

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Сергеев, Асимптотические решения задачи Коши с локализованными начальными данными для разностной схемы, отвечающей одномерному волновому уравнению,

Матем. заметки, 2019, том 106, выпуск 5, 744–760

<https://www.mathnet.ru/mzm12283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

29 апреля 2025 г., 13:28:45





УДК 517

Асимптотические решения задачи Коши с локализованными начальными данными для разностной схемы, отвечающей одномерному волновому уравнению

С. А. Сергеев

В данной работе мы ставим задачу Коши с локализованными начальными данными, возникающую при переходе от явной разностной схемы для волнового уравнения к псевдодифференциальному. Мы сравниваем решение задачи Коши для разностной схемы и асимптотику решения задачи Коши для псевдодифференциального уравнения. Мы подробно останавливаемся на исследовании поведения асимптотического решения в окрестности переднего фронта, где строим еще один вариант асимптотического решения, основанный на вертикальных многообразиях.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: волновое уравнение, асимптотическое решение, разностная схема, нестандартные характеристики, лагранжево многообразие, вертикальное многообразие.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12283>

1. Введение

Известно, что разностные схемы можно записать в виде псевдодифференциальных уравнений. В работах [1]–[6] В. П. Маслов, В. Г. Данилов и П. Н. Жевандров предложили метод построения асимптотических решений задач Коши для таких уравнений. С помощью канонического оператора Маслова [7], [8] такие асимптотические формулы были построены при достаточно широких предположениях.

В работах [9], [10] С. Ю. Доброхотов и В. Е. Назайкинский для задач Коши с локализованными начальными условиями построили асимптотические решения, основанные на вертикальном лагранжевом многообразии или многообразии с краем.

В данной работе исследуется задача Коши с локализованными начальными данными для псевдодифференциального уравнения, отвечающего явной разностной схеме для одномерного волнового уравнения с переменными коэффициентами. В отличие от общих формул Маслова, Данилова и Жевандрова мы учитываем локализованность начальных условий и приводим эффективные, с точки зрения вычислений,

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-11-10282.

формулы асимптотического решения задачи. Мы покажем, что подход, основанный на вертикальных многообразиях, приводит к такой же асимптотической формуле, что и в работах Маслова, Данилова и Жевадрова.

При исследовании разностной схемы с локализованными начальными данными возникает два малых параметра: шаг сетки h и параметр локализации начальных данных μ . Мы строим асимптотику главной части решения задачи Коши при $\mu \rightarrow 0$. В зависимости от отношения h/μ асимптотика решения дается различными формулами. При определенном соотношении между параметрами у решения возникают дисперсионные эффекты, обусловленные разностной схемой (см. например [1], [2], [11]–[13]), которые можно описать с помощью функций Эйри.

Автор выражает благодарности С. А. Горейнову, В. Г. Данилову, С. Ю. Доброхотову, В. Е. Назайкинскому, А. А. Толченникову и А. В. Цветковой за полезные обсуждения и замечания.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - c^2(x)u''(x, t) = 0, \quad u|_{t=0} = V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что $c(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и ограничена, $c_M \geq c(x) \geq c_m > 0$, а функция $V(y)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$. Малый параметр $\mu \ll 1$ характеризует локализацию начальной функции.

Следуя идеям [3] можно доказать, что асимптотическое решение задачи (2.1) имеет вид формулы д’Аламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(V\left(\frac{\alpha^+(x, t)}{\mu}\right) \frac{c(\alpha^+(x, t))}{c(x)} + V\left(\frac{\alpha^-(x, t)}{\mu}\right) \frac{c(\alpha^-(x, t))}{c(x)} \right) + O(\mu), \quad (2.2)$$

где функции $\alpha^\pm(x, t)$ являются решением уравнений $x = X^\pm(\alpha, t)$, а $X^\pm(\alpha, t)$ – решениями задач $\dot{X}^\pm = \pm c(X^\pm)$, $X^\pm|_{t=0} = \alpha$.

Введем сетки $\omega_h = \{x_k = hk, k \in \mathbb{Z}\}$ и $d_\tau = \{t_n = \tau n, n = 0, \dots\}$, и построим на решетке $\Omega = \omega_h \times d_\tau$ явную разностную схему для волнового уравнения

$$\frac{u_k^{n+2} - 2u_k^{n+1} + u_k^n}{\tau^2} = c^2(x_k) \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2}, \quad (2.3)$$

где $u_k^n = u(x_k, t_n)$. С помощью стандартной замены эта схема приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} u_k^{n+1} - u_k^n = w_k^n, \\ w_k^{n+1} - w_k^n = \delta^2 c^2(kh)(u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}), \\ u_k^0 = V\left(k \frac{h}{\mu}\right), \quad w_k^0 = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Мы предполагаем, что выполнено соотношение $\mu = h^\gamma$, $0 \leq \gamma \leq 1$, а величина $\delta = \tau/h$ удовлетворяет условию устойчивости $\delta < 1/c_M$. Запись системы (2.4) с помощью операторов сдвига по x : $u(x + h, t) = e^{i(-ih \partial/\partial x)}u(x, t)$, и по τ : $u(x, t + \tau) =$

$e^{\tau \partial/\partial t} u(x, t)$, приводит к следующей системе уравнений уже для непрерывных функций:

$$\mathcal{L}_1 e^{\delta h \partial/\partial t} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \mathcal{L}_2 \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = V \begin{pmatrix} \left(\frac{x}{\mu}\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Сужение системы (2.5) на решетку Ω с приводит к системе (2.4). Операторы \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 определяются по формулам

$$\mathcal{L}_1(x, h\widehat{\xi}; h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^2(x, h\widehat{\xi}) & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_2(x, h\widehat{\xi}; h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a^2(x, h\widehat{\xi}) = 4c^2(x)\delta^2 \sin^2 \frac{h\widehat{\xi}}{2}, \quad (2.6)$$

где $\widehat{\xi} = -i\partial/\partial x$. Здесь и далее оператор дифференцирования действует первым, а оператор умножения на функцию $c^2(x)$ действует вторым. Если функции $c^2(x)$ и $V(x/\mu)$ интерполируют соответствующие функции из разностной схемы, то решение задачи (2.5) будет интерполировать решение разностной задачи (2.4).

