Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова, О решениях дифференциальной системы с неустойчивым линейным приближением Коппеля–Конти, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 1, 61–72

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 1, с. 61–72

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.936

# О РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕУСТОЙЧИВЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ КОППЕЛЯ–КОНТИ

© 2005 г. Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова

Рассматриваем системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{$1_A$}$$

линейного приближения с кусочно-непрерывными, вообще говоря, неограниченными на полуоси $[0, +\infty)$ (и ограниченными на всяком конечном промежутке $[0, t_0]$) коэффициентами и матрицами Коши $X_A(t, \tau)$. Как и ранее, будем отождествлять систему $(1_A)$ с ее матрицей коэффициентов и записывать принадлежность системы $(1_A)$ некоторому множеству систем $M$ включением $A \in M$.

**Определение 1** [1, с. 131; 2–4]. Будем говорить, что система $(1_A)$ принадлежит множеству $L^pN$ с числом $p \in (0, +\infty)$, и обозначать это включением $A \in L^pN$, если для матрицы Коши $X_A(t, \tau)$ этой системы выполнено условие

$$\int\limits_t^{+\infty} \|X_A(t, \tau)\|^p d\tau \leq C_p(A) = \text{const} < +\infty, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

**Замечание 1.** В предыдущих наших работах это множество $L^pN$ обозначалось через $M^pS$ по аналогии со множеством Коппеля–Конти [1, с. 131; 2; 4–6] $L^pS$ линейных систем, матрицы Коши которых удовлетворяют неравенству

$$\int\limits_0^t \|X_A(t, \tau)\|^p \leq d_p(A) = \text{const} < +\infty, \quad t \geq 0.$$

Новое обозначение $L^pN$ представляется нам более предпочтительным и несет следующую смысловую нагрузку: $L^p$ – линейность системы и суммируемость ее матрицы Коши со степенью $p > 0$, $N$ – неустойчивость системы.

Роль множеств $L^pN$ при $p \geq 1$ в задаче об ограниченности решений линейной неоднородной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t), \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

устанавливает следующая

**Теорема Коппеля–Конти** ($p = 1$ см. в [1, с. 131–134; $p > 1$ см. в [2]). *Для любой вектор-функции $f \in L_q(R_+)$, $1 < q \leq +\infty$ $(L_\infty(R_+) \equiv C(R_+))$, тогда и только тогда существует и притом единственное ограниченное на полуоси $R_+ \equiv [0, +\infty)$ решение системы (3), когда $A \in L^pN$ с числом $p$, сопряженным с $q$.*

Ранее мы установили [3, см. также 4], что множество $L^pN$ открыто во всем множестве линейных систем $(1_A)$ тогда и только тогда, когда $p \geq 1$. Тем самым, в частности, для всякой системы $A \in L^pN$ при $p \geq 1$ существует такое $\varepsilon(A) > 0$, что и система $A + Q$ с любой кусочно-непрерывной матрицей $Q$, удовлетворяющей условию $\|Q(t)\| < \varepsilon(A)$, $t \geq 0$, также принадлежит множеству $L^pN$. Это означает, что всякая линейная система, достаточно близкая к системе $A \in L^pN$ при $p \geq 1$, наследует все свойства решений системы $(1_A)$.

Хорошо известно [1, с. 74], что всякое нетривиальное решение системы $A \in L^pN$ с параметром $p \in (0, +\infty)$ является неограниченным на полуоси $[0, +\infty)$. Возникает вопрос, в каком виде это свойство решений исходной системы $(1_A)$ наследуют решения возмущенной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

с достаточно малыми в том или ином смысле нелинейными возмущениями, в частности, возмущениями $f$ высшего порядка малости, которые и будут рассматриваться в настоящей работе.

Через $F_m$, $m > 1$, будем обозначать множество кусочно-непрерывных по $t \geq 0$ и непрерывных по $y \in U_{\rho(f)} \equiv \{x \in R^n : \|x\| < \rho(f)\} \subset R^n$ $n$-мерных вектор-функций $f : [0, +\infty) \times \times U_{\rho(f)} \to R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad \forall (t, y) \in [0, +\infty) \times U_{\rho(f)}, \quad C_f = \text{const} > 0, \quad m > 1. \tag{5}$$

Всякую такую вектор-функцию $f$ будем называть, следуя [7], $m$-возмущением.

**Определение 2.** Введем в рассмотрение множество $L^p N_1$, $p > 0$, всех тех линейных систем $(1_{\mathrm{A}})$ из $L^p N$, для каждой из которых и всякого кусочно-непрерывного по $t \in [0, +\infty)$ и непрерывного по $y \in U_{\rho(f)}$ $m$-возмущения $f : [0, +\infty) \times U_{\rho(f)} \to R^n$, $f \in F_m$, $m > 1$, существует такая окрестность $U_{\varepsilon(A,f)} \subset U_{\rho(f)}$ начала координат радиуса $\varepsilon(A, f) > 0$, что любое нетривиальное решение возмущенной системы (4) с этим $m$-возмущением, принадлежащее окрестности $U_{\varepsilon(A,f)}$ в начальный момент времени $t = 0$, за конечное время выходит на границу $\partial U_{\varepsilon(A,f)}$ этой окрестности.

Описанию этого множества, важного в исследовании по линейному приближению неустойчивости дифференциальных систем с возмущениями высшего порядка малости, посвящена следующая

**Теорема.** $L^p N_1 = L^p N \Leftrightarrow p \geq 1$.

**Доказательство. Достаточность:** $p \geq 1 \Rightarrow L^p N_1 = L^p N$. Покажем, что всякая система $A \in L^p N$ принадлежит множеству $L^p N_1$. Возьмем произвольное $m$-возмущение $f \in F_m$ и предположим противное: у системы (4) с этими $A$ и $f$ для всякого $\varepsilon > 0$ на бесконечном промежутке $[0, +\infty)$ существует решение $y_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условию $\|y_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Считая $X_A(0) = E$, представим это решение по формуле Коши

$$y_\varepsilon(t) = X_A(t) \left[ y_\varepsilon(0) + \int\limits_0^t X_A^{-1}(\tau) f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau \right], \quad t \in [0, +\infty). \tag{6}$$

В силу установленной в [3] сужаемости множества $L^p N$ с возрастанием $p > 0$ справедливо включение $A \in L^1 N$. Для $m$-возмущения $f$ выполнено условие (5). Поэтому вектор-функция $f[\tau, y_\varepsilon(\tau)]$ на полуоси $[0, +\infty)$ и для $\varepsilon \in (0, \rho(f))$ является ограниченной:

$$\|f[\tau, y_\varepsilon(\tau)]\| \leq C_f \|y_\varepsilon(\tau)\|^m < C_f \varepsilon^m, \quad \tau \in [0, +\infty).$$

