В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Модели микрополярных термоупругих континуумов со связанными параметрами микроструктуры, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2015, том 15, выпуск 4, 451–461

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-451-461

gost' tonkikh obolochek [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1978, 343 p. (in Russian).

8. *Raschet elementov konstruktsii letatel'nykh apparatov* [Calculation of the components of the aircraft structure] / ed. by V. V. Kabanova. Moscow, Mashinostroenie, 1982, 136 p. (in Russian).
9. Beloschtochny G. N. Analiticheskie metody opredeleniia zamknutykh integralov singuliarnykh differentsial'nykh uravnenii termouprugosti geometricheski nereguliarnykh obolochek [Analytical methods for definition of the closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells]. *Doklady Akademii voennykh nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–26 (in Russian).
10. Belostochny G. N., Gushchin B. A. Effektivnyi metod resheniia lineinykh neodnorodnykh differentsial'nykh uravnenii [The effective method for solution of linear inhomogeneous differential equations]. *Prikladnye zadachi napriazhennogo sostoianiia uprugikh tel : Mezhvuzovsk. nauchn. sb.* [Applications strained condition of elastic bodies : Interuniversity scientific collection]. Saratov, Publ. Saratov Pedagogical Institute, 1987, pp. 54–58 (in Russian).
11. Belostochnyi G. N., Zelepukin Iu. V. Nekotorye resheniia zadach nesviaznoi termouprugosti izotropnykh sistem «plastinka – rebra» na bazakh kontinual'noi i diskretnoi modelei [Some solutions of the problems of incoherent thermoelasticity of the isotopic systems «plate – ribs» on the basis of the continuum and discrete models] / Saratov Polytechnic Institute. Saratov, 1982, 12 p. Dep. in VINITI 7.01.82, no. 521-82 (in Russian).

УДК 539.374

МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ КОНТИНУУМОВ СО СВЯЗАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МИКРОСТРУКТУРЫ

В. А. Ковалев[1], Ю. Н. Радаев[2]

[1]Ковалев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры финансового менеджмента, Московский городской университет управления Правительства Москвы, kovalev.kam@gmail.com

[2]Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Предложена новая теоретико-полевая модель термоупругого континумма с микрополярной структурой, определяемой микроструктурными d-векторами и d-тензорами, ранг которых может быть произвольно высоким. Микроструктурные векторные и тензорные экстраполевые переменные подчиняются уравнениям связей (ограничениям), конечным (голономным) или дифференциальным (неголономным). Исследование выполнено на основе лагранжева полевого формализма в стиле 4-ковариантных физических теорий поля. Наличие конечных или дифференциальных связей, накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, подразумевает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления, точнее, как вариационной задачи Лагранжа для многомерного интегрального функционала. Правило множителей Лагранжа применяется для вывода дифференциальных уравнений поля при наличии связей между микроструктурными переменными. Связи могут быть конечными и дифференциальными, в каждом их этих случаев получены уравнения поля. В качестве примера рассматривается микрополярный континуум с жестким репером директоров, определяющих его микроструктуру.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, микрополярный континуум, поле, действие, d-тензор, связь, множитель Лагранжа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-451-461

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Содержание механики континуума как науки и современный подход к математическому представлению деформаций и напряжений, выводу уравнений динамики и термодинамики, формулировке определяющих уравнений сложились в результате довольно длительного исторического развития. Механика континуума продолжает бурно развиваться, и прогресс этой науки в значительной мере связан с новыми моделями сплошных деформируемых сред. Никогда не следует забывать о том, что корректное построение новых математических моделей континуума должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто теоретико-полевые методы выступают как единственный инструмент вывода физически приемлемых и разумных уравнений. Указанное обстоятельство характерно, прежде всего, для сложных континуумов с экстрастепенями свободы, приписываемыми микроэлементам, в частности, для микрополярных сред, когда признаются допустимыми дополнительные повороты и аффинные деформации микроэлементов.

Как известно, теории поля обладают одним неоспоримым аналитическим преимуществом — возможностью их систематического вывода из одного вариационного функционала. Указанный вариационный функционал называется действием. Принцип наименьшего действия отделяет действительные процессы и состояния от всех других, кинематически и термодинамически допустимых. Преимущества теоретико-полевой точки зрения в механике микрополярных континуумов убедительно продемонстрированы в ряде публикаций. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются также ковариантность дифференциальных уравнений поля и вариационные симметрии поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля и выполняются в силу уравнений поля, т.е. на решениях дифференциальных уравнений поля.