Применение схемы Данилова и Маслова [4]–[6] (ее краткое описание приведено в разделе 6) к системе (2.5) приводит к двум задачам Коши:

$$i\mu \frac{\partial}{\partial t} u^\pm = H^\pm(x, \widehat{p})u^\pm - i\mu H_1^\pm(x, \widehat{p})u^\pm, \quad u^\pm|_{t=0} = \frac{1}{2}V\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad (2.7)$$

$$H^\pm(x, p) = \pm \frac{\mu}{\delta h} \arccos\left(1 - 2\delta^2 c^2(x) \sin^2 \frac{h}{2\mu} p\right), \quad (2.8)$$

$$H_1^\pm(x, p) = \pm \delta^2 c'(x) c^2(x) \frac{\sin(h/2\mu)p \cos(h/2\mu)p \sqrt{\sin^2(h/2\mu)p}}{(1 - \delta^2 c^2(x) \sin^2(h/2\mu)p)^{3/2}}, \quad (2.9)$$

где $\widehat{p} = -i\mu \partial/\partial x$. Функции $H^\pm(x, p)$ мы называем эффективными гамильтонианами, асимптотика искомой функции $u(x, t)$ есть сумма функций $u^+(x, t)$ и $u^-(x, t)$.

Отметим еще раз, что в качестве начальных функций, в отличие от [4]–[6], мы выбираем локализованные условия. Наша цель – построить главную часть асимптотики задачи (2.7) при $\mu \rightarrow 0$ и представить результат в виде эффективных с точки зрения вычислений формул.

Существование и единственность задачи (2.7) следует из работ [4], [5] и опирается на построение параметрикса, который строится с помощью канонического оператора Маслова [3], [4], [6], [7].

3. Начальные условия задачи Коши и интерполяционные формулы Котельникова

В работах [4], [5] использовались интерполяционные формулы Котельникова

$$\widehat{V}(\omega) = \sqrt{\frac{h}{2\pi\mu}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} V_h\left(j \frac{h}{\mu}\right) e^{-(i/\mu)j h \omega}, \quad \omega \in B_1 = \left[-\frac{\mu\pi}{h}, \frac{\mu\pi}{h}\right], \quad (3.1)$$

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \sqrt{\frac{h}{2\pi\mu}} \int_{B_1} \widehat{V}(\omega) e^{(i/\mu)x\omega} d\xi. \quad (3.2)$$

При построении асимптотических формул, основанных на вертикальном лагранжевом многообразии, используется непрерывное преобразование Фурье

$$\tilde{V}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} V(y)e^{-iy p} dy, \quad V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{V}(p)e^{(i/\mu)x p} dp. \quad (3.3)$$

Для того чтобы продемонстрировать связь между двумя указанными выше подходами построения асимптотических формул, мы покажем, что при условии $h/\mu \ll 1$ вместо (3.1), (3.2) можно пользоваться формулами (3.3). Такой переход основан на следующих простых, но полезных, утверждениях, связанных с формулой суммирования Пуассона (см., например, теорему 2.4 (Гл. VII) из [15]).

ЛЕММА 1. Пусть функция $\tilde{V}(p)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R})$. Тогда ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{V}(p + 2\pi(\mu/h)k)$ сходится абсолютно, и справедливо равенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{V}\left(p + 2\pi \frac{\mu}{h} k\right) = \sqrt{\frac{h}{\mu}} \hat{V}(p). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы практически дословно (с очевидными изменениями) повторяет доказательство соответствующей теоремы, поэтому его мы опускаем.

ЛЕММА 2. Пусть функция $V(y) \in S(\mathbb{R})$. Тогда равномерно по $\omega \in [-\pi(\mu/h), \pi(\mu/h)]$ справедлива оценка

$$\left| \sqrt{\frac{h}{\mu}} \hat{V}(\omega) - \tilde{V}(\omega) \right| = O\left(\frac{h}{\mu}\right)^\infty. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 справедливо равенство (3.4), и член ряда, отвечающий $k = 0$, совпадает с (3.3). При $k \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left| \tilde{V}\left(\omega + 2\pi \frac{\mu}{h} k\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} V(y)e^{-i(\mu/h)(\omega(h/\mu)+2\pi k)y} dy \right| \leq \left(\frac{h}{\mu}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_n}{|2\pi k|^n},$$

где $M_n = \int_{\mathbb{R}} |V^{(n)}(y)| dy$, и последнее неравенство получено после применения n раз интегрирования по частям, учета свойств функции $V(y)$ и неравенства $|\omega| \leq \pi(\mu/h)$. Из абсолютной сходимости ряда $\sum_{k \neq 0} (1/|k|^n)$ и произвольности n следует утверждение леммы.

4. Главная часть асимптотического решения разностной схемы

Построение асимптотики системы (2.4) проводится с помощью параметрикса (см. [3]–[6], [17]). Опишем кратко построение параметриксков T_N^\pm , отвечающих задачам (2.7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Параметриксами задач (2.7) назовем операторы $T_N^\pm(x, t, \hat{\xi})$ такие, что

$$\left(i\mu \frac{\partial}{\partial t} - (H^\pm(x, \hat{p}) - i\mu H_1^\pm(x, \hat{p})) \right) T_N^\pm(x, t, \hat{\xi}) = \mu^2 R_N^\pm(x, t, \hat{\xi}), \quad T_N^\pm|_{t=0} = \Pi(\hat{p}),$$

где $\widehat{\xi} = -i\partial/\partial x$, $\widehat{p} = \mu\widehat{\xi}$, а R_N^\pm – сглаживающие операторы, т.е. символы этих операторов удовлетворяют неравенствам

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta R_N^\pm| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{-N+\alpha}$$

для любого целого числа N , и они действуют из пространства H^s в пространство H^{s+N} , а $\Pi(p)$ – характеристическая функция интервала B_1 .

Параметрикс T_N^\pm представляют собой сумму, составленную из канонических операторов Маслова [6], [18] с большим параметром ξ . Так как нас интересует главная часть асимптотического решения, то достаточно построить операторы T_0^\pm , символы которых имеют вид $T_0^\pm(x, t, \xi) = K_{\Lambda_t^\pm(\omega)}^{(1/\xi)}[1]$, где $\omega = \mu\xi$.