Тем самым из условия (2) при $p = 1$ и $t = 0$ следует сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} X_A^{-1}(\tau) \times \times f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau$. Это позволяет на основании равенства (6) получить для решения $y_\varepsilon(t)$ представление

$$y_\varepsilon(t) = X_A(t) \left[ C_0 - \int\limits_t^{+\infty} X_A^{-1}(\tau) f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau \right] =$$

$$= X_A(t) C_0 - \int\limits_t^{+\infty} X_A(t, \tau) f[\tau, y_\varepsilon(\tau)] d\tau \equiv X_A(t) C_0 + z(t), \quad t \in [0, +\infty), \tag{7}$$

с ограниченной на полуоси $[0, +\infty)$ функцией $z(t)$. В случае 1) $C_0 \neq 0$ вектор-функция $X_A(t) C_0$ как решение системы $(1_A)$ с $A \in L^1 N$ является неограниченной. Поэтому из представления (7) получаем также и неограниченность вектор-функции $y_\varepsilon(t)$, что вступает в противоречие с неравенством $\|y_\varepsilon(\tau)\| < \varepsilon$, $t \in [0, +\infty)$.

В случае 2) $C_0 = 0$ имеем равенство $y_\varepsilon(t) = z(t)$ и два возможных подслучая: $2_1$) $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \|y_\varepsilon(t)\| \equiv \varepsilon_0 = 0$; $2_2$) $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$.

В первом подслучае $2_1$), очевидно, существует такой момент $t_0 \in (0, +\infty)$, для которого выполнены неравенства $0 \neq \|y_\varepsilon(t_0)\| \geq \|y_\varepsilon(t)\|$ для всех $t \geq t_0$. Тогда из равенства $y_\varepsilon(t) = z(t)$ и оценок (2) и (5) имеем противоречивые неравенства

$$0 \neq \|y_\varepsilon(t_0)\| \leq \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|X(t_0,\tau)\| C_f \|y_\varepsilon(\tau)\|^m dc \leq C_f C_1 \varepsilon^{m-1} \|y_\varepsilon(t_0)\| < \|y_\varepsilon(t_0)\|/2 \tag{8}$$

для всех $\varepsilon$, удовлетворяющих условию $0 < C_f C_1 \varepsilon^{m-1} < 2^{-1}$.

**Замечание 2.** Для начала координат $O \in U_{\rho(f)}$ и всякой отличной от него точки $y \in U_{\rho(f)}$ для $m$-возмущения $f$ в силу (5) выполнено условие Липшица

$$\|f(t,y) - f(t,0)\| = \|f(t,y)\| \leq C_f [\rho(f)]^{m-1} \|y - 0\|, \quad t \geq 0.$$

Поэтому нулевое решение $y = 0$ системы (4) обладает свойством единственности, хотя другие ее решения этим свойством могут и не обладать (см. [8]). Тем самым для решения $y_\varepsilon(t)$ с начальным значением $y_\varepsilon(0) \neq 0$ неравенство $\|y_\varepsilon(t)\| > 0$ выполнено в любой момент $t \geq 0$.

Во втором подслучае $2_2$) найдется такой, вообще говоря, достаточно большой момент $t = t_0 > 0$, что будет выполнено неравенство $0 \neq 2\|y_\varepsilon(t_0)\| \geq \|y_\varepsilon(t)\|$ для всех $t > t_0$. Оно, как и в (8), позволяет получить следующие противоречивые неравенства:

$$0 \neq \|y_\varepsilon(t_0)\| \leq C_f C_1 \cdot 2^m \varepsilon^{m-1} \|y_\varepsilon(t_0)\| < \|y_\varepsilon(t_0)\|/2$$

для всех удовлетворяющих условию $0 < C_f C_1 \varepsilon^{m-1} < 2^{-1-m}$ чисел $\varepsilon$.

Таким образом, наше предположение о существовании у системы (4) на промежутке $[0, +\infty)$ для всякого $\varepsilon > 0$ нетривиального решения $y_\varepsilon(t)$ (с начальным значением $y_\varepsilon(0) \neq 0$), удовлетворяющего на этом промежутке оценке $\|y_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$, неверно. Достаточность теоремы доказана.

Доказательство необходимости $L^p N_1 = L^p N \Rightarrow p \geq 1$ содержит

**Лемма.** *Для любых чисел $p \in (0,1)$ и $m \in (1, +\infty)$ существует двумерная система $A_p = A \in L^p N$ с кусочно-непрерывными на полуоси $[0, +\infty)$ коэффициентами и такое кусочно-непрерывное по $t$ и бесконечно-дифференцируемое по переменным $y_1$ и $y_2$ в области $(0, +\infty) \times R^2$ (с ограниченными на множестве $[0, t_0] \times R^2$ с любым $t_0 \in (0, +\infty)$ частными производными любого конечного порядка) $m$-возмущение $f_{pm} = f : [0, +\infty) \times R^2 \to R^2$, что двумерная система*

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

*имеет счетное число бесконечно продолжимых вправо решений $y^{(n)}(t)$, $n \in N$, убывающих при $t \to +\infty$ быстрее всякой отрицательной экспоненты (с равными $-\infty$ характеристическими показателями Ляпунова) и равномерно на полуоси $[0, +\infty)$ сходящихся к ее нулевому решению $y = 0$ ($y^{(n)}(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$, $t \in [0, +\infty)$).*

**Доказательство леммы. 1. Построение линейной системы.** Необходимую двумерную линейную систему $(1_A)$ будем строить в диагональном виде

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[a_1(t), a_2(t)]x \equiv D(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geq 0. \tag{$1_D$}$$

Ее коэффициенты определим равенствами: $a_1(t) = a_2(t) = 0$ при $t \in [0, 2)$,

$$a_1(t) = \begin{cases} 1 + (-1)^i p^{-1} \psi_k \ln \psi_k \equiv \alpha_i(k), & t \in [1 + k - (4-i)\psi_k^{-1}, 1 + k - (3-i)\psi_k^{-1}) \equiv \\ & \equiv [\tau_i(k), \tau_{i+1}(k)), \quad i = 1,2, \quad 2 \leq k \in N, \\ 1 & \text{для остальных} \quad t \geq 2, \end{cases}$$

$$a_2(t) = 1 \quad \text{для} \quad t \in [2, 2 + \psi_2^{-1}), \quad a_2(t) = a_1(t - \psi_k^{-1}) \quad \text{для} \quad t \in [k, k+1), \quad k \geq 2,$$

в которых $\psi_k \equiv \exp[k^2/(1-p)]$.