Нелинейные термомеханические модели сложных континуумов с микроструктурой, в частности, микрополярные среды и метаматериалы, в решающей степени определяются термодинамическими параметрами состояния, которые формируются из независимых объективных (т.е. выдерживающих повороты эйлеровой пространственной координатной системы в трехмерном пространстве) скалярных, векторных и тензорных переменных, определяющих термодинамическое состояние микроэлемента. Подобные системы термодинамических параметров состояния мы будем называть также термодинамическими базисами. Термодинамический базис должен обладать необходимыми свойствами полноты относительно тензорных мер состояния континуума.

Теоретико-полевые формулировки всегда подразумевают существенное и интенсивное использование понятий и формализма вариационного исчисления [1]. С формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу основных задач вариационного исчисления. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в механике символ вариации традиционно обозначает виртуальную вариацию, т. е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния. Виртуальные вариации определяющих переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае, принцип наименьшего действия следует отнести к классу *связанных* задач вариационного исчисления. Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления (calculus of variations with constraints). Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Решение подобного рода задач обычно выполняется с помощью правила множителей Лагранжа (см., например, [2]). Рассмотрение вариационных задач для интегрального функционала с ограничениями типа равенств и неравенств на уровне необходимых условий сводится к проблеме безусловного экстремума с помощью правила Лагранжа. Оказывается, что этот принцип распространяется на задачи весьма сложной природы.

2. ДЕФОРМАЦИЯ И ЭКСТРАДЕФОРМАЦИЯ. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕРМОМЕХАНИКИ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

Ключевым признаком деформации континуума является изменение взаимных расстояний между его точками. В рамках математической модели, как правило, принимается концепция сравнения пространственных положений составляющих континуум точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум.

В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемого в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

Индивидуальные точки континуума в механике континуума представляются специальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, которая, в свою очередь, идентифицируется с помощью координат ξ^α (так называемые материальные координаты). Референциальная координата $\mathbf{X}$ всегда взаимно-однозначно связана с материальной переменной $\boldsymbol{\xi}$, поэтому референциальную переменную $\mathbf{X}$ можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\xi}$. То же самое относится к координатам X^α и ξ^α.

Ясно, что в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением

$$\boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x}, \tag{1}$$

которое в каждый данный момент времени t указывает пространственное положение $\mathbf{x}$ индивидуальной точки континуума $\boldsymbol{\xi}$. В силу сказанного выше отображение (1) может быть заменено

$$\mathbf{X} \to \mathbf{x}. \tag{2}$$

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [3]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{3}$$

положения $\mathbf{X}$ отсчетной (референциальной) конфигурации в соответствующее актуальное место $\mathbf{x}$ пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некомпланарных полярных d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}} = \underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X}, t). \tag{4}$$

Деформация и экстрадеформация в координатах X^α, x^j имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \tag{5}$$

$$\underset{\mathfrak{a}}{d^j} = \underset{\mathfrak{a}}{d^j}(X^\alpha, t). \tag{6}$$

Система трех пространственных полярных d-векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, по существу задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается «нежесткой».

Переменные $\mathbf{X}$ и $\mathbf{x}$ (и позиционные координаты X^α, x^j) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [4, 5]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и пространственная (эйлерова) метрика g_{ij}. Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и в отличие от метрик ${}^\backprime g_{\alpha\beta}$ и g_{ij}, определяется деформацией (3).

Как ясно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Индексы, имеющие начертания $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... , применяются для идентификации d-вектора. Обратным штрихом (backprime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например, в силу принятого выше соглашения о референциальном и актуальном положениях точек континуума должно выполняться равенство

$${}^\backprime\mathbf{x} = \mathbf{X}.$$

В такого рода равенствах латинский индекс у координаты x^j может трансформироваться в греческий. Кроме того, референциальное положение d-векторов часто удобнее вместо $\grave{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^j$ указывать компонентами с греческим индексом

$$\grave{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^{\alpha}, \qquad \grave{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^{j} = \frac{\partial \grave{x}^j}{\partial X^\alpha} \grave{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^{\alpha} \qquad (\mathfrak{a}=1,2,3;\ j,\,\alpha=1,2,3).$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации (градиент места, position gradient) или «дисторсию» [2, 6]

$$\partial_\alpha x^j \qquad (j,\alpha=1,2,3) \tag{7}$$

и соответствующий якобиан

$$J=\det(\partial_\alpha x^j). \tag{8}$$

Дисторсия, как хорошо известно, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Она никогда не вырождается, поэтому якобиан деформации J сохраняет свой знак.