ЛЕММА 3. *Справедливо следующее равенство:*

$$T_0^+(x, t, \widehat{\xi}) = \overline{T_0^-(x, t, \widehat{\xi})},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Доказательство этой леммы основано на том, что операторы T_0^\pm представляются в виде канонического оператора Маслова, что позволяет воспользоваться аналогичными лемме 14 из [19] рассуждениями.

Ниже мы опускаем индексы \pm у T_0^\pm и строим оператор, отвечающий знаку $+$. Для этого введем систему нестандартных характеристик

$$\mathcal{H}(x, p, \omega) = \frac{1}{\omega} H(x, \omega(p + 1)), \quad (4.1)$$

$$\dot{X} = \mathcal{H}_p(X, P, \omega), \quad \dot{P} = -\mathcal{H}_x(X, P, \omega), \quad (X, P)|_{t=0} \in \Lambda. \quad (4.2)$$

Здесь ω – одномерный параметр, а многообразие Λ представляет собой горизонтальную прямую

$$\Lambda = \{x = \alpha \in \mathbb{R}, p = 0\}. \quad (4.3)$$

Обозначим через $X(\alpha, t, \omega)$ и $P(\alpha, t, \omega)$ решение системы (4.2); оно определяет фазовый поток $g_{\mathcal{H}}^t$, зависящий от параметра ω , переводящий многообразие Λ в многообразие $\Lambda_t(\omega) = g_{\mathcal{H}}^t \Lambda$.

Многообразие $\Lambda_t(\omega)$ покрывается конечным числом карт $\Omega_j(\omega)$ [6]. Карта называется *неособой*, если в ней выполнено условие $X_\alpha(\alpha, t, \omega) \neq 0$. Если же в карте имеется точка, в которой $X_\alpha(\alpha, t, \omega)$ обращается в нуль, то такая карта называется *особой*, а сама точка – *фокальной*.

В случае одномерного волнового уравнения лагранжево многообразие $\Lambda_t(\omega)$ при любых значениях параметров ω и t будет покрываться одной регулярной картой, и фокальные точки отсутствуют. При переходе к уравнению, отвечающему разностной схеме, эта ситуация меняется, и фокальных точек не будет только при достаточно малых значениях параметра ω , так как при $\omega \rightarrow 0$ соответствующее уравнение переходит в волновое. На рис. 1 показаны лагранжевы многообразия $\Lambda_t(\omega)$ в случае, когда $c(x) = 1 + e^{-(x+3)^2/2}$, при различных значениях параметра ω .

Чтобы определить канонический оператор на многообразии $\Lambda_t(\omega)$, построим функцию действия S :

$$S(\alpha, t, \omega) = \int_0^t (P\mathcal{H}_p(X, P, \omega) - \mathcal{H}(X, P, \omega)) ds, \quad (4.4)$$

где у функций X и P опущены аргументы (α, s, ω) .

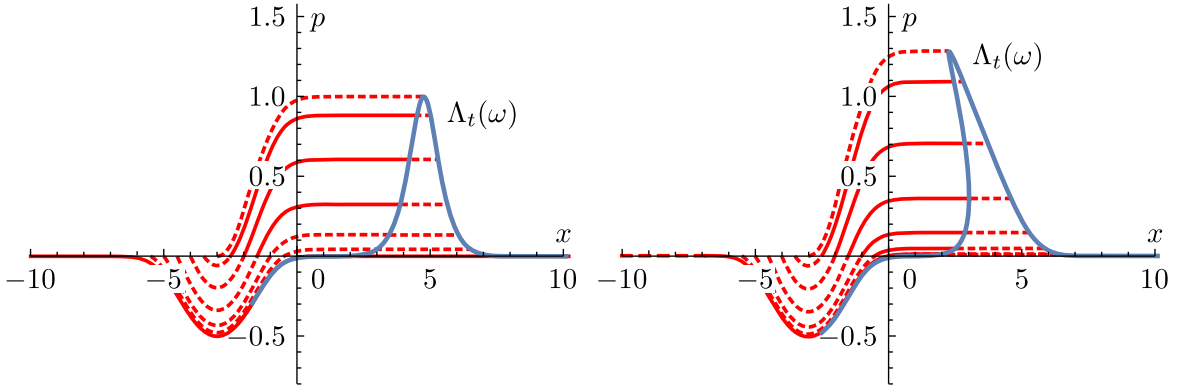


Рис. 1. Графики в фазовом пространстве (x, p) многообразий $\Lambda_t(\omega)$ при малых ω (слева) и при больших ω (справа). Пунктирными линиями показаны траектории системы Гамильтона при изменении времени от 0 до t .

Аналогичным образом что и в работах [3]–[6], учитывая лемму 3, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть многообразие $\Lambda_t(\omega)$ покрывается картами Ω_j , и пусть $g_j(\omega)$ – разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда асимптотическое решение задачи (2.7) имеет вид

$$u = 2 \operatorname{Re} \left(\widehat{T}_0 \frac{1}{2} V \left(\frac{x}{\mu} \right) \right) + O(\mu) \equiv \operatorname{Re} K_{\Lambda_t(\omega)}^{(1/\xi)} [1] V \left(\frac{x}{\mu} \right) + O(\mu), \quad \omega = \mu \xi, \quad (4.5)$$

где $K_{\Lambda_t(\omega)}^{(1/\xi)} [1] = \sum_j K_{\Omega_j}^{(1/\xi)} [g_j(\omega)]$. Если карта Ω_j – регулярная, то

$$K_{\Omega_j}^{(1/\xi)} [g_j(\omega)] = e^{-i(\pi/2)m(\alpha,t)} \frac{e^{i\xi S(\alpha,t,\omega)}}{\sqrt{|X_\alpha(\alpha,t,\omega)|}} g_j(\omega) A(\alpha,t,\omega) \Pi(\omega).$$

Здесь $\alpha = \alpha(x,t,\omega)$ является решением уравнения $x = X(\alpha,t,\omega)$.

