N. T. Nemesh, S. M. Shteiner, Metric and topological freedom for sequential operator spaces,
Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya, 2014, Issue 10, 55–67

https://www.mathnet.ru/eng/vsgu449

УДК 517.986.22

Н.Т. Немеш, С.М. Штейнер[1]

МЕТРИЧЕСКАЯ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СВОБОДА ДЛЯ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В 2002 году году Ансельм Ламберт в своей диссертации ввел определение секвенциального операторного пространства и доказал аналоги многих фактов теории операторных пространств. Говоря неформально, категория секвенциальных операторных пространств находится "между" категориями нормированных и операторных пространств. Цель данной статьи — описание свободных и косвободных объектов для различных версий гомологии в категории секвенциальных операторных пространств. Сначала мы покажем, что в этой категории теория двойственности во многом аналогична таковой для нормированных пространств. Затем, основываясь на этих результатах, мы дадим полное описание метрически и топологически свободных и косвободных объектов.

Ключевые слова: секвенциальное операторное пространство, секвенциально ограниченный оператор, двойственность, оснащенная категория, допустимый эпиморфизм, допустимый мономорфизм, свобода, косвобода.

1. Секвенциальные операторные пространства

1.1. Краткие сведения

Далее все линейные пространства будут рассматриваться над полем комплексных чисел. Через B_E мы будем обозначать замкнутый единичный шар нормированного пространства E. Если E, F — два нормированных пространства, то $\mathcal{B}(E,F)$ — нормированное пространство ограниченных линейных операторов из E в F. Для заданного $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через $\bigoplus_p^0\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ мы обозначаем $\bigoplus_p^0$-сумму семейства нормированных пространств $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Это нормированное пространство, у которого каждый вектор имеет лишь конечное число ненулевых координат. Аналогично $\bigoplus_p\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ обозначает $\bigoplus_p$-сумму банаховых пространств [5, с. 86]. Отметим, что $\bigoplus_\infty$-суммы являются произведениями, а $\bigoplus_1$-суммы — копроизведениями в категории нормированных простанств. Для $n, k \in \mathbb{N}$ через $M_{n,k}$ мы будем обозначать линейное пространство комплекснозначных матриц размера $n \times k$. Пространство $M_{n,k}$ по умолчанию наделяется операторной нормой

Немеш Норберт Тиборович (nemeshnorbert@ya.ru), *Штейнер Сергей Михайлович* (shteynerserg@yandex.ru), кафедра теории функций и функционального анализа, Московский государственный университет, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

$\|\cdot\|$, но нам также понадобится норма Гильберта — Шмидта. Пусть $\alpha \in M_{n,k}$, тогда норму Гильберта — Шмидта определим равенством $\|\alpha\|_{hs} = \mathrm{trace}(|\alpha|^2)^{1/2}$, где $|\alpha| = (\alpha^*\alpha)^{1/2}$. Отметим, что всегда выполнены неравенства $\|\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_{hs}$ и $\||\alpha|\|_{hs} = \||\alpha^*|\| = \|\alpha\|_{hs}$. Для линейного пространства E через E^k будем обозначать пространство столбцов высоты k с элементами из E. Для $\alpha \in M_{n,k}$ и $x \in E^k$ через αx будем обозначать такой столбец из E^n, что $(\alpha x)_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$. Эта формула является естественным обобщением матричного умножения. Теперь мы готовы дать два основных определения: определение секвенциального операторного пространства [1–4] и секвенциально ограниченного оператора.

Определение 1.1.1 [1, 1.1.7]. Пусть E — линейное пространство, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ на пространстве E^n задана некоторая норма $\|\cdot\|_{\widehat{n}}$. Будем говорить, что семейство $X = (E^n, (\|\cdot\|_{\widehat{n}})_{n\in\mathbb{N}})$ задает на E структуру *секвенциального операторного* пространства, если выполнены следующие условия:
i) $\|\alpha x\|_{\widehat{m}} \leqslant \|\alpha\|\|x\|_{\widehat{n}}$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E^{\widehat{n}}$, $\alpha \in M_{m,n}$.
ii) $\|(x,y)^{tr}\|^2_{\widehat{n+m}} \leqslant \|x\|^2_{\widehat{n}} + \|y\|^2_{\widehat{m}}$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E^n$, $y \in E^m$.
Пространство E^n с нормой $\|\cdot\|_{\widehat{n}}$ будем обозначать через $X^{\widehat{n}}$. Легко заметить, что если X — секвенциальное операторное пространство, то каждое нормированное пространство $X^{\widehat{n}}$ наделено естественной структурой секвенциального операторного пространства: достаточно отождествить $(X^{\widehat{n}})^{\widehat{k}}$ с $X^{\widehat{nk}}$. Для любого нормированного пространства E можно задать семейство наименьших или наибольших норм, делающих E секвенциальным операторным пространством [1, 2.1.1, 2.1.2]. Мы обозначим эти пространства $\min(E)$ и $\max(E)$ соответственно. Их нормы задаются равенствами

$$\|x\|_{\min(E)^{\widehat{n}}} = \sup_{\xi \in B_{l_2^n}} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\|,$$

$$\|x\|_{\max(E)^{\widehat{n}}} = \inf_{x=\alpha\tilde{x}, \alpha\in M_{n,k}, \tilde{x}\in E^{\widehat{k}}} \|\alpha\|_{M_{n,k}} \left(\sum_{i=1}^k \|\tilde{x}_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Мы будем использовать обозначения $t_2^n = \min(\mathbb{C}^n)$, $l_2^n = \max(\mathbb{C}^n)$, причем здесь $\mathbb{C}^n$ рассматривается как n-мерное гильбертово пространство. Отсюда, кстати, легко видеть, что $\mathbb{C}$ обладает единственной секвенциальной операторной структурой.