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно формуле

$$g_{\alpha\beta}=g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \tag{9}$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы. Последнее справедливо и для отсчетной метрики $\grave{g}_{\alpha\beta}$, поскольку

$$\grave{g}_{\alpha\beta}=g_{ij}(\partial_\alpha \grave{x}^i)(\partial_\beta \grave{x}^j). \tag{10}$$

Заметим, что лагранжевы переменные X^α ($\alpha=1,2,3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают в развиваемой ниже теории как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j=1,2,3$) представляют собой физические поля. То же самое относится и к «нежесткой» системе d-векторов $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a}=1,2,3$). Но они классифицируются нами как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a}=1,2,3;\ j=1,2,3$). Таким образом, полевыми переменными в данной модели будут выступать

$$x^j \quad (j=1,2,3); \qquad \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^k \quad (k=1,2,3;\ \mathfrak{a}=1,2,3). \tag{11}$$

Как указывалось выше, система трех d-векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в списке функциональных аргументов «естественной» плотности лагранжиана. Более «тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстраполями контравариантных тензоров (d-тензоров) сколь угодно высоких рангов (симметричными по всем индексам):

$$\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots} \qquad (\mathfrak{c}=1,2,3,\,\dots). \tag{12}$$

Экстрадеформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (4), т.е.

$$\underset{\mathfrak{c}}{\mathbf{d}}=\underset{\mathfrak{c}}{\mathbf{d}}(\mathbf{X},t) \qquad (\mathfrak{c}=1,2,3,\,\dots), \tag{13}$$

или в координатном представлении

$$\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}=\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}(X^\alpha,t) \qquad (\mathfrak{c}=1,2,3,\,\dots). \tag{14}$$

Поведение репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ ($\mathfrak{a}=1,2,3$) характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинениями его ребер), так и поворотом, поэтому становится ясно, что каждый элемент континуума с микроструктурой обладает большим числом степеней свободы, чем классический континуум, деформация которого сводится лишь к трансформации позиционных координат (3). С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные (экстра) инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3)$ может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае [7] помимо трех трансляционных степеней свободы микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы.

Полевые переменные (11) в любой термомеханической модели должны дополняться термическими переменными. В дальнейшем будет развиваться термомеханика с единственной термической переменной. В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение ϑ, которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ:

$$\vartheta = \int \theta dt. \tag{15}$$

Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики континуума.

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Помимо переменных x^j и ϑ и их скоростей $\partial_4 x^j = \dot{x}^j$, $\partial_4 \vartheta = \dot{\vartheta}$, к ним относятся:

– градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ $(j, \alpha = 1, 2, 3)$;

– d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$;

– d-тензоры $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3)$;

– референциальные градиенты d-векторов $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ $(\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3)$;

– референциальные градиенты d-тензоров $\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ $(\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3)$;

– референциальный градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

В основе классической теории поля (см., например, монографии [8, 9]) лежит положение о том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом $\mathfrak{I}$, который по историческим причинам называется действием (action):

$$\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4 X. \tag{16}$$

Здесь характерная для теории поля символика имеет следующий смысл:

$\mathscr{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);

φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных;

X^β $(\beta = 1, 2, 3, 4)$ — четыре пространственно-временные координаты;

d^4X — «естественный» элемент объема четырехмерного пространства—времени.

Символ d^4X в (16) указывает на «естественный» пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \tag{17}$$

Через ∂_β в (16) и далее обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\mathrm{expl}} + \sum_{s \geqslant 0} \left(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l \right) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \tag{18}$$

где символом $\partial_\beta^{\mathrm{expl}}$ указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β.

Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера называется вариационным принципом Гамильтона—Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве—времени таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля:

$$\delta\mathfrak{I} = 0. \tag{19}$$

Из принципа наименьшего действия получаются ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) = 0, \tag{20}$$

где

$$\mathscr{E}_k(\mathscr{L}) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma\partial_\beta \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \cdots \tag{21}$$

есть один из важнейших дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Каждая теория поля подразумевает задание плотности действия (плотности Лагранжиана). Для связанного термомеханического поля в терминах референциальных переменных X^α $(\alpha = 1,2,3)$, эйлеровых переменных x^j $(j = 1,2,3)$, экстраполевых d-переменных и температурного смещения ϑ «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии принимается в следующей форме:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1j_2\cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}, \partial_\alpha\vartheta). \tag{22}$$

Данная выше форма термомеханического лагранжиана $\mathscr{L}$ по необходимости является весьма общей. Более специальная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и плотности свободной энергии Гельмгольца:

$$\begin{gathered}\mathscr{L} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{kj}\dot{x}^k\dot{x}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} g_{ij} \overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}} \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^i \underset{\mathfrak{b}}{\dot{d}}^j + \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}} \sum_{\kappa} g_{j_1k_1} g_{j_2k_2} \cdots \underset{\kappa}{\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{I}}} \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1j_2\cdots} \underset{\mathfrak{d}}{\dot{d}}^{k_1k_2\cdots} \cdots - \\ -\psi(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}, \partial_\alpha\vartheta).\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь точкой в верхней позиции обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α, которое мы будем обозначать также с помощью оператора ∂_4; ρ_{R} — референциальная плотность; $\overset{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{I}}$, $\underset{\kappa}{\overset{\mathfrak{cd}}{\mathfrak{I}}}$ — тензоры инерции микроэлемента. Первые три слагаемых в (23) составляют кинетическую часть плотности действия.

Вариационный интеграл термомеханического действия в силу указанной формулой (22) плотности действия будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathfrak{I} = \int \mathscr{L}(X^\beta, x^j, \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}, \vartheta, \dot{x}^j, \underset{\mathfrak{a}}{\dot{d}}^j, \underset{\mathfrak{c}}{\dot{d}}^{j_1j_2\cdots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}^j, \partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1j_2\cdots}, \partial_\alpha\vartheta) d^4X, \\ (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots;\ \alpha,\ \beta = 1,2,3;\ j, j_1, j_2, \cdots = 1,2,3).\end{gathered} \tag{24}$$

Вариационный интеграл (24) приводит к уравнениям поля, которые естественным образом распадаются на следующие четыре группы:

$$\begin{gathered}\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\ \partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\ \partial_\alpha \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot\cdots}_{\cdot j_1j_2\cdots} + \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1j_2\cdots} - \partial_4 \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1j_2\cdots} = 0 \qquad (\mathfrak{c} = 1,2,3,\ \ldots;\ \alpha = 1,2,3;\ j_1, j_2, \cdots = 1,2,3), \\ \partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3).\end{gathered} \tag{25}$$

Здесь введены обозначения для полевых частных производных, которые необходимы для записи дифференциального оператора Эйлера и дифференциальных уравнений поля:

$$
\begin{gathered}
P_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^j}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{a}}{d}}{}^j}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\underset{\mathfrak{c}}{d}}{}^{j_1 j_2 \cdots}}, \\
S^{\alpha \cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \quad \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha \cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha \cdot \cdot \cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots})}, \\
\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j}, \quad \overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}}, \qquad s = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha \vartheta)}.
\end{gathered} \tag{26}
$$

В приведенных выше уравнениях (26) приняты следующие обозначения:

P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;

$\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{Q}}_{j_1 j_2 \cdots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы;

$S^{\alpha \cdot}_{\cdot j}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа;

$\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha \cdot}_{\cdot j}$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha \cdot \cdot \cdots}_{\cdot j_1 j_2 \cdots}$ — «первые» тензоры экстранапряжений;

$\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j$, $\overset{\mathfrak{c}}{\mathscr{A}}_{j_1 j_2 \cdots}$ — обобщенные силы, сопряженные экстраполевым переменным $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^{j_1 j_2 \cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \ldots$; $j_1, j_2, \cdots = 1, 2, 3$);

s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);

j^α_{R} — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Заметим, что (26) по существу представляют собой определяющие уравнения для рассматриваемого континуума. Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что *определяющие* уравнения получаются просто как система обозначений для полевых частных производных, необходимая для записи дифференциальных уравнений поля.