Докажем включение $D \in L^pN,\ p \in (0,1)$. Из представления

$$X_D(t,\tau) = \operatorname{diag}\left[\exp\int\limits_\tau^t a_1(\xi)d\xi, \exp\int\limits_\tau^t a_2(\xi)d\xi\right]$$

матрицы Коши $X_D(t,\tau)$ диагональной системы $(1_D)$ имеем равенство

$$\|X_D(t,\tau)\| = \max_i \exp\int\limits_\tau^t a_i(\xi)d\xi \tag{10}$$

при всяких фиксированных $t$ и $\tau$. Для фиксированного $t \in [0,+\infty)$ через $T_i(t),\ i=1,2$, обозначим принадлежащее промежутку $[t,+\infty)$ множество тех $\tau$ (больших или равных $t$), для которых реализуется равенство (10). Тогда для интеграла

$$J_D(t,+\infty) \equiv \int\limits_t^{+\infty} \|X_D(t,\tau)\|^p d\tau, \quad t \in [0,+\infty), \quad p > 0,$$

имеем соотношения

$$J_D(t,+\infty) = \sum_{i=1}^2 \int\limits_{T_i(t)} \exp\int\limits_\tau^t pa_i(\xi)d\xi\, d\tau < \sum_{i=1}^2 \int\limits_t^{+\infty} \exp\int\limits_\tau^t pa_i(\xi)d\xi\, d\tau. \tag{11}$$

Поэтому для доказательства необходимого включения достаточно доказать включения $a_i \in L^pN,\ i=1,2$, т.е. установить ограниченность интегралов

$$J_{a_i}(t,\theta) \equiv \int\limits_t^\theta \exp\int\limits_\tau^t pa_i(\xi)d\xi\, d\tau, \quad 0 \le t \le \theta < +\infty, \quad i=1,2.$$

Докажем вначале неравенства

$$J_{a_i}(t,\theta) \le e, \quad 2 \le \tau_0(k) \equiv k \le t \le \theta < k+1, \quad i=1,2. \tag{12}$$

Если $\theta \le \tau_1(k)$, то очевидны неравенства $J_{a_i}(t,\theta) < 1,\ i=1,2$. Рассмотрим случай $\theta \in [\tau_1(k), k+1]$. Если при этом $t \ge \tau_2(k)$, то справедливы неравенство $a_1(\tau) \ge 1$ при $\tau \in [t,\theta]$ и оценка $J_{a_1}(t,\theta) < 1$. Если же $t \in [\tau_1(k),\tau_2(k))$, то имеем оценки

$$J_{a_1}(t,\theta) \le J_{a_1}(\tau_1,\theta) \le J_{a_1}(\tau_1,k+1) = J_{a_1}(\tau_1,\tau_2) + \int\limits_{\tau_2}^{k+1} \exp\int\limits_\tau^{\tau_1} pa_1(\xi)d\xi\, d\tau \le$$

$$\le \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \exp\int\limits_{\tau_2}^{\tau_1} [p - \psi_k \ln\psi_k]d\xi\, d\tau + \exp\left(-p\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} a_1(\xi)d\xi\right) \int\limits_{\tau_2}^{k+1} \exp\left(-\int\limits_{\tau_2}^{\tau} pa_1(\xi)d\xi\right)d\tau \le$$

$$\le 1 + \psi_k\left[\int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} \exp\left(-\int\limits_{\tau_2}^{\tau} pa_1(\xi)d\xi\right)d\tau + \int\limits_{\tau_3}^{k+1} \exp\left(-\int\limits_{\tau_2}^{\tau} pa_1(\xi)d\xi\right)d\tau\right] \le$$

$$\le 1 + \psi(k)\left[\tau_3 - \tau_2 + \exp\left(-\int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} pa_1(\xi)d\xi\right) \cdot \int\limits_{\tau_3}^{k+1} \exp\left(-\int\limits_{\tau_3}^{\tau} pa_1(\xi)d\xi\right)d\tau\right] \le$$

$$\leq 2 + \int\limits_{\tau_3}^{k+1} e^{-p(\tau-\tau_3)}d\tau < 2 + \psi_k^{-1} < e, \quad \tau_i = \tau_i(k), \quad k \geq 2.$$

Оценка (12) при $i = 1$ доказана. Аналогично устанавливается справедливость этой оценки и в случае $i = 2$. Неравенство (11) доказано.

По определению функций $a_i(t)$ справедливы соотношения

$$p\int\limits_{k}^{k+1} a_i(\xi)d\xi = p, \quad -p\int\limits_{t}^{k+1} a_i(\xi)d\xi \leq p(t-k-1), \quad t \in [k, k+1], \quad k \geq 2.$$

Поэтому имеют место неравенства

$$J_{a_i}(t,l) = J_{a_i}(t,k+1) + \sum_{q=k+1}^{l-1} \exp\int\limits_{q}^{t} pa_i(\xi)d\xi \cdot J_{a_i}(q,q+1) \leq$$

$$\leq e + e^{p(t-k-1)}\sum_{q=k+1}^{l-1} e^{k+1-q}J_{a_i}(q,q+1) \leq e\left(1 + \sum_{q=0}^{\infty} e^{-q}\right) =$$

$$= e(2e-1)/(e-1) < 2e^2, \quad \forall t \in [k, k+1), \quad \forall l > 1+k, \quad k \geq 2, \quad i = 1, 2,$$

из которых вытекают оценки $J_{a_i}(t, +\infty) \leq e^3$, $t \geq 0$.

Таким образом, доказаны включения $a_i \in L^pN$, $p \in (0,1)$, $i = 1, 2$, а тем самым в силу неравенства (11) и включение $D \in L^pN$.

**2. Построение возмущенной системы и ее базового решения.** Это возмущение $f(t,y)$ будем строить так, чтобы область $[0,+\infty) \times R^2$ допускала разбиение на счетное число подобластей, в каждой из которых возмущенная система (9) была бы треугольной (в частности, диагональной и совпадающей с исходной линейной системой $(1_D)$ ), а в целом во всей этой области – как нижне-, так и верхне-треугольной системой. Одна из возникающих здесь трудностей – обеспечение единой для всех рассматриваемых подобластей постоянной $C_f > 0$, осуществляющей оценку (5) во всей области $[0,+\infty) \times R^2$.