В особой карте справедливо следующее представление:

$$K_{\Omega_j}^{(1/\xi)} [g_j(\omega)] = e^{-i(\pi/4)-i(\pi/2)m(\alpha,t)} \sqrt{\frac{|\xi|}{2\pi}} \Pi(\omega) g_j(\omega) \times \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha,t,\omega) \frac{e^{i\xi(S(\alpha,t,\omega)-P(\alpha,t,\omega)X(\alpha,t,\omega)+px)}}{\sqrt{|P_\alpha(\alpha,t,\omega)|}} dp.$$

Здесь $\alpha = \alpha(p,t,\omega)$ есть решение уравнения $p = P(\alpha,t,\omega)$.

Функция действия $S(\alpha,t,\omega)$ определяется формулой (4.4), а $m(\alpha,t)$ – индекс Маслова соответствующей карты. Амплитуда $A(\alpha,t,\omega)$ удовлетворяет уравнению переноса вдоль характеристик системы Гамильтона (4.2), и равна

$$A(\alpha,t,\omega) = \exp \left(\int_0^t H_{\text{sub}}(X, \omega(P+1)) d\tau \right), \quad (4.6)$$

$$H_{\text{sub}}(x, \omega(p+1)) = H_1(x, \omega(p+1)) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial p} H(x, \omega(p+1)), \quad (4.7)$$

где функции $H(x,p)$ и $H_1(x,p)$ определены в (2.8), (2.9).

Действие оператора $K_{\Omega_j}^{(1/\xi)}[g_j(\omega)]$ на функцию $V(x/\mu)$ в регулярной карте описывается следующим образом:

$$K_{\Omega_j}^{(1/\xi)}[g_j(\omega)]V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\mu}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\pi/2)m(\alpha,t)} g_j(\omega) A(\alpha, t, \omega) \times \widehat{V}(\omega) \Pi(\omega) \frac{e^{(i/\mu)\omega S(\alpha,t,\omega)}}{\sqrt{|X_\alpha(\alpha, t, \omega)|}} e^{(i/\mu)\omega x} d\omega. \quad (4.8)$$

В особой карте, после замены переменной интегрирования $\alpha = \alpha(p, \omega, t)$, справедливо следующее: представление

$$K_{\Omega_j}^{(1/\xi)}[g_j(\omega)]V\left(\frac{x}{\mu}\right) = e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\hbar}}{2\pi\mu} \iint_{\mathbb{R}\mathbb{R}} e^{-i(\pi/2)m(\alpha,t)} \widehat{V}(\omega) \Pi(\omega) g_j(\omega) \sqrt{|\omega|} A(\alpha, t, \omega) \times \sqrt{|P_\alpha(\alpha, t, \omega)|} e^{(i/\mu)\omega(S(\alpha,t,\omega)+P(\alpha,t,\omega)(x-X(\alpha,t,\omega)))} e^{(i/\mu)\omega x} d\alpha d\omega. \quad (4.9)$$

5. Поведение решения в окрестности переднего фронта

При $\omega \rightarrow 0$ гамильтониан $\mathcal{H}(x, p, \omega)$ переходит в $\mathcal{H}_0(x, p, \omega) = c(x)(p+1) \text{sign } \omega$, отвечающий волновому уравнению (см. например [3]). При этом малые значения параметра ω отвечают переднему фронту волны, поэтому поведение головной волны описывается с помощью волнового уравнения, с помощью (4.8).

Решение системы (4.2) строим в виде разложения по четным степеням ω :

$$X(\alpha, t, \omega) = X_0(\alpha, t) + \omega^2 X_1(\alpha, t) + \dots, \quad P(\alpha, t, \omega) = P_0(\alpha, t) + \omega^2 P_1(\alpha, t) + \dots. \quad (5.1)$$

Подстановка (5.1) в (4.2) и разложение по ω самого гамильтониана приводят к следующей системе уравнений:

$$\dot{X}_0 = c(X_0) \text{sign } \omega, \quad \dot{P}_0 = -c'(X_0)(P_0 + 1) \text{sign } \omega, \quad X_0|_{t=0} = \alpha, \quad P_0|_{t=0} = 0, \quad (5.2)$$

$$\dot{X}_1 = X_1 c'(X_0) \text{sign } \omega - \frac{\hbar^2}{8\mu^2} (P_0 + 1)^2 c(X_0) (1 - \delta^2 c^2(X_0)) \text{sign } \omega, \quad X_1|_{t=0} = 0. \quad (5.3)$$

Пусть функция $\alpha(x, t, \omega)$ является решением уравнения $X(\alpha, t, \omega) = x$, тогда для нее справедливо разложение

$$\alpha(x, t, \omega) = \alpha_0(x, t) - \omega^2 X_1(\alpha_0, t) (P_0(\alpha_0, t) + 1) + \omega^4 f_1(x, t, \omega),$$

где $\alpha_0(x, t)$ является решением уравнения $X_0(\alpha_0, t) = x$, а функция $f_1(x, t, \omega)$ ограничена равномерно по всем переменным в окрестности точки $\omega = 0$.

Вычисляя произведение $X_1(\alpha_0, t) (P_0(\alpha_0, t) + 1)$, для функции действия получается разложение

$$S(x, t, \omega) = \alpha_0(x, t) - x + \omega^2 \text{sign } \omega \left(\frac{\hbar^2}{24\mu^2} \right) \Theta(\alpha_0(x, t), t) + \omega^4 \left(\frac{\hbar^4}{\mu^4} \right) f_2(x, t, \omega),$$

где

$$\Theta(\alpha_0, t) = c(\alpha_0) \int_0^t (P_0(\alpha_0, s) + 1)^2 (1 - \delta^2 c^2(X_0(\alpha_0, s))) ds, \tag{5.4}$$

а функция f_2 , аналогично f_1 , равномерно ограничена в окрестности $\omega = 0$.

В окрестности $\omega = 0$ для функции H_{sub} справедливо разложение

$$H_{\text{sub}}(X, P, \omega) = -\frac{1}{2} \text{sign } \omega c'(X_0) + \omega^2 \left(\frac{h^2}{\mu^2}\right) f_3(x, t, \omega),$$

и для амплитуды $A(\alpha_0, t, \omega)$ получается формула

$$A(\alpha_0(x, t), t, \omega) = \sqrt{\frac{c(\alpha_0(x, t))}{c(x)}} + \omega^2 \frac{h^2}{\mu^2} f_3(x, t, \omega), \tag{5.5}$$

где функция f_3 , аналогично f_1 и f_2 , равномерно ограничена в окрестности точки $\omega = 0$.