Определение 1.1.2 [1, 1.2.1]. Пусть X и Y — секвенциальные операторные пространства, а $\varphi : X \to Y$ — линейный оператор. Его *размножением* называется семейство операторов $\varphi^{\widehat{n}} : X^{\widehat{n}} \to Y^{\widehat{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, определенных равенством $\varphi^{\widehat{n}}(x) = (\varphi(x_i))_{i\in\mathbb{N}_k}$. Будем называть оператор φ *секвенциально ограниченным*, если

$$\|\varphi\|_{sb} := \sup\{\|\varphi^{\widehat{n}}\|_{\mathcal{B}(X^{\widehat{n}}, Y^{\widehat{n}})} : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Множество секвенциально ограниченных операторов между секвенциальными операторными пространствами X и Y будем обозначать через $\mathcal{SB}(X,Y)$. Это линейное подпространство в $\mathcal{B}(X,Y)$, которое также можно наделить структурой секвенциального операторного пространства [1, 1.2.7] посредством отождествления $\mathcal{SB}(X,Y)^{\widehat{n}} = \mathcal{SB}(X, Y^{\widehat{n}})$. Теперь мы можем ввести две категории секвенциальных операторных пространств: $SQNor$ и $SQNor_1$. Объекты обеих категорий — секвенциальные операторные пространства. Морфизмы в $SQNor$ — секвенциально ограниченные операторы, а в $SQNor_1$ — секвенциально ограниченные операторы с sb-нормой, не превосходящей 1.

Теперь легко проверить, что $\mathcal{SB}(-,-) : SQNor \times SQNor \to SQNor$ задает бифунктор, ковариантный по первому аргументу и контравариантный по второму. Как и в случае нормированных пространств, логично рассмотреть действие этого функтора с пространством $\mathbb{C}$ в качестве второго аргумента. Мы получим функтор $^{\triangle} = \mathcal{SB}(-,\mathbb{C})$, который естественно называть функтором сопряжения для секвенциальных операторных пространств. Он действительно ведет себя подобно функтору банаховой сопряженности [1, 1.3]. Категория $SQNor_1$ (как и категория операторных пространств с вполне сжимающими операторами в качестве морфизмов) обладает категорными произведениями и копроизведениями.

Определение 1.1.3 [1, 1.1.28]. Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство секвенциальных операторных пространств. Их $\bigoplus_\infty$-суммой называется секвенциальное операторное пространство $\bigoplus_\infty \{\widehat{X_\lambda^1} : \lambda \in \Lambda\}$ с семейством норм, задаваемых отождествлениями

$$\left(\bigoplus{}_\infty \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^{\widehat{n}} = \bigoplus{}_\infty \{\widehat{X_\lambda^n} : \lambda \in \Lambda\}.$$

Определение 1.1.4. Пусть $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — произвольное семейство секвенциальных операторных пространств. Их $\bigoplus_1^0$-суммой называется секвенциальное операторное пространство $\bigoplus_1^0 \{\widehat{X_\lambda^1} : \lambda \in \Lambda\}$ с нормами, индуцированными вложением

$$\bigoplus{}_1^0 \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \hookrightarrow \left(\bigoplus{}_\infty \{X_\lambda^\triangle : \lambda \in \Lambda\}\right)^\triangle.$$

Как и в случае операторных пространств, легко показать, что $\bigoplus_\infty$-суммы являются произведениями, а $\bigoplus_1^0$-суммы — копроизведениями в $SQNor_1$. Более того, имеет место изоморфизм в $SQNor_1$:

$$\left(\bigoplus{}_1^0 \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\right)^\triangle = \bigoplus{}_\infty \{X_\lambda^\triangle : \lambda \in \Lambda\}.$$

1.2. Двойственность для секвенциально ограниченных операторов

Основные результаты этого раздела получены Н. Немешем. Для начала нам нужно напомнить некоторые определения и факты, касающиеся ограниченных линейных операторов.

Определение 1.2.1. Пусть $T : E \to F$ — ограниченный линейный оператор между нормированными пространствами, тогда T называется

i) c-топологически инъективным, если для каждого $x \in E$ выполнено $\|x\| \leqslant c\|T(x)\|$. Если упоминание константы c не нужно, будем говорить, что T топологически инъективен;

ii) (строго) c-топологически сюръективным, если любого $c' > c$ и любого $y \in F$ существует такой $x \in E$, что ($\|x\| \leqslant c\|y\|$) $\|x\| < c'\|y\|$ и $T(x) = y$. Если упоминание константы c не нужно, будем говорить, что T (строго) топологически сюръективен;

iii) (строго) коизометрическим, если он сжимающий и (строго) 1-топологически сюръективный.

Предложение 1.2.2. Пусть $T : E \to F$ ограниченный оператор между нормированными пространствами и $c > 0$, тогда:

i) если T (строго) c-топологически сюръективен, то T^* c-топологически инъективен;

ii) если T c-топологически инъективен, то T^* строго c-топологически сюръективен;

iii) если T^* (строго) c-топологически сюръективен, то T c-топологически инъективен;

iv) если T^* c-топологически инъективен и E полно, то T c-топологически сюръективен.

Доказательство последнего предложения можно найти в [6, 4.13-4.15] и [2, A.2.1].

Аналогичные определения можно дать и для секвенциально ограниченных операторов. Например, оператор $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ между секвенциальными операторными пространствами X и Y называется секвенциально c-топологически инъективным, если для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен.

Далее мы докажем несколько технических предложений, необходимых для описания двойственности между секвенциально ограниченными операторами.

Предложение 1.2.3 [1, 1.3.14]. Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$. Тогда $\varphi^{\triangle} \in \mathcal{SB}(Y^{\triangle}, X^{\triangle})$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$. Как следствие, $\|\varphi^{\triangle}\|_{sb} = \|\varphi\|_{sb}$.

Определение 1.2.4 [1, 1.3.15]. Пусть X — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда через $t_2^n(X)$ будем обозначть нормированное пространство X^n с нормой

$$\|x\|_{t_2^n(X)} := \inf\left\{\|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} : x = \tilde{\alpha}\tilde{x}\right\},$$

где $\tilde{\alpha} \in M_{n,k}$, $x \in X^k$ и $k \in \mathbb{N}$. Если Y — секвенциальное операторное пространство, и $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$, то через $t_2^n(\varphi)$ будем обозначать линейный оператор

$$t_2^n(\varphi) : t_2^n(X) \to t_2^n(Y) : x \mapsto \varphi^{\widehat{n}}(x).$$

Предложение 1.2.5. Пусть X — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\|x\|_{t_2^n(X)} = \inf\left\{\|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{k}} : x = \alpha' x'\right\},$$

где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $x' \in X^n$.