Рассмотрим важный и сравнительно простой случай, когда параметрами микрострукутры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), не подчиняющиеся никаким дополнительным ограничениям. В этом случае система дифференциальных уравнений поля (25) будет иметь следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha \cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha \cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{gathered} \tag{27}
$$

Уравнения поля (27) несколько упрощаются, если считать, что лагранжиан $\mathscr{L}$ обладает свойством трансляционной инвариантности относительно произвольных сдвигов эйлеровых переменных x^j и температурного смещения ϑ. В этом случае явная зависимость лагранжиана от переменных x^j и ϑ исключается и вместо (27) приходим к системе уравнений поля:

$$
\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha \cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha \cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{gathered} \tag{28}
$$

3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ МИКРОСТРУКТУРНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Как уже упоминалось, с формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу простейших основных задач вариационного исчисления о поиске безусловного экстремума интегрального функционала. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в аналитической механике и термомеханике символ вариации δ согласно исторически сложившейся традиции обозначает *виртуальную вариацию*, т.е. непроизвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния механической или термомеханической системы. Виртуальные вариации определяющих состояние континуума переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае, принцип наименьшего действия следует отнести к классу так называемых *связанных* задач вариационного исчисления (см., например, [1]). Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных либо дифференциальных уравнений и неравенств.

Связанные задачи вариационного исчисления весьма часто встречаются в механике. Их решение чаще всего опирается на правило множителей Лагранжа (см., например, [1, 2]).

Мы будем рассматривать только двусторонние связи, которые могут быть заданы либо конечными уравнениями (голономные связи), либо уравнениями, которые содержат явные вхождения первых производных от полевых переменных (дифференциальные неголономные связи). Ограничимся пока только связями между экстраполевыми d-переменными и, возможно, эйлеровыми координатами x^j.

В наиболее общей форме голономные связи между микроструктурными d-переменными $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются конечными уравнениями:

$$\underset{\mathfrak{h}}{\mathscr{F}}(x^j, \underset{1}{d}^j, \underset{2}{d}^j, \underset{3}{d}^j, \underset{1}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \underset{2}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \dots) = 0. \tag{29}$$

Число таких уравнений должно быть меньше, чем число независимых контравариантных полевых d-переменных и эйлеровых координат x^j:

$$x^j, \qquad \underset{\mathfrak{a}}{d}^j \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \qquad \underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots} \quad (\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots;\ j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3).$$

Далее рассмотрим вывод дифференциальных уравнений поля в том случае, когда d-векторы подчинены конечным (голономным) ограничениям:

$$\underset{\mathfrak{h}}{\mathscr{F}}(x^j, \underset{1}{d}^j, \underset{2}{d}^j, \underset{3}{d}^j) = 0. \tag{30}$$

Воспользуемся правилом множителей Лагранжа. С этой целью введем множители Лагранжа $\overset{\mathfrak{h}}{\lambda}$ и новый лагранжиан $\mathscr{L}^\star$ согласно

$$\mathscr{L}^\star = \mathscr{L} - \overset{\mathfrak{h}}{\lambda} \underset{\mathfrak{h}}{\mathscr{F}}. \tag{31}$$

Заметим, что множители Лагранжа $\overset{\mathfrak{h}}{\lambda}$ представляют собой функции только пространственно-временных координат X^α.

В уравнениях поля (27) лагранжиан $\mathscr{L}$ подлежит замене на новый лагранжиан $\mathscr{L}^\star$. Выполняя замену, в результате приходим к уравнениям поля:

$$\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} + \overset{\mathfrak{h}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^j} \underset{\mathfrak{h}}{\mathscr{F}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = \overset{\mathfrak{h}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} \underset{\mathfrak{h}}{\mathscr{F}} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \\
\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{gathered} \tag{32}$$

Дифференциальные связи между микроструктурными d-переменными $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$ ($\mathfrak{a} = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\underset{\mathfrak{c}}{d}^{j_1 j_2 \cdots}$ ($\mathfrak{c} = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются неинтегрируемыми уравнениями следующего вида:

$$\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}}(x^j, \underset{1}{d}^j, \underset{2}{d}^j, \underset{3}{d}^j, \underset{1}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \underset{2}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \dots, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha \underset{1}{d}^j, \partial_\beta \underset{2}{d}^j, \partial_\gamma \underset{3}{d}^j, \partial_\alpha \underset{1}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \partial_\beta \underset{2}{d}^{j_1 j_2 \cdots}, \dots) = 0. \tag{33}$$