Сначала на произвольном промежутке $[k, k+1)$, $k \geq 2$, построим вспомогательную систему

$$\dot{y} = \mathrm{diag}[a_1(t), a_2(t)]y + g^{(k)}(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \in [k, k+1), \tag{13}$$

с допустимым $m$-возмущением $g^{(k)} : [k, k+1] \times R^2 \to R^2$, имеющую удовлетворяющее краевому условию

$$y(k) = ((\ln\psi_k \cdot \psi_k^{(p-1)/p})^{1/(m^2-1)}, 0) \equiv (\varphi_k, 0) \in R_+^2, \quad y(k+1) = (\varphi_{k+1}, 0) \tag{14}$$

решение $y(t)$. При этом для монотонно убывающих величин $\varphi_k$ выполнены оценки

$$0 < \varphi_{k+1}/\varphi_k < \begin{cases} \exp(-4m^{-2}) < 1, & k \geq 2, \\ \exp\dfrac{2k}{p(1-m^2)} \underset{k\to\infty}{\to} 0, & k \geq 2. \end{cases} \tag{$14_1$}$$

Затем, распространив это построение на все промежутки $[k, k+1] \subset [2, +\infty)$, получим вспомогательную систему

$$\dot{y} = \mathrm{diag}[a_1(t), a_2(t)]y + g(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \in [0, +\infty), \tag{15}$$

с кусочно-непрерывной по $t \geq 0$ и непрерывной по $y \in R^2$ двумерной вектор-функцией $g(t,y)$, являющейся $m$-возмущением в области $[0,+\infty) \times R^2$ и совпадающей в области $[k, k+1) \times R^2$

с вектор-функцией $g^{(k)}(t,y)$, имеющую базовое решение $y(t)$ с показателем Ляпунова $\lambda[y] = -\infty$ и удовлетворяющее краевому условию (14) при всяком $2 \le k \in N$.

На промежутке $[\tau_0, \tau_1] \equiv [\tau_0(k), \tau_1(k))$ рассмотрим треугольную систему

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2 - C_0(k)|y_1|^m, \quad y = (y_1, y_2) \in R^2, \quad t \in [\tau_0, \tau_1], \tag{$13_0$}$$

с постоянной $C_0(k) = C_0 < 0$, определяемой ниже (знак "минус" в системе ($13_0$) позволит упростить построение окончательного допустимого возмущения $f(t,y)$). Ее решение $y(t)$ с начальными значениями $y_1(\tau_0) = \varphi_k$, $y_2(\tau_0) = 0$ своих компонент из (14) имеет представление

$$y_1(t) = \varphi_k \exp(t - \tau_0), \quad y_2(t) = \frac{|C_0|}{m-1}\varphi_k^m e^{m(t-\tau_0)}[1 - e^{(1-m)(t-\tau_0)}], \quad t \in [\tau_0, \tau_1]. \tag{$16_0$}$$

Постоянную $C_0$ выберем удовлетворяющей условию $y_2(\tau_1) = \varphi_k^m$, т.е. в силу ($16_0$) положим

$$|C_0| = (m-1)[1 - \exp(1-m)(\tau - \tau_0)]^{-1} \exp[m(\tau_0 - \tau_1)].$$

Так как неравенство $\tau_1(k) - \tau_0(k) \ge 1/2$ выполнено для всех $k \ge 2$, то постоянная $C_0$ удовлетворяет условию

$$0 < |C_0(k)| \le (m-1)e^m(1 - e^{(1-m)/2}), \quad k \ge 2. \tag{$17_0$}$$

Из системы ($13_0$) следует положительность производных $\dot{y}_1(t)$ и $\dot{y}_2(t)$ компонент $y_1(t) > 0$ и $y_2(t) > 0$ решения $y(t)$, определенного равенствами ($16_0$), на интервале $(\tau_0, \tau_1)$. Поэтому справедливы оценки

$$\|y(t)\| \le \|y(\tau_1)\| \le \sqrt{2}\varphi_k \exp m(\tau_1 - \tau_0) < \sqrt{2}e^m\varphi_k, \quad t \in [\tau_0, \tau_1]. \tag{$18_0$}$$

На следующем промежутке $[\tau_1, \tau_2]$ положим $g^{(k)}(t,y) = (-C_1|y_2|^m, 0)$, $y \in R^2$, так что система (13) имеет вид

$$\dot{y}_1 = \alpha_1(k)y_1 - C_1 y_2^m, \quad \dot{y}_2 = y_2, \quad y \in R_+^2, \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \tag{$13_1$}$$

параметр $C_1 > 0$ в котором будет выбран ниже. Ее решение $y(t)$ с начальным вектором

$$y(\tau_1) = (\varphi_k e^{\tau_1 - \tau_0}, \varphi_k^m) \tag{$19_1$}$$

определяется равенствами

$$\begin{gathered} y_2(t) = \varphi_k^m \exp(t - \tau_1), \\ y_1(t) = \varphi_k \exp[\alpha_1(k)(t - \tau_1)]\left[e^{\tau_1 - \tau_0} - \frac{C_1}{m - \alpha_1(k)}\varphi_k^{m^2-1}(e^{(m-\alpha_1(k))(t-\tau_1)} - 1)\right], \quad t \in (\tau_1, \tau_2). \end{gathered} \tag{$16_1$}$$

В конечный момент $t = \tau_2$ компоненты этого решения принимают значения

$$y_2(\tau_2) = \varphi_k^m \exp \xi_k, \quad y_1(\tau_2) = \varphi_k \psi_k^{-1/p} e^{\xi_k}\left[e^{\tau_1 - \tau_0} - \frac{C_1}{m_1 - \alpha_1(k)}\varphi_k^{m^2-1}(\psi_k^{1/p} e^{(m-1)\xi_k} - 1)\right] \equiv$$

$$\equiv \varphi_k \psi_k^{-1/p} e^{\xi_k}(e^{\tau_1 - \tau_0} - C_1 z_k), \quad \xi_k \equiv \psi_k^{-1}. \tag{20}$$

Воспользовавшись значением $\varphi_k$ из (14), для величины $z_k$ имеем оценку $z_k > p(2m)^{-1}$, $k \ge 2$. Поэтому выбором числа $C_1 = C_1(k)$, удовлетворяющим условию

$$0 < C_1(k) \le z_k^{-1} \exp(\tau_1 - \tau_0) < 2em/p, \quad k \ge 2, \tag{$17_1$}$$

значение $y_1(\tau_2)$ из (20) можно сделать как угодно малым. Учитывая последующее (известное нам) определение системы (13) и ее решения $y(t)$ на промежутках $[\tau_2, \tau_3)$ и $[\tau_3, k+1)$, число $C_1 = C_1(k)$ выберем таким, чтобы выполнялось равенство

$$y_1(\tau_2)\psi_k^{1/p}e^{2\xi_k} \equiv \varphi_k e^{3\xi_k}(e^{\tau_1-\tau_0} - C_1(k)z_k) = \varphi_{k+1}, \tag{21}$$

а тем самым компоненты решения $y(t)$ в конечный момент $t = \tau_2$ принимали значения

$$y_1(\tau_2) = \varphi_{k+1}\psi_k^{-1/p}e^{-2\xi_k}, \quad y_2(\tau_2) = \varphi_k^m e^{\xi_k}. \tag{$19_2$}$$

Из равенства (21) имеем справедливое в силу (14) включение

$$\exp(\tau_1 - \tau_0) - C_1(k)z_k = \varphi_{k+1}e^{-3\xi_k}/\varphi_k \equiv \gamma_k \in (0, 1).$$

Поэтому необходимое число $C_1(k) = [\exp(\tau_1 - \tau_0) - \gamma_k]z_k^{-1}$ удовлетворяет неравенствам $0 < C_1(k) < z_k^{-1}e^{\tau_1-\tau_0}$, т.е. условию $(17_1)$.