Доказательство. Обозначим правую часть доказываемого равенства через $\|x\|'_{t_2^n(X)}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда существуют $\tilde{\alpha} \in M_{n,k}$ и $\tilde{x} \in X^k$, $k \in \mathbb{N}$ такие, что $x = \tilde{\alpha}\tilde{x}$ и $\|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} < \|x\|_{t_2^n(X)} + \varepsilon$. Рассмотрим полярное разложение $\tilde{\alpha} = |\tilde{\alpha}^*|\rho$ матрицы $\tilde{\alpha}$. Пусть p — ортогональный проектор на $\mathrm{Im}(|\tilde{\alpha}^*|)^{\perp}$. Тогда для любого $\delta \in \mathbb{R}$ матрица $\alpha'_\delta = |\tilde{\alpha}^*| + \delta p$ обратима, так как $\mathrm{Ker}(\alpha'_\delta) = \{0\}$. Так как $\alpha'_0 = |\tilde{\alpha}|$ и функция $\|\alpha'_\delta\|_{hs}$ непрерывна при $\delta \in \mathbb{R}$, то существует такое значение δ_0, что $\|\alpha'_{\delta_0}\|_{hs} < \||\tilde{\alpha}^*|\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}}^{-1} = \|\tilde{\alpha}\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}}^{-1}$. Обозначим $\alpha' = \alpha'_{\delta_0} \in M_{n,n}$ и $x' = \rho\tilde{x} \in Y^n$, тогда

$$\alpha' x' = (|\tilde{\alpha}^*| + \delta_0 p)\rho\tilde{x} = |\tilde{\alpha}^*|\rho\tilde{x} + \delta_0 p\rho\tilde{x} = \tilde{\alpha}\tilde{x}.$$

По построению полярного разложения $\|\rho\| \leqslant 1$, поэтому с учетом определения $\|x\|'_{t_2^n(X)}$ получаем

$$\|x\|'_{t_2^n(X)} \leqslant \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leqslant (\|\tilde{\alpha}\|_{hs} + \varepsilon\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}})\|\rho\|\|\tilde{x}\|_{\widehat{n}} \leqslant \|\tilde{\alpha}\|_{hs}\|\tilde{x}\|_{\widehat{k}} + \varepsilon \leqslant \|x\|_{t_2^n(X)} + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\|x\|'_{t_2^n(X)} \leqslant \|x\|_{t_2^n(X)}$. Обратное неравенство очевидно, поэтому $\|x\|_{t_2^n(X)} = \|x\|'_{t_2^n(X)}$.

Предложение 1.2.6. Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства, $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$ и $n,k \in \mathbb{N}$. Тогда:

i) для любых $\alpha \in M_{n,k}$ и $x \in t_2^k(X)$ выполнено $t_2^n(\varphi)(\alpha x) = \alpha t_2^k(\varphi)(x)$;

ii) $t_2^n(\varphi) \in \mathcal{B}(t_2^n(X), t_2^n(Y))$, причем $\|t_2^n(\varphi)\| \leqslant \|\varphi^{\widehat{n}}\|$;

iii) если $\varphi^{\widehat{n}}$ (строго) c-топологически сюръективно, то $t_2^n(\varphi)$ также (строго) c-топологически сюръективно;

iv) если $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективно, то $t_2^n(\varphi)$ также c-топологически инъективно.

Доказательство. *i*) проверяется непосредственно.

ii) пусть $x \in t_2^n(X)$ и $x = \alpha' x'$, где $\alpha \in M_{n,n}$ — обратимая матрица и $x' \in X^n$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x')$, поэтому из определения нормы в $t_2^n(Y)$ следует, что

$$\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \leqslant \|\alpha'\|_{hs} \|\varphi^{\widehat{n}}(x')\|_{\widehat{n}} \leqslant \|\alpha'\|_{hs} \|\varphi^{\widehat{n}}\| \|x'|_{\widehat{n}}.$$

Теперь возьмем нижнюю грань по всем представлениям x, описанным выше, тогда предложение 1.2.5 дает

$$\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \leqslant \|\varphi^{\widehat{n}}\| \|x\|_{t_2^n(X)}.$$

Следовательно, $\|t_2^n(\varphi)\| \leqslant \|\varphi^{\widehat{n}}\|$ и $t_2^n(\varphi) \in \mathcal{B}(t_2^n(X), t_2^n(Y))$.

iii) пусть $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективен. Пусть $y \in t_2^n(Y)$ и $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Пусть $c < c'' < c'$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективно, существует $x' \in X^n$ такое, что $\varphi^{\widehat{n}}(x') = y'$ и $\|x'\|_{\widehat{n}} < c'' \|y'\|_{\widehat{n}}$. Рассмотрим $x := \alpha' x'$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x') = \alpha' y' = y$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ получаем

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant \|\alpha'\|_{hs} \|x'\|_{\widehat{n}} \leqslant \|\alpha'\|_{hs} c'' \|y'\|_{\widehat{n}}.$$

Теперь возьмем нижнюю грань по всем представлениям y, описанным выше, тогда предложение 1.2.5 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant c'' \|y\|_{t_2^n(Y)} < c' \|y\|_{t_2^n(Y)}$ Таким образом, для любого $y \in t_2^n(Y)$ и любого $c' > c$ существует $x \in t_2^n(X)$ такой, что $t_2^n(\varphi)(x) = y$ и $\|x\|_{t_2^n(X)} < c' \|y\|_{t_2^n(Y)}$. Следовательно, $t_2^n(\varphi)$ c-топологически сюръективен.