Дифференциальные связи также могут быть учтены в уравнениях поля с помощью правила множителей. Вводя множители Лагранжа $\overset{\mathfrak{n}}{\lambda}$ и новый лагранжиан $\mathscr{L}^{\star}$ согласно

$$\mathscr{L}^{\star\star} = \mathscr{L} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}}, \tag{34}$$

заменим в уравнениях поля (27) лагранжиан $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}^{\star}$; в итоге после ряда преобразований можно получить следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -(\partial_4 \overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \\
-(\partial_\alpha \overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha x^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_\alpha\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha x^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} + \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = -(\partial_4 \overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial(\partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_4\frac{\partial}{\partial(\partial_4 \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \\
-(\partial_\alpha \overset{\mathfrak{n}}{\lambda})\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} - \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\partial_\alpha\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j)}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} + \overset{\mathfrak{n}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j}\underset{\mathfrak{n}}{\mathscr{F}} \qquad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3), \\
\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3).
\end{gathered} \tag{35}$$

Полученные уравнения принципиально отличаются от (32), поскольку множители Лагранжа входят в них также в форме частных производных первого порядка.

Оставшуюся часть работы посвятим уравнениям поля для жесткого репера d-векторов. В случае простейшей голономной связи, когда трансформация репера $\underset{\mathfrak{a}}{\mathbf{d}}$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3)$ сводится только к его «жестким» поворотам в пространстве, имеем следующие конечные ограничения:

$$g_{ij}\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^i \underset{\mathfrak{b}}{d}{}^j = \underset{\mathfrak{ab}}{\delta} \qquad (\mathfrak{a},\, \mathfrak{b} = 1,2,3), \tag{36}$$

где g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, $\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}$ — символ Кронекера.

В том важном и сравнительно простом случае, когда параметрами микрострукутры являются только d-векторы $\underset{\mathfrak{a}}{d}{}^j$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$, а кинематические связи задаются уравнениями (36), система дифференциальных уравнений поля (27) подлежит некоторой модификации, поскольку согласно правилу множителей лагранжиан $\mathscr{L}$ подлежит замене на новый лагранжиан $\mathscr{L}^{\star}$:

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}^{\star} = \mathscr{L} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}\left(g_{kl}\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^k \underset{\mathfrak{b}}{d}{}^l - \underset{\mathfrak{cb}}{\delta}\right) \qquad (\mathfrak{c},\, \mathfrak{b} = 1,2,3).$$

Здесь $\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}$ — множители Лагранжа, которые представляют собой функции пространственно-временных координат. Их можно считать симметричными при перестановке индексов:

$$\overset{\mathfrak{bc}}{\lambda} = \overset{\mathfrak{cb}}{\lambda} \qquad (\mathfrak{c},\, \mathfrak{b} = 1,2,3).$$

Вычислим сначала требуемые для модификации уравнений поля (27) полевые производные.

Прежде всего нас интересует производная лагранжиана $\mathscr{L}^{\star}$ по полевой переменной x^j:

$$\frac{\partial \mathscr{L}^{\star}}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^k \underset{\mathfrak{b}}{d}{}^l.$$

Полученное выражение преобразуем, принимая во внимание (Γ^s_{kj} — символы Кристоффеля второго рода пространственной метрики)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{kj}g_{sl} + \Gamma^s_{lj}g_{ks},$$

а также симметрию множителей $\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}$. В итоге приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathscr{L}^{\star}}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} - \overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}\Gamma^s_{kj}\underset{\mathfrak{c}}{d}{}^k \underset{\mathfrak{b}}{d}{}_s.$$

Интерес представляет также производная лагранжиана $\mathscr{L}^\star$ по экстраполевой переменной $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$:

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}(g_{kl}\delta^k_j \underset{\mathfrak{b}}{d}^l \underset{\mathfrak{ac}}{\delta} + g_{kl}\delta^l_j \underset{\mathfrak{c}}{d}^k \underset{\mathfrak{ab}}{\delta}).$$

Привлекая затем соглашение о симметрии множителей $\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}$, получаем