Оценим теперь норму решения $y(t)$ с удовлетворяющими краевым условиям $(19_1)$ и $(19_2)$–(20) компонентами $(16_1)$ системы $(13_1)$ с только что определенным числом $C_1$. Так как $\alpha_1(k) < 0$, то производные $\dot y_1(t)$ и $\dot y_2(t)$ на этом промежутке соответственно отрицательны и положительны и поэтому на основании равенств (21) выполнены оценки

$$0 < y_1(t) \le y_1(\tau_1) < e\varphi_k, \quad 0 < y_2(t) \le y_2(\tau_2) < e\varphi_k^m, \quad t \in [\tau_1, \tau_2],$$

а тем самым и неравенство

$$\|y(t)\| \le e\sqrt{2}\varphi_k, \quad t \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{$18_1$}$$

На промежутке $[\tau_2, \tau_3)$ возмущение $g^{(k)}$ определим равенством $g^{(k)}(t, y) = (0, -C_2|y_1|^m)$, $y \in R^2$. Тогда на этом промежутке система (13) принимает вид

$$\dot y_1 = \alpha_2(k)y_1 > 0, \quad \dot y_2 = \alpha_1(k)y_2 - C_2y_1^m < 0, \quad y \in R_+^2, \quad t \in [\tau_2, \tau_3), \tag{$13_2$}$$

в котором параметр $C_2 = C_2(k) > 0$ будет определен ниже. Компоненты решения $y(t)$ этой системы с начальными значениями $(19_2)$ –(20) имеют представления

$$y_1(t) = y_1(\tau_2)\exp[\alpha_2(k)(t - \tau_2)] = \varphi_{k+1}\psi_k^{-1/p}\exp[-2\xi_k + \alpha_2(k)(t - \tau_2)],$$

$$y_2(t) = e^{\alpha_1(k)(t-\tau_2)}\left\{\varphi_k^m e^{\xi_k} - C_2\varphi_{k+1}^m\psi_k^{-m/p}e^{-2m\xi_k}\int\limits_{\tau_2}^{t} e^{[m-\alpha_1(k)](\tau-\tau_2)}d\tau\right\} \overset{(13_2)}{\le}$$

$$\overset{(13_2)}{\le} y_2(\tau_2) = \varphi_k^m e^{\xi_k}, \quad t \in [\tau_2, \tau_3]. \tag{$16_2$}$$

Для фигурной скобки $\{\ldots\}$ в представлении $y_2(\tau_3)$ в $(16_2)$ получим равенство $\{\ldots\}_{t=\tau_3} = \varphi_k^m e^{\xi_k}(1 - C_2w_k)$, в котором величина $w_k > 0$ определяется следующим образом:

$$w_k \equiv \frac{p}{p(m-1) + (m+1)\psi_k \ln\psi_k}\psi_k^{1/p}\left(\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k}\right)^m e^{-(2+m)\xi_k}\left(1 - \psi_k^{-(1+m)/p}e^{(1-m)\xi_k}\right) \equiv$$

$$\equiv \delta_k(\ln\psi_k)^{-1}\psi_k^{(1-p)/p}\exp\left[-\frac{m}{p(m^2-1)}(2k+1)\right] \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

причем $\delta_k \to p/(1+m)$ при $k \to \infty$. Поэтому существует такая постоянная $d = d(p, m) \in (0, +\infty)$, что выполнено неравенство $w_k \ge d(p, m) > 0$ для всех $k \ge 2$. Тем самым для всякого $k \ge 2$ существует такая удовлетворяющая условию

$$0 < C_2(k) \le w_k^{-1} \le d^{-1}(p, m) < +\infty, \quad 2 \le k \in N, \tag{$17_2$}$$

постоянная $C_2 = C_2(k)$, что будут выполнены равенства $\{\ldots\}_{t=\tau_3(k)} = 0$ для всех $k \geq 2$. Поэтому и в силу равенств $(16_2)$ компоненты решения $y(t)$ в конечный момент $t = \tau_3$ рассматриваемого отрезка $[\tau_2, \tau_3]$ имеют значения

$$y_1(\tau_3) = \varphi_{k+1}\exp(-\xi_k), \quad y_2(\tau_3) = 0, \quad k \geq 2. \tag{$19_3$}$$

Вместе с тем из $(13_2)$, $(16_2)$ и $(19_3)$ имеем оценки

$$0 < y_1(t) \leq y_1(\tau_3) < \varphi_{k+1}, \quad 0 \leq y_2(t) \leq y_2(\tau_2) < \sqrt{e}\varphi_k^m, \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)], \quad k \geq 2,$$

т.е. для нормы решения $y(t)$ – оценку

$$\|y(t)\| < \sqrt{\varphi_{k+1}^2 + e\varphi_k^{2m}} \leq e\begin{cases}\max\{\varphi_{k+1}, \varphi_k^m\}, & k \geq 2,\\ \varphi_{k+1}, & k \geq k(m),\end{cases} \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)). \tag{$18_2$}$$

Наконец, на последнем промежутке $[\tau_3(k), k+1)$ положим $g^{(k)}(t,y) \equiv 0$, $y \in R^2$. Тогда в силу начальных условий $(19_3)$ компоненты $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решения $y(t)$ на отрезке $[\tau_3(k), k+1]$ определяются равенствами $y_1(t) = \varphi_{k+1}\exp(t-k-1)$ и $y_2(t) \equiv 0$, а для нормы решения справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \varphi_{k+1}, \quad t \in [\tau_3(k), k+1]. \tag{$18_3$}$$

В конечный же момент $t = k+1$ выполнено равенство

$$y(k+1) = (\varphi_{k+1}, 0), \tag{$19_4$}$$

т.е. второе краевое условие (14).

