_n(0, -q)} \left[ 1 - \frac{\sigma}{Pe} (a_n + 2q) \right], \quad \sigma = \frac{T_a}{T_m}.$$

Здесь учтено, что  $se_n''(0, -q) = -(a_n + 2q) se_n(0, -q)$ , где  $a_n$  – собственное число уравнения Матье.

Эта же зависимость, найденная в [3] из точного решения упрощенного уравнения энергии (2), имеет вид

$$Nu_c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Pe^{0.5} \sin \frac{0.5\theta}{2} \frac{1 + \sigma + 2\sigma \cos \theta}{1 + \sigma \cos \theta}. \quad (21)$$

Сравнение зависимостей (20), (21) для двух значений  $Pe$  и нескольких значений  $\sigma$  приведено на рис. 3а, 3б.

При  $|\sigma| < 1$  обе зависимости  $Nu_c(\theta)$  являются непрерывными ограниченными функциями. Когда  $\sigma = 1$ , формула (20) дает отрицательные значения  $Nu_c$  в некотором диапазоне углов в окрестности передней критической точки, т.е. несмотря на то, что температура поверхности в этой области превышает температуру жидкости на бесконечности, тепловой поток направлен к цилиндру. Это объясняется тем, что за счет переноса тепла теплопроводностью от более нагретых слоев жидкости у задней поверхности цилиндра температура жидкости вблизи передней критической точки становится больше температуры поверхности. Число  $Nu_c$  в передней критической точке при  $\theta = 180^\circ$  в этом случае бесконечно большое, так как имеется тепловой поток при равенстве температур поверхности и набегающего потока на бесконечности.

При  $\sigma = 1$  зависимость  $Nu_c(\theta)$  (21) качественно отличается от (20). Точка  $\theta = 180^\circ$  также особая для функции (21), так как число  $Nu_c$ , вообще говоря, не определено в этой точке, но это устранимая особенность, поскольку  $Nu_c(\theta) \rightarrow 4\sqrt{Pe}/\pi$  при  $\theta \rightarrow 180^\circ$ . Интересно отметить, что для всех трех рассмотренных типов граничных условий определенное из решения упрощенного уравнения энергии (2) число  $Nu_c(180^\circ)$  в передней критической точке принимает одинаковое значение  $2\sqrt{Pe}/\pi$ . Исключением является лишь случай граничного условия (19) при  $T_a = T_m$ , когда  $Nu_c(180^\circ)$  в 2 раза больше.

При  $\sigma = -1$  обе зависимости дают бесконечно большие отрицательные значения  $Nu_c$  в задней критической точке ( $\theta = 0$ ). При  $|\sigma| > 1$  функции  $Nu_c(\theta)$  становятся разрывными в точке  $\theta = \arccos(1/\sigma)$ .

При  $Re = 1$  заметно некоторое различие между зависимостями  $Nu_c(\theta)$  (20) и (21) (рис. 3а), которое

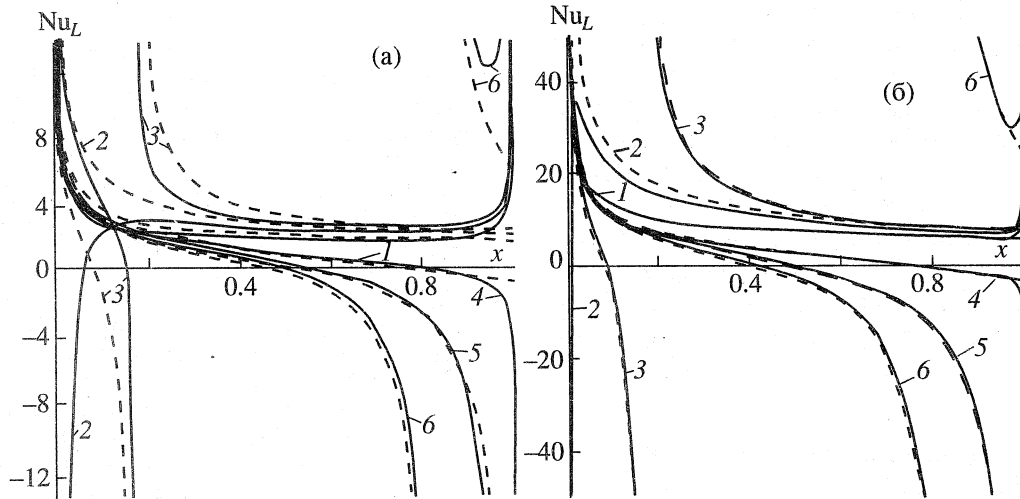


Рис. 4. а, б – распределения  $Nu_L(x)$  по длине пластины для условия  $T_w = T_m - T_a + 2T_ax$  при  $Pe = 4$  (а) и  $Pe = 40$  (б) для различных  $\sigma$ . Обозначения, как на рис. 3.

практически исчезает при  $Pe = 10$  почти во всем диапазоне изменения угла  $\theta$ , за исключением некоторой окрестности задней критической точки, а при  $\sigma = 1$  еще и передней (рис. 3б).