Пусть $\varphi^{\widehat{n}}$ строго c-топологически сюръективен. Пусть $y \in t_2^n(Y)$ и $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Так как $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективно, существует $x' \in X^n$ такое, что $\varphi^{\widehat{n}}(x') = y'$ и $\|x'\|_{\widehat{n}} \leqslant c \|y'\|_{\widehat{n}}$. Рассмотрим $x := \alpha' x'$, тогда $t_2^n(\varphi)(x) = \alpha' t_2^n(\varphi)(x') = \alpha' \varphi^{\widehat{n}}(x') = \alpha' y' = y$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ получаем

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant \|\alpha'\|_{hs} \|x'\|_{\widehat{n}} \leqslant \|\alpha'\|_{hs} c \|y'\|_{\widehat{n}}.$$

Теперь возьмем нижнюю грань по всем представлениям y, описанным выше, тогда предложение 1.2.5 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant c \|y\|_{t_2^n(Y)}$ Таким образом, для любого $y \in t_2^n(Y)$ существует $x \in t_2^n(X)$ такой, что $t_2^n(\varphi)(x) = y$ и $\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant c \|y\|_{t_2^n(Y)}$. Следовательно, $t_2^n(\varphi)$ строго c-топологически сюръективен.

iv) пусть $x \in t_2^n(X)$, обозначим $y := t_2^n(\varphi)(x)$. Пусть имеется представление $y = \alpha' y'$, где $\alpha' \in M_{n,n}$ — обратимая матрица, $y' \in Y^n$. Тогда $y' = (\alpha')^{-1} y =$

$= (\alpha')^{-1}t_2^n(\varphi)(x) = t_2^n(\varphi)((\alpha')^{-1}x) \in \mathrm{Im}(t_n^2(\varphi))$. Так как $\widehat{\varphi^n}$ c-топологически инъективен, то он инъективен, поэтому для $y' \in \mathrm{Im}(t_2^n(\varphi))$ существует $x' \in X^n$ такой, что $y' = t_2^n(\varphi)(x') = \widehat{\varphi^n}(x')$. Так как $\widehat{\varphi^n}$ c-топологически инъективен, то $\|x'\|_{\widehat{n}} \leqslant c\|y'\|$. Из определения нормы в $t_2^n(X)$ следует, что

$$\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant \|\alpha'\|_{hs}\|x'\|_{\widehat{n}} \leqslant c\|\alpha'\|_{hs}\|y'\|_{\widehat{n}}.$$

Теперь возьмем нижнюю грань по всем представлениям y, описанным выше, тогда предложение 1.2.5 дает $\|x\|_{t_2^n(X)} \leqslant c\|y\|_{t_2^n(Y)} = c\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)}$. Таким образом, для любого $x \in t_2^n(X)$ выполнено $\|t_2^n(\varphi)(x)\|_{t_2^n(Y)} \geqslant c^{-1}\|x\|_{t_2^n(X)}$. Следовательно, $t_2^n(\varphi)$ c-топологически инъективен.

Предложение 1.2.7 [1, 1.3.16]. Пусть X — секвенциальное операторное пространство и $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место изометрические изоморфизмы

$$\alpha_X^n : t_2^n(X^\triangle) \to (X^{\widehat{n}})^* : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i)\right),$$

$$\beta_X^n : (X^\triangle)^{\widehat{n}} \to t_2^n(X)^* : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_i)\right).$$

Предложение 1.2.8. Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства, $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$ и $n \in \mathbb{N}$, тогда:

i) $(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен (сюръективен) тогда и только тогда, когда $t_2^n(\varphi)^*$ c-топологически инъективен (сюръективен);

ii) $t_2^n(\varphi^\triangle)$ c-топологически инъективен (сюръективен) тогда и только тогда, когда $(\widehat{\varphi^n})^*$ c-топологически инъективен (сюръективен);

iii) верны равенства $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\|$ и $\|t_2^n(\varphi^\triangle)\| = \|(\widehat{\varphi^n})^*\|$ и $\|t_2^n(\varphi)\| = \|\widehat{\varphi^n}\|$.

Доказательство. Пусть $g \in (Y^\triangle)^{\widehat{n}}$ и $x \in t_2^n(X)$, тогда

$$(\alpha_X^n(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}})(g)(x) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}(g)_k(x_k) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)(g_k)(x_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k)),$$

$$(t_2^n(\varphi)^*\alpha_Y^n)(g)(x) = \alpha_Y^n(g)(t_2^n(\varphi)(x)) = \sum_{k=1}^n g_k(t_2^n(\varphi)(x)_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k)).$$

Так как g и x произвольны, $\alpha_X^n(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}} = t_2^n(\varphi)^*\alpha_Y^n$. Так как α_Y^n и α_X^n изометрические изоморфизмы, мы получаем утверждение $i)$ и равенство $\|(\varphi^\triangle)^{\widehat{n}}\| = \|t_2^n(\varphi)^*\|$. Пусть $g \in t_2^n(Y^\triangle)$ и $x \in X^{\widehat{n}}$, тогда

$$(\beta_X^n t_2^n(\varphi^\triangle))(g)(x) = \sum_{k=1}^n t_2^n(\varphi^\triangle)(g)_k(x_k) = \sum_{k=1}^n (\varphi^\triangle)(g_k)(x_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k)),$$

$$((\widehat{\varphi^n})^*\beta_Y^n)(g)(x) = \beta_Y^n(g)(\widehat{\varphi^n})(x)) = \sum_{k=1}^n g_k(\widehat{\varphi^n})(x)_k) = \sum_{k=1}^n g_k(\varphi(x_k)).$$

Так как g и x произвольны, $\beta_X^n t_2^n(\varphi^\triangle) = (\widehat{\varphi^n})^*\beta_Y^n$. Так как β_Y^n и β_X^n изометрические изоморфизмы, мы получаем утверждение $ii)$ и равенство $\|t_2^n(\varphi^\triangle)\| = \|(\widehat{\varphi^n})^*\|$.

Наконец, из предложений 1.2.3 и 1.2.6 следует, что $\|t_2^n(\varphi)\| \leqslant \|\varphi^{\widehat{n}}\| = \|(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}\| = = \|t_2^n(\varphi)^*\| = \|t_2^n(\varphi)\|$, т.е. $\|t_2^n(\varphi)\| = \|\varphi^{\widehat{n}}\|$.