Тем самым в силу "периодичности с периодом 1" определения функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ и произвольности натурального $k \geq 2$ система (15) и ее решение $y(t)$ построены на промежутке $[2, +\infty)$. На промежутке $[0, 2)$, на котором $a_1(t) = a_2(t) = 0$, положим $g(t,y) \equiv 0$, $y \in R^2$. Возмущение $g(t,y)$ является $m$-возмущением, что обеспечивается общей для всей области $[0,+\infty) \times R^2$ постоянной $C > 0$, являющейся верхней гранью постоянных $|C_0(k)|$ из $(17_0)$, $C_1(k)$ из $(17_1)$ и $C_2(k)$ из $(17_2)$, например, постоянной

$$C = \max\{2me^m/p, 1/d(p,m)\}. \tag{22}$$

Базовое решение $y(t) \in R_+^2$ системы (15), удовлетворяющее краевым условиям (14), $(19_1)$ – $(19_3)$ при всяком $k \geq 2$, оценке

$$\|y(t)\| \leq e^{2m}\max\{\varphi_k, \varphi_k^m, \varphi_{k+1}\} \overset{(14_1)}{=} e^{2m}\max\{\varphi_k, \varphi_k^m\}, \quad t \in [k, k+1), \quad k \geq 2, \tag{23}$$

вытекающей из оценок $(18_j)$ при $j = 0,1,2,3$, имеет в силу (23) показатель Ляпунова

$$\lambda[y] = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\ln\|y(t)\| \leq \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \frac{\ln\varphi_k}{k+1} = -\infty. \tag{$23_1$}$$

По базовому решению $y(t)$ системы (15) и ее частным видам (13) и $(13_l)$, $l = 0,1,2$, построим окончательное необходимое $m$-возмущение $f(t,y)$ и систему (9), а также необходимую равномерно сходящуюся к нулю последовательность $\{y^{(n)}(t)\}$ ее решений. Для этого используем последовательность чисел

$$c_{-1} = \frac{5}{4}, \quad c_n = 1 - \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2^{1+l}}, \quad n \in N_0, \quad \{c_n\} \downarrow \frac{1}{2}, \tag{24}$$

и бесконечно дифференцируемую функцию [9, с. 54]

$$e_{01}(x;\alpha,\beta) = \begin{cases}\exp\{-(x-\alpha)^{-2}\exp[-(x-\beta)^{-2}]\}, & x \in (\alpha,\beta),\\ \dfrac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}\left(x - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right], & x \notin (\alpha,\beta),\end{cases}$$

с помощью которой определим новую также бесконечно дифференцируемую функцию

$$e_{010}(x;\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}e_{01}(x;\alpha,\beta), & x\in[\alpha,\beta),\\ 1-e_{01}(x;\beta,\gamma), & x\in[\beta,\gamma).\end{cases}$$

Первую компоненту вектор-функции $f(t,y)=(f_1(t,y_2),f_2(t,y_1)):[0,+\infty)\times R^2\to R^2$, зависящую только от $y_2\in R^1$, в области $[0,+\infty)\times R^1$ определим равенством

$$f_1(t,y_2)=\begin{cases}-C_1(k)c_{2l}^{1-m}y_2^m e_{010}(y_2/y_2(t);c_{2l+1},c_{2l},c_{2l-1}), & y_2/y_2(t)\in[c_{2l+1},c_{2l-1}),\\ & t\in[\tau_1(k),\tau_2(k)),\quad l=0,1,\ldots,k-2,\quad 2\le k\in N;\\ 0 & \text{для всех остальных}\quad (t,y_2)\in[0,+\infty)\times R^1.\end{cases}$$

Вторую зависящую только от $y_1\in R^1$ компоненту $f_2(t,y_1)$ зададим следующим образом:

$$f_2(t,y_1)=\begin{cases}-C_j(k)c_{2l}^{1-m}y_1^m e_{010}(y_1/y_1(t);c_{2l+1},c_{2l},c_{2l-1}), & y_1/y_1(t)\in[c_{2l+1},c_{2l-1}),\\ & t\in[\tau_{2j}(k),\tau_{2j+1}(k)),\quad j=0,1,\quad l=0,1,\ldots,k-2,\quad 2\le k\in N,\\ 0 & \text{для всех остальных}\quad (t,y_1)\in[0,+\infty)\times R^1.\end{cases}$$

Очевидно, построенное возмущение $f(t,y)$ является кусочно-непрерывным по $t\ge 0$. Для его компонент $f_1(t,y_2)$ и $f_2(t,y_1)$ справедливы тождества

$$f_{3-i}(t,y_i)\equiv 0\quad \text{для}\quad y_i\in(-\infty,c_{2k-3}y_i(t)],\quad t\in[0,k+1),\quad 2\le k\in N,\quad i=1,2, \tag{25$_1$}$$

$$f_i(t,y_{3-i})\equiv 0\quad \text{для}\quad y_{3-i}\ge c_{-1}y_{3-i}(t),\quad i=1,2,\quad t\in[0,+\infty), \tag{25$_2$}$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – компоненты базового решения $y(t)$ системы (15). Поэтому возмущение $f(t,y)$ является бесконечно дифференцируемым по $y_1$ и $y_2$ в области $(0,+\infty)\times R^2$.

**Замечание 3.** Из тождеств $(25_1)$ и $(25_2)$ следует ограниченность всех частных производных любого конечного порядка по $y_1$ и $y_2$ от компонент $f_1$ и $f_2$ возмущения $f$ во всякой области $[0,t_0]\times R^2$ с конечным $t_0>0$. Тем самым все решения системы (9) обладают свойством единственности и всякое решение $u(t)$ этой системы, принимающее в произвольный фиксированный момент $t_0\in(0,+\infty)$ конечное значение $u(t_0)$, продолжимо как влево до начальной точки $t=0$, так и бесконечно вправо, т.е. имеет своим промежутком существования $[0,+\infty)$.

Возмущение $f(t,y)$ является и $m$-возмущением с постоянной

$$C_f=\sup_{k\ge 2}\{c_{2k-4}^{1-m}\max_{j=0,1,2}|C_j(k)|\}<2^{m-1}\sup_{k\ge 2}\max_{j=0,1,2}|C_j(k)|\le e^m\max\{me^m/p,1/d(p,m)\}<+\infty,$$

что следует из представлений функций $f_1(t,y_2)$ и $f_2(t,y_1)$, вытекающего из (24) неравенства $c_n>1/2$, $n\in N_0$, и равенства (22) для постоянной $C$ – верхней грани множества $\{|C_0(k)|,C_1(k),C_2(k)\}_{k=2}^{\infty}$.

**3. Построение последовательности решений возмущенной системы.** Заметим вначале, что в силу равенств $e_{010}(c_{2l};c_{2l+1},c_{2l},c_{2l-1})=1$, $l\ge 0$, вытекающих из них тождеств

$$f(t,c_{2l}\,y(t))=(f_1(t,c_{2l}\,y_2(t)),f_2(t,c_{2l}\,y_1(t)))\equiv c_{2l}\,g(t,y(t)) \tag{26}$$

на базовом решении $y(t)$ системы (15), справедливых для $t\ge l+2$ на основании $(25_1)$, вектор-функция

$$y^{(k-2)}(t)\equiv c_{2k-4}\,y(t),\quad k\ge 2,\quad t\ge k, \tag{27}$$

является решением системы (9) на промежутке $[k,+\infty)$. Действительно, непосредственной подстановкой вектор-функции $y^{(k-2)}(t)$ в систему (9) получаем необходимые тождества

$$dy^{(k-2)}(t)/dt=c_{2k-4}\,\dot y(t)\equiv D(t)[c_{2k-4}\,y(t)]+c_{2k-4}\,g(t,y(t))\overset{(26)}{\equiv}$$

$$\overset{(26)}{\equiv} D(t)y^{(k-2)}(t) + f(t, c_{2k-4}\, y(t)) = D(t)y^{(k-2)}(t) + f(t, y^{(k-2)}(t)), \quad t \geq k.$$

В частности, решение $y(t)$ системы (15) является решением системы (9) на всей полуоси и в силу (27) и (24) имеет обозначение $y^{(0)}(t) \equiv y(t)$.