Среднее число  $\langle Nu_c \rangle$  [3], которое для этого типа граничного условия в отличие от двух других определялось как

$$\langle Nu_c \rangle = -\frac{1}{\pi T_m} \int_0^\pi \left. \frac{\partial T(\theta)}{\partial r} \right|_{r=1} d\theta,$$

может быть записано в виде

$$\langle Nu_c \rangle = \left( 1 + \frac{1}{3}\sigma \right) \langle Nu_c \rangle_{T_w = \text{const}}, \quad (22)$$

где  $\langle Nu_c \rangle_{T_w = \text{const}}$  – число  $\langle Nu_c \rangle$  для условия постоянства температуры поверхности цилиндра (9).

Точное решение полного уравнения энергии (1) дает для  $\langle Nu_c \rangle$  формулу, близкую к (22). Для  $\langle Nu_c \rangle_{T_w = \text{const}}$  можно использовать зависимость (11), а постоянный множитель  $1/3$  в скобках заменить в (22) на некоторую функцию  $f(Re)$ , медленно возрастающую от 0.267 при  $Re = 1$  до 0.329 при  $Re = 18$ .

Используя (12), пересчитаем результаты точного решения уравнения (1) для кругового цилиндра на случай продольного обтекания пластины конечной длины, распределение температуры на поверхности которой описывается линейной функцией

$$T_w = T_m - T_a + 2T_ax.$$

Из [3] для полубесконечной пластины с таким распределением температуры получается

$$Nu_L = \sqrt{\frac{Pe_L(1 - \sigma + 4\sigma x)}{\pi x(1 - \sigma + 2\sigma x)}}.$$

Сравнение результатов двух работ представлено на рис. 4а, 4б. Обратим внимание на то, что для пластины конечной длины бесконечно большие значения числа  $Nu_L$  имеют место при  $x = 0$  и  $x = 1$ , для полубесконечной пластины только при  $x = 0$  (за исключением  $\sigma = -1$ ). Кроме того, при пересчете результатов для цилиндра на случай конечной пластины нужно помнить, что числу  $Re$  для цилиндра соответствует  $Pe_L = 4Re$ , т.е. хорошее совпадение значений чисел  $Nu_L$ , полученных из точных решений полного и упрощенного уравнений энергии, достигается для пластины при несколько больших величинах  $Pe_L$ , чем для цилиндра.

Линейное распределение температуры по длине пластины является частным случаем рассмотренного в [3] распределения температуры в виде степенного ряда

$$T_w(x) = \sum_{n=0}^N D_n x^n,$$

которому для цилиндра соответствует распределение

$$T_w(\theta) = \sum_{n=0}^N D_n (1 + \cos\theta)^n.$$

В принципе точное решение полного уравнения энергии (1) может быть найдено и для этих граничных условий, однако делать это вряд ли целесообразно.

**Заключение.** Сравнение результатов определения коэффициентов теплоотдачи кругового цилиндра и пластины в жидкости с числом  $Pr \ll 1$  на основе точных решений полного уравнения энергии (1) и упрощенного (2) типа пограничного слоя показывает, что последнее вполне можно использовать для нахождения чисел Нуссельта, в особенности среднего числа  $\langle Nu \rangle$ , уже при небольших числах  $Re \geq 1$ . Имеющаяся при этом погрешность незначительно зависит от типа граничного условия на поверхности тела, наименьшая имеет место для условия постоянства температуры.

Существенная ошибка при определении  $Nu$  по формулам [3] возникает лишь для небольшой зоны вблизи задней критической точки цилиндра и пластины, а в одном исключительном случае распределения температуры на поверхности еще и в окрестности передней критической точки. Протяженность этих зон уменьшается с ростом  $Re$ .

Представленные результаты могут быть полезными для оценки теплоотдачи цилиндра и пластины при их ламинарном обтекании жидким металлом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боришанский В.М., Кутателадзе С.С., Новиков И.Н., Федьинский О.С.* Жидкометаллические теплоносители. М.: Атомиздат, 1967. 300 с.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. *Grosh R.J., Cess R.D.* Heat Transfer to Fluids with Low Prandtl Numbers for Flow Across Plates and Cylinders of Various Cross Section // *Trans. ASME*. 1958. V. 80. № 3. P. 667.
4. *Кашеваров А.В.* Точное решение задачи конвективного теплообмена для кругового цилиндра в жидкости с малым числом Прандтля // *Изв. РАН. МЖГ*. 1994. № 1. С. 43.
5. *Кашеваров А.В.* Точное решение задачи конвективного теплообмена для эллиптического цилиндра и пластины в жидкости с малым числом Прандтля // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 3. С. 26.
6. *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
7. Таблицы для вычисления функций Матье. Вып. 42. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 280 с.
8. *Барк Л.С., Дмитриева Н.И., Захарьев Л.Н., Леманский А.А.* Таблицы собственных значений уравнения Матье. М.: ВЦ АН СССР, 1970. 152 с.
9. *Егорова З.М., Кашеваров А.В., Фомина Е.М., Цхай Н.С.* Об измерении концентрации заряженных частиц цилиндрическим зондом Ленгмюра в плазме пламени // *ТВТ*. 1988. Т. 26. № 3. С. 577.