Пусть окрестность точки $\omega = 0$ при $0 \leq t \leq T$ для любого конечного T отвечает регулярной карте $\Omega_0 = [-\omega_0, \omega_0]$, и пусть функция $g_0(\omega)$ из разбиения единицы отвечает этой карте. Отметим, что индекс Маслова этой карты равен нулю. В результате, согласно (4.8), асимптотика решения в окрестности переднего фронта принимает вид

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{h}{2\pi\mu} \frac{c(\alpha_0)}{c(x)}} \text{Re} \int_{-\pi(\mu/h)}^{\pi(\mu/h)} g_0(\omega) \widehat{V}(\omega) e^{(i/\mu)(\omega\alpha_0 + \omega^3 \text{sign } \omega (h^2/24\mu^2)\Theta(\alpha_0, t))} d\omega + O\left(\mu + \omega_0^3 \frac{h^2}{\mu^2}\right), \tag{5.6}$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(x, t)$.

ЛЕММА 4. Пусть при $t \in [0, T]$ выполнено неравенство $|\Theta(\alpha_0, t)| \leq M$, и пусть выполнено соотношение $\mu = h^\gamma$, $0 \leq \gamma < 1$, и пусть $\omega_0 = (\mu/h^{2/3})$. Тогда при $|\alpha_0(x, t)| \leq h^{2/3}(M/8)$ справедливо равенство

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{c(\alpha_0)}{c(x)} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{V}(\omega) e^{(i/\mu)(\omega\alpha_0 + \omega^3 \text{sign } \omega (h^2/24\mu^2)\Theta(\alpha_0, t))} d\omega + O(\mu), \tag{5.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\omega_0 = \mu/h^{2/3}$, величина $\omega_0^3(h^2/\mu^2)$ имеет порядок $O(\mu)$. В силу того, что степень γ строго меньше единицы, можно воспользоваться леммой 2 и соотношением (3.5) и перейти в интеграле (5.6) с точностью $O(\mu)$ от функции $\widehat{V}(\omega)$ к функции $\widetilde{V}(\omega)$. При условии, что $|\alpha_0| \leq h^{2/3}(M/8)$, стационарные точки фазы этого интеграла будут расположены в карте Ω_0 . Отсюда, согласно методу стационарной фазы (см. например [16]), основной вклад в асимптотику интеграла (5.7) будет вносить интегрирование в карте Ω_0 . Интеграл по $\mathbb{R} \setminus \Omega_0$, так как функция $V(y) \in S(\mathbb{R})$, имеет порядок $O(\mu)^\infty$.

В окрестности переднего фронта справедливо равенство $X_0(\alpha_0, t) = x + O(\omega_0^2)$, откуда следует, что величина ω_0^2 определяет окрестность переднего фронта в конфигурационном пространстве.

При $\gamma \approx 0$, т.е. в ситуации длинных по отношению к h волн, выполнено соотношение $\omega_0 = O(1/h^{2/3})$; более того при таких значениях параметра ω можно опустить

и кубическую часть в фазе интеграла (5.7), так как она имеет порядок $O(h^2)$. При этом окрестность переднего фронта имеет порядок $O(1/h^{4/3})$. После применения формулы Сохоцкого мы получаем (2.2).

В случае $\mu \approx h^{2/3}$ (средние волны) возникает слабая дисперсия, обусловленная кубическим членом в фазе интеграла (5.7), при этом следующий член разложения фазы, отвечающий ω^5 , имеет порядок $O(\mu)$, и асимптотика в окрестности переднего фронта дается формулой (5.7).

Если $\tilde{V}(\omega) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\omega^2/2}$, интеграл (5.7) можно точно вычислить. Для этого в нем следует сделать подряд следующие замены:

$$\omega = \eta - i \left(\frac{4\mu^3}{h^2\Theta(\alpha_0, t)} \right) \text{sign } \omega, \quad \eta = \text{sign } \omega p \left(\frac{2\mu}{\sqrt[3]{h^2\Theta(\alpha, t)}} \right).$$

В результате получается представление асимптотики решения с помощью функций Эйри:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{\mu}{h^{2/3}} \frac{c(\alpha_0^+(x, t))}{c(x)\sqrt[3]{\Theta(\alpha_0^+, t)}} e^{\frac{4\mu^3}{h^2\Theta(\alpha_0^+, t)} \left(\frac{\alpha_0^+(x, t)}{\mu} + \frac{4\mu^3}{3h^2\Theta(\alpha_0^+, t)} \right)} \text{Ai}(y^+(x, t)) \\ & + \frac{\mu}{h^{2/3}} \frac{c(\alpha_0^-(x, t))}{c(x)\sqrt[3]{\Theta(\alpha_0^-, t)}} e^{\frac{4\mu^3}{h^2\Theta(\alpha_0^-, t)} \left(-\frac{\alpha_0^-(x, t)}{\mu} + \frac{4\mu^3}{3h^2\Theta(\alpha_0^-, t)} \right)} \text{Ai}(y^-(x, t)) + O(\mu), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где мы обозначили

$$y^\pm(x, t) = \frac{2\mu}{\sqrt[3]{h^2\Theta(\alpha_0^\pm, t)}} \frac{\pm\alpha_0^\pm(x, t)}{\mu} + \frac{2\mu^3}{h^2} \Theta(\alpha_0^\pm, t).$$

Если $\mu = h$ (короткие по отношению к h волны), лемма 4 не применима. При этом $\omega_0 = O(\mu^{1/3})$, и окрестность переднего фронта имеет порядок $O(\mu^{2/3})$. С учетом определения (3.1) функции $\hat{V}(\omega)$, формула (5.6) представима в виде сходящегося ряда из интегралов, которые в окрестности переднего фронта с точностью $O(\mu)$ можно заменить на функции Эйри. Для вычисления главной части асимптотического решения достаточно брать конечное число слагаемых в ряде с номерами от $-j_0$ до j_0 . В результате получается следующая асимптотика:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sqrt[3]{\mu} \sum_{j=-j_0}^{j_0} V(j) \left(\frac{c(\alpha_0^+(x, t))}{c(x)\sqrt[3]{\Theta(\alpha_0^+, t)}} \text{Ai} \left(\frac{\alpha_0^+(x, t) - j\mu}{\mu^{2/3}} \frac{2}{\sqrt[3]{\Theta(\alpha_0^+, t)}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{c(\alpha_0^-(x, t))}{c(x)\sqrt[3]{\Theta(\alpha_0^-, t)}} \text{Ai} \left(-\frac{\alpha_0^-(x, t) - j\mu}{\mu^{2/3}} \frac{2}{\sqrt[3]{\Theta(\alpha_0^-, t)}} \right) \right) + O(\mu). \end{aligned} \quad (5.9)$$

С учетом поведения функции $V(y)$ на бесконечности число j_0 можно оценить, исходя из условия $V(j) = \mu$. Если $V(y) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-y^2/2}$, то $j_0 \approx \sqrt{2 \ln(1/\mu)}$, и при $\mu = 0.01$ получается $j_0 \approx 3$.