Решение $y^{(k-1)}(t)$, $k \geq 2$, системы (9), определенное равенством (27) на промежутке $[k+1, +\infty)$, непрерывно продолжим в отрицательном направлении на промежуток $[0, k+1)$ ее же решением, что можно сделать согласно приведенному выше замечанию 3. Начальное (или конечное) значение $y^{(k-1)}(k+1)$ этого строящегося на отрезке $[0, k+1]$ решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9), согласно (14) и (27), определяется равенством

$$y^{(k-1)}(k+1) = c_{2k-2}(\varphi_{k+1}, 0). \tag{28}$$

Так как на промежутке $[\tau_3(k), k+1)$ возмущение $f(t, y)$ в системе (9) тождественно равно $O \in R^2$, то на этом промежутке решение $y^{(k-1)}(t)$ в силу (28) определяется равенством

$$y^{(k-1)}(t) = y^{(k-1)}(k+1)e^{t-k-1} = c_{2k-2}(\varphi_{k+1}, 0)e^{t-k-1}, \quad t \in [\tau_3(k), k+1], \tag{29}$$

принимая в момент $t = \tau_3(k)$ на основании этого равенства (29) значение

$$y^{(k-1)}(\tau_3(k)) = c_{2k-2}(\varphi_{k+1}, 0)e^{-\xi_k}. \tag{30}$$

На предыдущем промежутке $[\tau_2(k), \tau_3(k))$ по определению функции $f_1(t, y_2)$ она тождественно равна нулю при любых $y_2 \in R^1$. Поэтому первая компонента $y_1^{(k-1)}(t)$ решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с начальным (напомним, что мы движемся от точки $t = \tau_3(k)$ влево, в сторону убывания $t$) значением $y_1^{(k-1)}(\tau_3(k)) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}e^{-\xi_k}$, определяемым из равенства (30), на промежутке $[\tau_2(k), \tau_3(k))$ удовлетворяет тождеству $dy_1^{(k-1)}(t)/dt \equiv \alpha_2(k)y_1^{(k-1)}(t)$. Тем самым на отрезке $[\tau_2(k), \tau_3(k)]$ имеем представление

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}\exp[-\xi_k + \alpha_2(k)(t - \tau_3(k))], \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)], \tag{31}$$

для первой компоненты $y_1^{(k-1)}(t)$. Так как $y_1(t)$ из $(16_2)$ определяется равенством

$$y_1(t) = \varphi_{k+1}\exp[-\xi_k + \alpha_2(k)(t - \tau_3(k))], \quad t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)], \tag{32}$$

то сравнением функций $y_1^{(k-1)}(t)$ из (31) и $c_{2k-3}y_1(t)$ из (32) в силу неравенства $c_{2k-2} < c_{2k-3}$ имеем оценку $y_1^{(k-1)}(t) < c_{2k-3}y_1(t)$ для всех $t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)]$. Поэтому в силу $(25_1)$ имеем тождество $f_2(t, y_1^{(k-1)}(t)) \equiv 0$, $t \in [\tau_2(k), \tau_3(k))$, из которого следует, что вторая компонента $y_2^{(k-1)}(t)$ с начальным значением $y_2^{(k-1)}(\tau_3) = 0$ на промежутке $[\tau_2(k), \tau_3(k))$ удовлетворяет равенству $dy_2^{(k-1)}(t)/dt = \alpha_1(k)y_2^{(k-1)}(t)$. Тем самым необходимо $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0$ для всех $t \in [\tau_2(k), \tau_3(k)]$.

Продолжим теперь решение $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с начальным значением

$$y^{(k-1)}(\tau_2) = (\varphi_{k+1}\psi_k^{-1/p}c_{2k-2}\exp(-2\xi_k), 0), \tag{33}$$

полученным из равенства (31), на промежуток $[\tau_1(k), \tau_2(k))$. На этом промежутке $f_2(t, y_1) \equiv 0$ при всех $y_1 \in R^1$. Тем самым справедливы равенства $dy_2^{(k-1)}(t)/dt = y_2^{(k-1)}(t)$ и на основании (33) $y_2^{(k-1)}(\tau_2(k)) = 0$, из которых имеем тождество $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0$ для $t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)]$. На отрезке $[\tau_1(k), \tau_2(k)]$ вторая компонента $y_2(t)$ базового решения $y(t)$ положительна. Поэтому неравенство $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0 < c_{2k-3}y_2(t)$, $t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)]$, очевидно, и в силу $(25_1)$ имеем тождество $f_1(t, y_2^{(k-1)}(t)) \equiv 0$ на промежутке $[\tau_1(k), \tau_2(k)]$. Это тождество может быть получено и из равенств $f_1(t, y_2^{k-1}(t)) = f_1(t,0) \equiv 0$, так как последнее тождество справедливо при всех $t \geq 0$. Поэтому для компоненты $y_1^{(k-1)}(t)$ имеем представление

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}\psi_k^{-1/p}\exp[-2\xi_k + \alpha_1(k)(t-\tau_2(k))], \quad t \in [\tau_1(k), \tau_2(k)], \tag{34}$$

и значение

$$y^{(k-1)}(\tau_1(k)) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}\exp(-3\xi_k) \times (1,0) \tag{35}$$

вектор-функции $y^{(k-1)}(t)$ в момент $t = \tau_1(k)$, вытекающее из представления (34).

Рассмотрим наконец последний промежуток $[\tau_0(k), \tau_1(k))$. На нем имеем $f_1(t, y_2) \equiv 0$ независимо от $y_2 \in R^1$. Поэтому из тождества $dy_1^{k-1}(t)/dt \equiv y_1^{(k-1)}(t)$ имеем в силу начального условия (35) для первой компоненты равенство

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}\exp(-3\xi_k + t - \tau_1), \quad t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]. \tag{36}$$

Сравнивая эту компоненту с первой компонентой $y_1(t) = \varphi_k\exp(t-\tau_0)$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$, из $(16_0)$ решения $y(t)$ системы (15), получаем, что неравенство $y_1^{(k-1)}(t) < c_{2k-3}y_1(t)$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$, эквивалентно неравенству

$$\{(1+1/k)^2\exp[(-2k-1)/p]\}^{1/(m^2-1)} < ec_{2k-3}/c_{2k-2},$$

справедливому при всех $k \geq 2$ в силу очевидных неравенств $\{\ldots\} < \exp(-2k) < 1$, $c_{2k-2} < c_{2k-3}$, $k \geq 2$. Таким образом, из тождества $(25_1)$ имеем $f_2(t, y_1^{(k-1)}(t)) \equiv 0$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k))$, что в силу условия $y_2^{(k-1)}(\tau_1(k)) = 0$ означает равенство $y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0$, $t \in [\tau_0(k), \tau_1(k)]$.