Теорема 1.2.9. Пусть X, Y — секвенциальные операторные пространства и $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$, тогда:

i) φ (строго) секвенциально c-топологически сюръективен $\Rightarrow$ $\varphi^{\triangle}$ секвенциально c-топологически инъективен;

ii) φ секвенциально c-топологически инъективен $\Rightarrow$ строго $\varphi^{\triangle}$ строго секвенциально c-топологически сюръективен;

iii) $\varphi^{\triangle}$ (строго) секвенциально c-топологически сюръективен $\Rightarrow$ φ секвенциально c-топологически инъективен;

iv) $\varphi^{\triangle}$ секвенциально c-топологически инъективен $\Rightarrow$ φ строго секвенциально c-топологически сюръективен;

v) φ секвенциально коизометричен $\Rightarrow$ $\varphi^{\triangle}$ секвенциально изометричен, если X полно, то верно и обратное;

vi) φ секвенциально изометричен $\Leftrightarrow$ $\varphi^{\triangle}$ секвенциально строго коизометричен.

Доказательство. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ имеем цепочку импликаций: $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен $\Rightarrow$ $t_2^n(\varphi)$ c-топологически инъективен (1.2.6) $\Rightarrow$ $t_2^n(\varphi)^*$ строго c-топологически сюръективен (1.2.2) $\Rightarrow$ $(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}$ строго c-топологически сюръективен (1.2.8) $\Rightarrow$ $t_2^n(\varphi^{\triangle})$ строго c-топологически сюръективен (1.2.6) $\Rightarrow$ $(\varphi^{\widehat{n}})^*$ строго c-топологически сюръективен (1.2.8) $\Rightarrow$ $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен (1.2.2). Откуда мы получаем *ii)* и *iii)*. Снова для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем цепочку ипликаций: $\varphi^{\widehat{n}}$ (строго) c-топологически сюръективен $\Rightarrow$ $t_2^n(\varphi)$ c-топологически сюръективен (1.2.6) $\Rightarrow$ $t_2^n(\varphi)^*$ c-топологически инъективен (1.2.2) $\Rightarrow$ $(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}$ c-топологически инъективен (1.2.8) $\Rightarrow$ $t_2^n(\varphi^{\triangle})$ c-топологически инъективен (1.2.6) $\Rightarrow$ $(\varphi^{\widehat{n}})^*$ c-топологически инъективен (1.2.8) $\Rightarrow$ $\varphi^{\widehat{n}}$ c-топологически сюръективен (1.2.2). Откуда мы получаем *i)* и *iv)*. Пункты *v)* и *vi)* являются прямым следствием *i)*—*iv)* при $c = 1$, если учесть, что φ секвенциально сжимающий тогда и только тогда, когда $\varphi^{\triangle}$ секвенцильно сжимающий (см. предложение 1.2.3).

2. Свободные и косвободные объекты

Основные результаты этого раздела получены С. Штейнером. Все необходимые определения, связанные с теорией категорий, можно найти в работах [7] и [8], с общекатегорным подходом к проективности — в работе [9]. Категория полулинейных нормированных пространств описана в [10].

2.1. Метрически свободные секвенциальные пространства

Начнем с рассмотрения метрической версии свободы для секвенциальных операторных пространств. Рассмотрим функтор

$$\square_{sqMet} : SQNor_1 \to Set : X \mapsto \prod \left\{ B_{X^{\widehat{n}}} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

отправляющий секвенциальное операторное пространство X в декартово произведение единичных шаров каждого из пространств $X^{\widehat{n}}$. Легко заметить, что справедливо

Предложение 2.1.1. $\square_{sqMet}$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности секвенциально строго коизометрические операторы.

Метрически свободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqMet}$-свободные объекты. Обозначим через I_n элемент из $(t_2^n)^{\widehat{n}} = \mathcal{B}(l_2^n, l_2^n)$, соответствующий тождественному оператору.

Предложение 2.1.2. Пусть X — произвольное секвенциальное операторное пространство и $x \in B_{X^{\widehat{n}}}$. Тогда существует единственный секвенциально сжимающий оператор $\psi_n \in \mathcal{SB}(t_2^n, X)$ такой, что $\psi_n^{\widehat{n}}(I_n) = x$.

Доказательство. Итак, $I_n = (e_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, где e_i-i-й орт подлежащего пространства t_2^n. Ясно, что есть только один линейный оператор ψ_n, удовлетворяющий условиям $\psi_n(e_i) = x_i$, $i \in \mathbb{N}_n$. Осталось проверить, что ψ_n является секвенциально сжимающим. Итак, пусть $k \in \mathbb{N}$ и $y \in B_{(t_2^n)^{\widehat{k}}}$, тогда $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, $i \in \mathbb{N}_k$ для некоторой матрицы $\alpha \in M_{k,n}$. Тогда

$$\|\psi_n^{\widehat{k}}(y)\|_{\widehat{k}} = \left\|(\psi_n(y_i))_{i \in \mathbb{N}_k}\right\|_{\widehat{k}} = \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \psi_n(e_j) \right)_{i \in \mathbb{N}_k} \right\|_{\widehat{k}} = \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right)_{i \in \mathbb{N}_k} \right\|_{\widehat{k}} =$$

$$= \|\alpha x\|_{\widehat{k}} \leqslant \|\alpha\| \|x\|_{\widehat{n}} = \|y\|_{(t_2^n)^{\widehat{k}}} \|x\|_{\widehat{n}} \leqslant 1.$$

Предложение доказано.

Предложение 2.1.3. Метрически свободным секвенциальным операторным пространством с базой из одноточечного множества является пространство $t_2^\infty := = \bigoplus_1^0 \{t_2^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Универсальную стрелку определим следующим образом $j : \{\lambda\} \to t_2^\infty : \lambda \mapsto (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$. Пусть X — произвольное секвенциальное операторное пространство, и $\varphi : \{\lambda\} \to \prod_{n \in \mathbb{N}} B_{X^{\widehat{n}}}$. Обозначим $x = \varphi(\lambda)$. Тогда существует единственный секвенциально сжимающий морфизм $\psi = \bigoplus_1^0 \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\} \in \in \mathcal{SB}\left(\bigoplus_1^0 \{t_2^n : n \in \mathbb{N}\}, X\right)$ такой, что $\psi^{\widehat{n}}(i_n(I_n)) = x$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Здесь $i_n : t_2^n \to t_2^\infty$ — стандартное вложение.