5.1. Пример с постоянными коэффициентами. В случае постоянного коэффициента $c(x) \equiv c$ формула (4.8) дает точное решение и представляет собой пре-

образование Фурье. В окрестности переднего фронта справедливы следующие соотношения:

$$X_0(\alpha_0, t) = \alpha_0 + ct \operatorname{sign} \omega, \quad P_0(t) \equiv 0, \\ X_1 = -\operatorname{sign} \omega \frac{h^2}{8\mu^2} \Theta(t), \quad \Theta(t) = ct(1 - c^2\delta^2).$$

Функция $\alpha_0(x, t) = x - ct \operatorname{sign} \omega$, функция

$$S = -ct \operatorname{sign} \omega + \omega^2 \operatorname{sign} \omega \left(\frac{h^2}{24\mu^2} \right) \Theta(t) + O\left(\frac{\omega^4 h^4}{\mu^4} \right),$$

а амплитуда $A(\alpha_0, t, \omega) \equiv 1$.

В случае длинных волн, когда $\mu \approx h^0$, асимптотика передней волны описывается известной формулой д’Аламбера, в которую переходит формула (2.2).

Если $\mu = h^{2/3}$, то формула (5.7) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\omega) e^{(i/\mu)(\omega(x-ct \operatorname{sign} \omega) + \omega^3 \operatorname{sign} \omega (h^2/24\mu^2) ct(1-\delta^2 c^2))} d\omega + O(\mu). \tag{5.10}$$

В случае, если начальная функция имеет вид гауссовой экспоненты, то согласно (5.8) имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt[3]{\Theta(t)}} \left(e^{(4/\Theta(t))((x-ct)/\mu + 4/(3\Theta(t)))} \operatorname{Ai} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{\Theta(t)}} \left(\frac{x-ct}{\mu} + \frac{2}{\Theta(t)} \right) \right) + e^{(4/\Theta(t))(-(x+ct)/\mu + 4/(3\Theta(t)))} \operatorname{Ai} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{\Theta(t)}} \left(-\frac{x+ct}{\mu} + \frac{2}{\Theta(t)} \right) \right) \right) + O(\mu). \tag{5.11}$$

На рис. 2 представлены графики численного решения и функции (5.11) в моменты времени $t = 3$ и $t = 14$ при условии, что $\mu = h^{2/3}$ и $c = 1$.

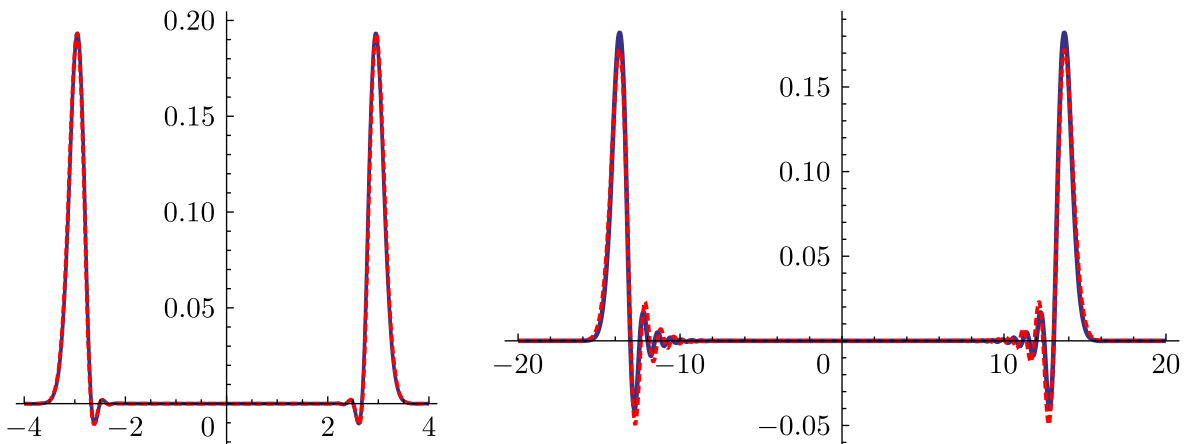


Рис. 2. Графики формулы (5.11) (пунктирная линия) и численного (непрерывная линия) при $\mu = h^{2/3}$, $h = 0.04$, $c = 1$ для начальной функции в виде гауссовой экспоненты в момент времени $t = 3$ (слева) и $t = 14$ (справа).

В случае $\mu = h$ согласно (5.9) асимптотика решения приобретает вид

$$u(x, t) = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\Theta(t)}} \sum_{j=-j_0}^{j_0} V(j) (\text{Ai}(y^+(x, t)) + \text{Ai}(y^-(x, t))) + O(\mu), \quad (5.12)$$

где мы обозначили

$$y^\pm(x, t) = \pm 2 \left(\frac{(x \mp ct) - j\mu}{\mu^{2/3}} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\Theta(t)}}.$$

На рис. 3 представлены графики волны в окрестности переднего фронта, полученные с помощью численного решения явной разностной схемы и функции (5.12) для начальных функций в виде гауссовой экспоненты и $V(y) = y/\cosh^2 y$.