Построение на промежутке $[k-1, k)$ (и всех предшествующих ему, принадлежащих промежутку $[2, k-1)$) решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с начальным условием $y^{k-1}(k) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}e^{-1}(1,0)$ (см. (36)) в точности повторяет только что проведенные рассуждения и построения решения $y^{(k-1)}(t)$ на промежутке $[k, k+1)$. Единственным отличием здесь является следующее еще более благоприятное обстоятельство: с уменьшением $k$ области $(25_1)$, в которых $f_i(t, y_{3-i}) \equiv 0$, $i = 1, 2$, расширяются, вследствие чего компоненты $y_i^{(k-1)}(t)$ решения $y^{(k-1)}(t)$ на соответствующих принадлежащих $[k-1, k)$ промежутках следует уже сравнивать не с функциями $c_{2k-3}y_i(t)$, как это было на промежутке $[k, k+1)$, а с функциями $c_{2k-5}y_i(t)$, где $c_{2k-3} < c_{2k-5}$ и $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – компоненты базового решения $y(t)$. В итоге за конечное число шагов мы построим на отрезке $[0, k+1]$ решение $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) с компонентами

$$y_1^{(k-1)}(t) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}\exp\int\limits_{k+1}^{t} a_1(\tau)d\tau, \quad y_2^{(k-1)}(t) \equiv 0, \quad t \in [0, k+1], \tag{37}$$

и начальным значением

$$y^{(k-1)}(0) = \varphi_{k+1}c_{2k-2}e^{1-k}(1,0).$$

По определению функции $a_1 \in L^pN$ для нормы решения $y^{(k-1)}(t)$ системы (9) из его представления (37) на промежутке $[0, k+1)$ имеем оценку

$$\|y^{(k-1)}(t)\| \leq \varphi_{k+1}e^{t-k-1}, \quad t \in [0, k+1), \quad k \geq 2, \tag{38}$$

а на промежутке $[k+1, +\infty)$ из равенства (27) и неравенства $(14_1)$ – оценку

$$\|y^{(k-1)}(t)\| < \|y(t)\| < e^{2m^2}\begin{cases}\max\{\varphi_l, \varphi_l^m\}, & t \in [l, l+1), \quad l \geq k+1, \\ \varphi_l, & t \in [l, l+1), \quad l \geq k(p,m), \quad l \geq k+1.\end{cases} \tag{39}$$

Из неравенств (38) и (39) при достаточно больших $k$ следует оценка

$$\sup_{t\geq 0}\|y^{(k-1)}(t)\| \leq e^{2m^2}\varphi_{k+1} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Это означает равномерную на полуоси $[0,+\infty)$ сходимость последовательности $\{y^{(k-1)}(t)\}$ решений системы (9) с $m$-возмущением $f(t,y)$, $m>1$, к ее нулевому решению $y=0$. Из оценки же (39) также следует в силу ($23_1$) равенство $\lambda[y^{(k-1)}] \leq \lambda[y] = -\infty$ для показателей Ляпунова $\lambda[y^{(k-1)}]$ решений $y^{(k-1)}(t)$, т.е. равенство $\lambda[y^{(k-1)}] = -\infty$, $2 \leq k \in N$. Лемма полностью доказана.

**Следствие леммы.** *Утверждение доказанной леммы справедливо и для $n$-мерных исходных принадлежащих множеству $L^pN$, $p \in (0,1)$, линейных систем ($1_A$) и возмущенных систем (4) с $m$-возмущениями $f$, $m>1$.*

Для доказательства этого достаточно в случае $n \geq 3$ построенную двумерную систему ($1_D$) дополнить $(n-2)$-мерной диагональной системой $\dot{x}=x$, $x=(x_3,\ldots,x_n)\in R^{n-2}$, а двумерную нелинейную возмущенную систему (4) с построенным $m$-возмущением $f:[0,+\infty)\times R^2 \to \to R^2$, $m>1$, также дополнить линейной диагональной системой $\dot{y}=y$, $y=(y_3,\ldots,y_n)\in \in R^{n-2}$ с нулевым $(n-2)$-мерным $m$-возмущением $(f_3(t,y),\ldots,f_n(t,y)) \equiv (0,\ldots,0)$, $t\geq 0$, $y \in R^{n-2}$. Очевидно, так построенная $n$-мерная возмущенная система (4) имеет своим решением всякую $n$-мерную вектор-функцию $Y^{(k-1)}(t) \equiv (y^{(k-1)}(t), O_{n-2}) \in R^n$, $k \in N$, в которой $y^{(k-1)}(t)$ при всяком $k\in N$ – построенное в лемме решение двумерной системы (9), а $O_{n-2}\in R^{n-2}$ – нулевая вектор-функция. Так как нормы решения $Y^{(k-1)}(t)$ $n$-мерной системы (4) и решения $y^{(k-1)}(t)$ двумерной системы (9) совпадают при всех $t \geq 0$ и любом фиксированном $k \in N$, то, очевидно, справедливы необходимые свойства множества решений $\{Y^{(k-1)}(t)\}$ системы (4): 1) $\lambda[Y^{k-1}] = -\infty$; 2) $Y^{(k-1)}(t) \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} O_n \in R^n$, $t\in[0,+\infty)$. Следствие леммы и необходимость теоремы доказаны.

**Следствие теоремы.** *Нулевое решение системы (4) с линейным приближением $A \in \in L^pN$, $p \geq 1$, и любым $m$-возмущением $f$ порядка $m>1$ неустойчиво по Ляпунову.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Coppel W.A.* Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations. Boston, 1965.
2. *Conti R.* // Funkcialaj Ekvacioj. 1966. V. 9. № 1. P. 23–26.
3. *Изобов Н.А., Прохорова Р.А.* // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Механика. 1989. № 2. С. 39–44.
4. *Izobov N.A. and Prokhorova R.A.* // J. of Dynam. and Differ. Equat. 2003. V. 15. № 2/3. P. 281–303.
5. *Conti R.* // Tôhoku Math. J. Second Ser. 1980. V. 32. №. 2. P. 279–282.
6. *Изобов Н.А., Прохорова Р.А.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 775–791.
7. *Виноград Р.Э., Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 230–242.
8. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 10. С. 1671–1688.
9. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М., 1967.


Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
19.01.2004 г.