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqMet}(t_2^\infty) \arrow[dr, dashed, "\square_{sqMet}(\psi)"] & \\
\{\lambda\} \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"] & \square_{sqMet}(X)
\end{tikzcd}$$

В этом случае $\varphi = \square_{sqMet}(\psi) j$. Так как X и φ произвольны, то t_2^∞ метрически свободен и имеет одноточечную базу.

Итак, теперь мы готовы сформулировать итоговый результат, справедливость которого мгновенно вытекает из доказанного выше предложения.

Теорема 2.1.4. Метрически свободным секвенциальным операторным пространством с базой Λ является, с точностью до секвенциального изометрического изоморфизма, $\bigoplus_1^0$-сумма копий пространства t_2^∞, заиндексированных элементами множества Λ.

2.2. Топологически свободные секвенциальные пространства

Перейдем теперь к рассмотрению секвенциальной операторной версии топологической свободы. Рассмотрим функтор

$$\square_{sqTop} : SQNor \to Nor_0 : X \mapsto \bigoplus{}_\infty \{X^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\},$$

то есть секвенциальное операторное пространство X отображается в $\bigoplus_\infty$-сумму своих размножений без аддитивной структуры.

Предложение 2.2.1. Пусть $\varphi : X \to Y$ — ограниченный оператор между нормиированными пространствами X и Y, тогда он c-топологически сюръективен тогда и только тогда, когда существует ограниченный полулинейный оператор $\rho : Y \to X$ такой, что $\|\rho\| \leqslant c$ и $\varphi\rho = 1_Y$.

Доказательство. Допустим, что φ c-топологически сюръективен. Рассмотрим отношение $\sim$ на S_Y, определенное следующим образом: $e_1 \sim e_2$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in \mathbb{T}$ такое, что $e_1 = \alpha e_2$. Очевидно, $\sim$ есть отношение эквивалентности, поэтому рассмотрим множество ненулевых представителей классов эквивалентностей, которое обозначим $\{r_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. По построению для каждого $e \in S_Y$ существуют единственные $\alpha(e) \in \mathbb{T}$ и $\lambda(e) \in \Lambda$ такие, что $e = \alpha(e) r_{\lambda(e)}$. Ясно, что для любых $z \in \mathbb{T}$ и $e \in S_Y$ выполнено $\alpha(ze) = z\alpha(e)$ и $\lambda(ze) = \lambda(e)$. Так как φ c-топологически сюръективен, то, в частности, для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует $x(\lambda) \in X$ такой, что $\|x(\lambda)\| \leqslant c\|r_\lambda\|$ и $\varphi(x(\lambda)) = r_\lambda$. Рассмотрим отображение $\tilde{\rho} : S_Y \to X : e \mapsto \alpha(e)x(\lambda(e))$. Легко видеть, что для всех $z \in \mathbb{T}$ и $e \in S_Y$ выполнено $\tilde{\rho}(ze) = z\tilde{\rho}(e)$, $\|\tilde{\rho}(e)\| \leqslant C$ и $\varphi(\tilde{\rho}(e)) = e$. Теперь рассмотрим отображение $\rho : Y \to X : y \mapsto \|y\|\tilde{\rho}(\|y\|^{-1}y)$ и $\rho(0) = 0$. Используя свойства $\tilde{\rho}$, легко проверить, что ρ — полулинейный оператор такой, что $\|\rho\| \leqslant C$ и $\varphi\rho = 1_Y$.

Обратно, допустим, что существует ограниченный полулинейный оператор $\rho : Y \to X$ такой, что $\|\rho\| \leqslant c$ и $\varphi\rho = 1_Y$. Возьмем произвольный $y \in Y$ и рассмотрим $x = \rho(y)$, тогда $\|x\| \leqslant C\|y\|$ и $\varphi(x) = y$. Следовательно, φ c-топологически сюръективен.

Предложение 2.2.2. $\square_{sqTop}$-допустимыми эпиморфизмами являются в точности секвенциальные топологически сюрьективные операторы.

Доказательство. Для произвольного секвенциального операторного пространства Z через $i_n^Z : Z^{\widehat{n}} \to \square_{sqTop}(Z)$ обозначим стандартное вложение, а через $p_n^Z : \square_{sqTop}(Z) \to Z^{\widehat{n}}$ обозначим стандартную проекцию. Допустим, что $\varphi : X \to Y$ c-секвенциально топологически сюръективен. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, тогда, по предложению 2.2.1, существует ограниченный полулинейный оператор ρ^n такой, что $\varphi^{\widehat{n}}\rho^n = 1_{Y^{\widehat{n}}}$ и $\|\rho^n\| \leqslant c$. Рассмотрим отображение $\rho = \bigoplus_\infty\{\rho^n : n \in \mathbb{N}\}$. Для любого $y \in \square_{sqTop}(Y)$ имеем

$$\|\rho(y)\| = \sup\{\|\rho^n(p_n^Y(y))\|_{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} \leqslant c \sup\{\|p_n^Y(y)\|_{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\} = c\|y\|,$$

следовательно, ρ — полулинейный ограниченый оператор. Более того, $\square_{sqTop}(\varphi)\rho = 1_{\square_{sqTop}(Y)}$, значит, φ $\square_{sqTop}$-допустимый эпиморфизм. Обратно, если φ $\square_{sqTop}$-допустимый эпиморфизм, то существует ограниченный правый обратный полулинейный оператор ρ к $\square_{sqTop}(\varphi)$. Тогда для любого $y \in Y^{\widehat{n}}$ выполнено $\square_{sqTop}(\varphi)\rho(i_n^Y(y)) = i_n^Y(y)$. В частности, $\varphi^{\widehat{n}}(p_n^X(\rho(i_n^Y(y)))) = y$. Положим $x = p_n^X(\rho(i_n^Y(y)))$ и $c = \|\rho\|$, тогда $\varphi^{\widehat{n}}(x) = y$ и $\|x\|_{\widehat{n}} \leqslant \|\rho(i_n^Y(y))\| \leqslant c\|i_n^Y(y)\| = c\|y\|_{\widehat{n}}$. Следовательно, φ секвенциально топологически сюръективен.