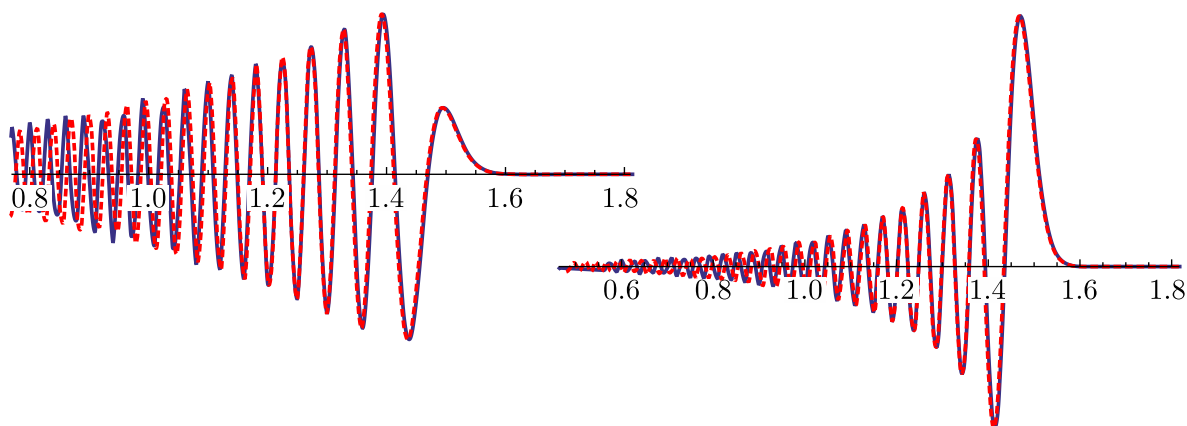


Рис. 3. Графики в окрестности переднего фронта волны частичных сумм (5.12) при $j = -3, \dots, 3$ (пунктирная линия) и численного решения (непрерывная линия) для начальных функций $V(y) = y/\cosh^2 y$ (слева) и гауссовой экспоненты (справа) при $c = 1$, $t = 1.5$ и при $h = \mu = 0.01$.

5.2. Вертикальное лагранжево многообразие и передний фронт волны.

Формальный подход, основанный на записи разностной схемы (2.3) с помощью операторов сдвига, приводит к следующей задаче:

$$\sin^2 \left(\frac{h\delta}{2\mu} \left(-i\mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) u(x, t) = \delta^2 c^2(x) \sin^2 \left(\frac{h}{2\mu} \left(-i\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) u(x, t), \quad u(x, 0) = V \left(\frac{x}{\mu} \right).$$

С учетом теоремы I.12 в [14] ее можно привести к задачам

$$i\mu \frac{\partial}{\partial t} u^\mp = H^\pm(x, \hat{p})u - i\mu H_1^\pm(x, \hat{p})u^\pm, \quad u^\mp|_{t=0} = \frac{1}{2} V \left(\frac{x}{\mu} \right), \quad (5.13)$$

где функции $H^\pm(x, p)$ и $H_1^\pm(x, p)$ определяются по формулам

$$H^\pm(x, p) = \pm 2 \frac{\mu}{\delta h} \arcsin \left(\delta c(x) \sin \frac{h}{2\mu} p \right), \quad (5.14)$$

$$H_1^\pm(x, p) = \pm \delta^2 c^2(x) c'(x) \frac{\sin^2(h/2\mu)p \cos(h/2\mu)p}{(1 - \delta^2 c^2(x) \sin^2(h/2\mu)p)^{3/2}}. \quad (5.15)$$

Здесь оператор $\widehat{p} = -i\mu(\partial/\partial x)$ действует первым, а потом – оператор умножения на $c(x)$. Функции $H^\pm(x, p)$ мы будем называть эффективными гамильтонианами (или просто гамильтонианами).

Вообще говоря, при вычислении функции \arcsin мы получаем счетное число задач, отвечающих ветвям арксинуса. Однако можно задать начальное условие только на главной ветви арксинуса, задав на остальных тривиальные условия. Сужение на решетку решения исходной задачи не зависит от выбора способа задания начальных условий.

Цель этого раздела показать, что метод построения асимптотики головной волны, основанный на таком формальном подходе приводит к тому же результату, что и метод, предложенный Масловым, Даниловым и Жевандровым [4]–[6].

Начальная функция $V(x/\mu)$ определяется с помощью преобразования Фурье, что совпадает с каноническим оператором Маслова на вертикальном многообразии $\Lambda_0 = \{x = 0, p = \rho \in \mathbb{R}\}$:

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \sqrt{\mu}e^{-i\pi/4}K_{\Lambda_0}^\mu[\widetilde{V}(p)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{V}(p)e^{(i/\mu)px} dp.$$

Системы Гамильтона имеют вид

$$\dot{x} = H_p^\pm(x, p), \quad \dot{p} = -H_x^\pm(x, p), \quad (x, p)|_{t=0} \in \Lambda_0. \tag{5.16}$$

Обозначим через $X^-(\rho, t)$ и $P^-(\rho, t)$ решение системы, отвечающей отрицательному знаку гамильтониана, а через $X^+(\rho, t)$ и $P^+(\rho, t)$ – решение, отвечающее положительному знаку.

На рис. 4 показаны лагранжевы многообразия Λ_t^\pm , полученные с помощью сдвига вертикального многообразия Λ_0 при $c(x) = 1 + e^{-(x+3)^2/2}$ по траекториям систем (5.15).

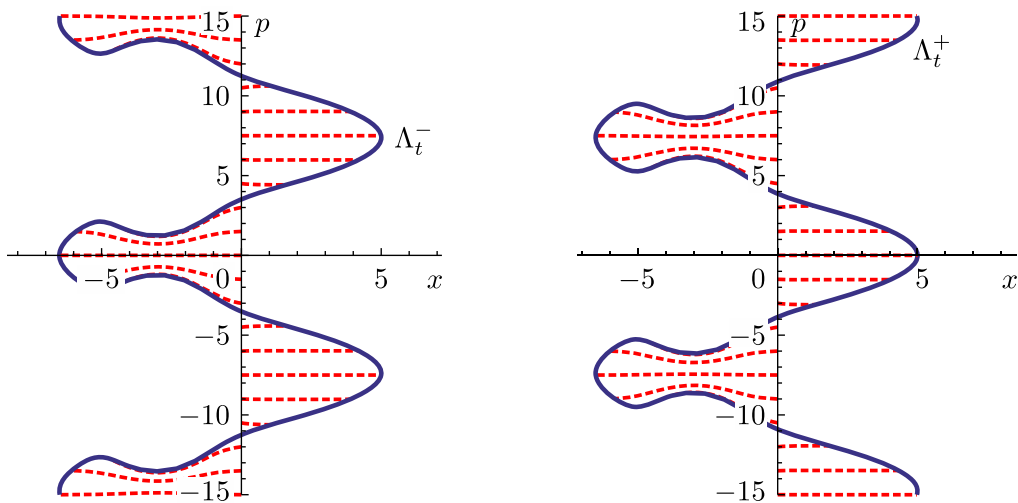


Рис. 4. Графики многообразий Λ_t^\pm (сплошная линия) в фазовом пространстве (x, p) после сдвига вертикального многообразия Λ_0 по траекториям (пунктирные линии) систем Гамльтона (5.15).