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} - \frac{1}{2}\overset{\mathfrak{cb}}{\lambda}(g_{jl} \underset{\mathfrak{b}}{d}^l \underset{\mathfrak{ac}}{\delta} + g_{jk} \underset{\mathfrak{c}}{d}^k \underset{\mathfrak{ab}}{\delta})$$

и

$$\frac{\partial \mathscr{L}^\star}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} - \overset{\mathfrak{ab}}{\lambda} \underset{\mathfrak{b}}{d}_j.$$

В результате вместо (27) дифференциальные уравнения поля получаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}
\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{kj}\overset{\mathfrak{bc}}{\lambda}\underset{\mathfrak{b}}{d}_s \underset{\mathfrak{c}}{d}^k \qquad (\alpha = 1,2,3;\ j,s,k = 1,2,3),\\
\partial_\alpha \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{M}}{}^{\alpha\cdot}_{\cdot j} + \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}{}^\star_j - \partial_4 \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{Q}}_j = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1,2,3;\ \alpha = 1,2,3;\ j = 1,2,3),\\
\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \dot{s} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta} \qquad (\alpha = 1,2,3),
\end{gathered} \tag{37}$$

где

$$\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}{}^\star_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\mathfrak{a}}{d}^j} - \overset{\mathfrak{ab}}{\lambda} \underset{\mathfrak{b}}{d}_j.$$

Сворачивая левую и правую части последнего равенства с вектором $\underset{\mathfrak{a}}{d}^j$, на основании уравнений связей

$$g_{kl}\underset{\mathfrak{c}}{d}^k \underset{\mathfrak{b}}{d}^l - \underset{\mathfrak{cb}}{\delta} = 0$$

находим

$$(\overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}{}^\star_j - \overset{\mathfrak{a}}{\mathscr{A}}_j)\underset{\mathfrak{a}}{d}^j = -\overset{\mathfrak{ab}}{\lambda}\underset{\mathfrak{ab}}{\delta}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Библиографический список

1. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М. : Наука, 1983. 448 с.
3. *Toupin R. A.* Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.
4. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошных сред. М. : Физматгиз, 1962. 284 с.
5. *Ильюшин А. А.* Механика сплошных сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
6. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М. : Мир, 1965. 456 с.
7. *Cosserat E. et F.* Théorie des corps déformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
8. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
9. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

Micropolar Thermoelastic Continuum Models with Constrained Microstructural Parameters

V. A. Kovalev[1], Yu. N. Radayev[2]

[1]Kovalev Vladimir Aleksandrovich, Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka st., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com

[2]Radayev Yuri Nikolaevich, Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

A new micropolar thermoelastic continuum model forrmulated by microstructural d-vectors and d-tensors of an arbitrary ranks is proposed. The microstructural vectorial and tensorial extra-field variables are restricted by holonomic or non-holonomic (differential) constraints. The study is carried out in the framework of the Lagrange field formalism as a 4covariant field theory. Taking into consideration of holonomic or differential constraints involving microstructural parameters implies problem formulation as a problem of calculus of variations with constraints, namely as the variational Lagrange problem. The Lagrange multipliers technique is employed for derivation of field equations when microstructural parameters are restricted by the two types of constraints. Micropolar thermoelastic continuum model for the case of rigid rotations of the micropolar trihedron is considered as an example.

Key words: thermoelasticity, microstructure, micropolar continuum, field, action, d-tensor, constraint, Lagrange multiplier.

The present work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00139 "Hyperbolic thermal waves in solids with microstructure").

References

1. Gunter N. M. *Kurs variatsionnogo ischisleniia* [A Cours of the Calculus of Variations]. Moscow, Leningrad, Gostekhteoretizdat, 1941, 308 p. (in Russian).
2. Berdichevskii V. L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational Principles of Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983, 448 p. (in Russian).
3. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 17, no. 5, pp. 85–112.
4. Sedov L. I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred* [An Introduction to Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 284 p. (in Russian).
5. Illyushin A. A. *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum Mechanics]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978, 287 p. (in Russian).
6. Green A., Adkins G. *Bol'shie uprugie deformatsii i nelineinaia mekhanika sploshnoi sredy* [Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir, 1965, 456 p. (in Russian).
7. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 p.
8. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia : variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of the Field Theory : Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
9. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, 328 p. (in Russian).