Топологически свободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square_{sqTop}$-свободные объекты. Сформулируем и докажем основное утверждение раздела.

Предложение 2.2.3. Пусть F — секвенциальное метрически свободное пространство с базой Λ. Тогда F является секвенциальным операторным топологически свободным с базой $\mathbb{C}^\Lambda$.

Доказательство. Пусть $j' : \Lambda \to \square_{sqMet}(F)$ — универсальная стрелка в диаграмме для секвенциальной метрической свободы. Определим полулинейный ограниченный оператор $j : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_{sqTop}(F) : z_\lambda \mapsto z_\lambda j(\lambda)$. Рассмотрим произвольный ограниченный полулинейный оператор $\varphi : \mathbb{C}^\Lambda \to \square_{sqTop}(X)$, где X — произвольное секвенциальное операторное пространство. Тогда для $\varphi' := \|\varphi\|_{sb}^{-1}\varphi$ существует единственный морфизм ψ' такой, что $\varphi' = \square_{sqMet}(\psi')j$. Теперь легко видеть, что для морфизма $\psi := \|\varphi\|_{sb}\psi'$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqTop}(F) \arrow[dr, dashed, "\square_{sqTop}(\psi)"] & \\
\mathbb{C}^\Lambda \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\varphi"'] & \square_{sqTop}(X)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Единственность ψ доказывается следующим образом. Пусть для диаграммы выше есть два различных подходящих морфизма ψ_1 и ψ_2. Обозначим $C = \max(\|\varphi\|_{sb}, \|\psi_1\|_{sb}, \|\psi_2\|_{sb})$, тогда ясно, что морфизмы $C^{-1}\psi_1$ и $C^{-1}\psi_2$ подходят для следующей диаграммы, соответствующей секвенциальной метрической проективности:

$$\begin{tikzcd}
\square_{sqMet}(F) \arrow[dr, dashed, "?"] & \\
\mathbb{C}^\Lambda \arrow[u, "j'"] \arrow[r, "C^{-1}\varphi'"'] & \square_{sqMet}(X)
\end{tikzcd}$$

Это противоречит единственности морфизма ψ', значит, ψ единственен.

В качестве простого следствия мы получаем описание топологически свободных секвенциальных операторных пространств.

Теорема 2.2.4. Секвенциальное операторное пространство является топологически свободным тогда и только тогда, когда оно секвенциально топологически изоморфно $\bigoplus{}_1^0$-сумме пространств t_2^∞, заиндексированных элементами некоторого множества Λ.

2.3. Метрически косвободные секвенциальные пространства

Рассмотрим функтор

$$\square^d_{sqMet} : SQNor_1 \to Set^o : X \mapsto \prod \left\{ B_{\widehat{(X^\triangle)^n}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Предложение 2.3.1. $\square^d_{sqMet}$-допустимыми мономорфизмами являются в точности секвенциально изометрические операторы.

Доказательство. Морфизм φ является $\square^d_{sqMet}$-допустмым мономорфизмом, только если $\square^d_{sqMet}(\varphi)$ обратим слева как морфизм в Set^o. Это равносильно тому, что $\square^d_{sqMet}(\varphi^\triangle)$ сюръективно. Последнее эквивалентно сюръективности

$(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}|^{B_{(Y^{\triangle})^{\widehat{n}}}}_{B_{(X^{\triangle})^{\widehat{n}}}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что $(\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}$ строго коизометрично для каждого $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\varphi^{\triangle}$ секвенциально строго коизометричен. По теореме 1.2.9 это равносильно тому, что φ секвенциально изометричен.

Метрически косвободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square^d_{sqMet}$-косвободные объекты.

Теорема 2.3.2. Метрически косвободным секвенциальным операторным пространством с базой Λ является, с точностью до секвенциального изометрического изоморфизма, $\bigoplus_\infty$-сумма копий пространства $l_2^\infty := \bigoplus_\infty \{l_2^n : n \in \mathbb{N}\}$, заиндексированных элементами множества Λ.

Доказательство. Пусть Λ — произвольное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} SQNor_1^o \arrow[r, "(\square^d_{sqMet})^o"] \arrow[d, "\nabla"'] & Set \arrow[d, "1_{Set}"] \\ SQNor_1 \arrow[r, "\square_{sqMet}"] & Set \end{tikzcd}$$

Здесь $^{\nabla}$ есть ковариантная версия функтора $^{\triangle}$. Эта диаграмма коммутативна, так как для произвольных секвенциальных операторных пространств X, Y и любого $\varphi \in \mathcal{SB}(X, Y)$ выполнено

$$1_{Set}((\square^d_{sqMet})^o(\varphi)) = \prod_{n \in \mathbb{N}} (\varphi^{\triangle})^{\widehat{n}}|^{B_{(X^{\triangle})^{\widehat{n}}}}_{B_{(Y^{\triangle})^{\widehat{n}}}} = \square_{sqMet}(^{\nabla}(\varphi)).$$

Заметим, что функтор $^{\nabla}$ имеет левый сопряженный функтор, а именно $^{\triangle}$. Аналогично 1_{Set} сопряжен слева к самому себе. По теореме 2.1.4 объект $\bigoplus_1^0 \{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ $\square_{sqMet}$-свободен, поэтому по предложению [9, 4.5] объект $(\bigoplus_1^0 \{t_2^\infty : \lambda \in \in \Lambda\})^{\triangle} = \bigoplus_\infty \{l_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ является $(\square^d_{sqMet})^o$ свободным, или, что то же самое, $\square^d_{sqMet}$-косвободным. Так как множество Λ произвольно, получаем, что все $\square_{sqMet}$-косвободные объекты с базой Λ секвенциально изометрически изоморфны пространствам указанного вида.

2.4. Топологически косвободные секвенциальные пространства

Рассмотрим функтор

$$\square^d_{sqTop} : SQNor \to Nor_0^o, X \mapsto \bigoplus\nolimits_\infty \{(X^{\triangle})^{\widehat{n}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Предложение 2.4.1. $\square^d_{sqTop}$-допустимыми мономорфизмами являются в точности секвенциально топологически инъективные операторы.

Доказательство. Морфизм φ является $\square^d_{sqTop}$-допустимым мономорфизмом, только если $\square^d_{sqTop}(\varphi)$ обратим слева как морфизм в Nor_0^o. Это равносильно тому, что $\square^d_{sqTop}(\varphi) = \square_{sqTop}(\varphi^{\triangle})$ обратим справа как морфизм в Nor_0. По предложению 2.2.2 это эквивалентно секвенциальной топологической сюръективности $\varphi^{\triangle}$. По теореме 1.2.9 это равносильно тому, что φ секвенциально топологически инъективен.

Топологически косвободными секвенциальными пространствами естественно называть $\square^d_{sqTop}$-косвободные объекты.

Теорема 2.4.2. Секвенциальное операторное пространство является топологически косвободным тогда и только тогда, когда оно секвенциально топологически изоморфно $\bigoplus_\infty$ сумме пространств l_2^∞, заиндексированных элементами множества Λ.

Доказательство. Пусть Λ — произвольное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} SQNor^o \arrow[r, "(\square^d_{sqTop})^o"] \arrow[d, "\nabla"'] & Nor_0 \arrow[d, "1_{Nor_0}"] \\ SQNor \arrow[r, "\square_{sqTop}"] & Nor_0 \end{tikzcd}$$

Здесь ∇ есть ковариантная версия функтора $\triangle$. Эта диаграмма коммутативна, так как для произвольных секвенциальных операторных пространств X, Y и любого $\varphi \in \mathcal{SB}(X,Y)$ выполнено

$$1_{Nor_0}((\square^d_{sqTop})^o(\varphi)) = \bigoplus{}_\infty\{\widehat{(\varphi^\triangle)^n} : n \in \mathbb{N}\} = \square_{sqTop}({}^\nabla(\varphi)).$$

Функтор ∇ имеет левый сопряженный функтор, а именно $\triangle$. Аналогично 1_{Nor_0} сопряжен слева к самому себе. По теореме 2.2.4 объект $\bigoplus{}^0_1\{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ $\square_{sqTop}$-свободен, поэтому по предложению [9, 4.5] объект $(\bigoplus{}^0_1\{t_2^\infty : \lambda \in \Lambda\})^\triangle =$ $= \bigoplus{}_\infty\{l_2^\infty : \lambda \in \Lambda\}$ является $(\square^d_{sqTop})^o$-свободным, или, что то же самое, $\square^d_{sqTop}$-косвободным. Получаем, что все $\square_{sqTop}$-косвободные объекты с базой $\mathbb{C}^\Lambda$ секвенциально топологически изоморфны пространствам указанного вида.

Литература

[1] Lambert A. Operatorfolgenräume. Eine Kategorie auf dem Weg von den Banach-Räumen zu den Operatorräumen. Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I der Universität des Saarlandes. Saarbrücken, 2002.

[2] Effros E.G., Ruan Z.-J. Operator spaces. Clarendon Press, 2000.

[3] Paulsen V. Completely bounded maps and operator algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Vol. 78.

[4] Pisier G. Introduction to operator space theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Vol. 294.

[5] Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

[6] Rudin W. Functional analysis. McGraw-Hill. New York, 1973.

[7] Mac Lane S. Categories for the working mathematician. Berlin: Springer-Verlag, 1971.

[8] William Lawvere F., Schanuel Stephen H. Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[9] Хелемский А.Я. Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 7. С. 127–158.

[10] Штейнер С.М. Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей // Вестник СамГУ. 2013. № 9/1 (110). С. 49–57.

References

[1] Lambert A.. Operatorfolgenräume. Eine Kategorie auf dem Weg von den Banach-Räumen zu den Operatorräumen. Dissertation zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I der Universität des Saarlandes. Saarbrücken, 2002 [in German].

[2] Effros E.G., Ruan Z.-J. Operator spaces. Clarendon Press, 2000.

[3] Paulsen V. Completely bounded maps and operator algebras. Cambridge University Press, Vol. 78, 2002.

[4] Pisier G. Introduction to operator space theory. Cambridge University Press, Vol. 294, 2003.

[5] Helemskii A.Ya. Lectures and exercises on functional analysis. Vol. 233. Providence, RI, American mathematical society, 2006.

[6] Rudin W. Functional analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[7] Mac Lane S. Categories for the working mathematician. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8] William Lawvere F., Stephen H. Schanuel. Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories. Cambridge University Press, 2009.

[9] Helemskii A.Ya. Metric freeness and projectivity for classical and quantum normed modules. Sbornik: Mathematics, 2013,204(7):1056.

[10] Shteiner S.M. Topological freedom for classical and quantum notmed modules. *Vestnik SamGU* [*Vestnik of SamSU*], 2013, № 9/1(110), pp. 49–57 [in Russian].

N.T. Nemesh, S.M. Shteiner[2]

METRIC AND TOPOLOGICAL FREEDOM FOR SEQUENTIAL OPERATOR SPACES

In 2002 Anselm Lambert in his PhD thesis [1] introduced the definition of sequential operator space and managed to establish a considerable amount of analogs of corresponding results in operator space theory. Informally speaking, the category of sequential operator spaces is situated "between" the categories of normed and operator spaces. This article aims to describe free and cofree objects for different versions of sequential operator space homology. First of all, we will show that duality theory in above-mentioned category is in many respects analogous to that in the category of normed spaces. Then, based on those results, we will give a full characterization of both metric and topological free and cofree objects.

Key words: sequential operator space, sequentially bounded operator, duality, framed category, admissible epimorphism, admissible monomorphism, freedom, cofreedom.

Статья поступила в редакцию 18/*IX*/2014.

The article received 18/*IX*/2014.

[2] *Nemesh Norbert Tiborovich* (`nemeshnorbert@ya.ru`), *Shteiner Sergey Mikhailovich* (`shteynerserg@yandex.ru`), Department of Theory of Functions and Functional Analysis, Moscow State University, 119991, Russian Federation.