Передний фронт волны получается объединением в фиксированный момент времени концов траекторий, выходящих из окрестностей точек $p_k + \rho \in \Lambda_0$, где $p_k =$

$2\pi k(\mu/h)$, $|\rho| \ll 1$ и $k \in \mathbb{Z}$ [9], [10]. При замене $p \rightarrow p - 2\pi(\mu/h)$ система (5.15), отвечающая положительному знаку, переходит в систему, отвечающую отрицательному знаку гамильтониана.

Мы предполагаем, что в окрестности точки $\rho = 0$ для решений системы (5.15) справедливо разложение:

$$X^\pm(\rho, t) = X^{0\pm}(t) + \rho^2 X^{1\pm}(t) + O(\rho^4), \quad P^\pm(\rho, t) = \rho P^{0\pm}(t) + O(\rho^3),$$

что приводит к системе уравнений на функции $X^{0\pm}$, $X^{1\pm}$ и $P^{0\pm}$

$$\dot{X}^{0\pm} = \pm c(X^{0\pm}), \quad \dot{P}^{0\pm} = \mp c'(X^{0\pm})P^{0\pm}, \quad X^{0\pm}|_{t=0} = 0, \quad P^{0\pm}|_{t=0} = 1, \quad (5.17)$$

$$\dot{X}^{1\pm} = \pm X^{1\pm} c'(X^{0\pm}) \mp \frac{h^2}{8\mu^2} c(X^{0\pm})(P^{0\pm})^2(1 - \delta^2 c^2(X^{0\pm})), \quad X^{1\pm}|_{t=0} = 0. \quad (5.18)$$

Видно, что асимптотическое поведение волны в окрестности переднего фронта описывается волновым уравнением, окрестности точек переднего фронта покрываются фокальными картами, и их индекс Маслова равен нулю (см. например [20]).

Введем функции

$$\theta^\pm(t) = c(0) \int_0^t (P^{0\pm}(\tau))^2 (1 - \delta^2 c^2(X^{0\pm}(\tau))) d\tau. \quad (5.19)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $V(y) \in S(\mathbb{R})$ и пусть $x = nh$. Тогда асимптотика в окрестности переднего фронта имеет вид

$$u_{fr}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{\pm} \frac{c(0)}{c(X^{0\pm}(t))} \int_{\mathbb{R}} f(\rho) \tilde{V}(p_k + \rho) e^{(i/\mu)\Phi_0^\pm(x, \rho, t)} d\rho, \quad (5.20)$$

где

$$\Phi_0^\pm(x, \rho, t) = \rho P^{0\pm}(t)(x - X^{0\pm}(t)) \pm \rho^3 \left(\frac{h^2}{24\mu^2} \right) \theta^\pm(t),$$

а $f(\rho)$ – срезающая функция в окрестности точки $\rho = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположений о поведении функции $V(y)$ ряд (5.20) сходится абсолютно.

В силу периодичности гамильтонианов для решения систем (5.15) справедливы соотношения

$$X^-(\rho + p_k, t) = \begin{cases} X^-(\rho, t), & k = 2n, \\ X^+(\rho, t), & k = 2n + 1, \end{cases}$$

$$P^-(\rho + p_k, t) = \begin{cases} P^-(\rho, t) + p_k, & k = 2n, \\ P^+(\rho, t) + p_k, & k = 2n + 1. \end{cases}$$

Поэтому для фазы $\Phi^\pm(x, \rho, t) = S^\pm(\rho, t) + P^\pm(x - X^\pm)$ выполнено равенство

$$\Phi^-(x, \rho + p_k, t) = \begin{cases} \Phi^-(x, \rho, t) + p_k x, & k = 2n, \\ \Phi^+(x, \rho, t) + p_k x, & k = 2n + 1. \end{cases}$$

Здесь

$$S^\pm(\rho, t) = \int_0^t [P^\pm(\rho, s)H_p^\pm(X^\pm, P^\pm) - H^\pm(X^\pm, P^\pm)] ds$$

– функция действия.

По определению канонического оператора Маслова [8], [9] главная часть асимптотического решения в окрестности переднего фронта имеет вид

$$u_{fr}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Re} e^{(i/\mu)p_k x} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\rho) A^+(\rho + p_k) \sqrt{|P_\rho^+(\rho, t)|} e^{(i/\mu)\Phi^+(x, \rho, t)} d\rho + \int_{\mathbb{R}} f(\rho) A^-(\rho + p_k) \sqrt{|P_\rho^-(\rho, t)|} e^{(i/\mu)\Phi^-(x, \rho, t)} d\rho \right), \quad (5.21)$$

где амплитуда удовлетворяет уравнению переноса вдоль характеристик

$$\frac{d}{dt^\pm} A^\pm - H_{\text{sub}}^\pm(x, p)|_{\Lambda_t^\pm} A^\pm = 0, A^\pm|_{t=0} = \tilde{V}(\rho), \quad H_{\text{sub}}^\pm(x, p) = H_1^\pm(x, p) - \frac{1}{2} H_{px}^\pm(x, p),$$

где d/dt^\pm – дифференцирование в силу вдоль траекторий соответствующих систем Гамильтона.

В окрестности точки $\rho = 0$ справедливы представления

$$\Phi^\pm(x, \rho, t) \sim \rho P^{0\pm}(t)(x - X^{0\pm}(t)) \pm \rho^3 \frac{\hbar^2}{24\mu^2} \theta^\pm(t), \quad H_{\text{sub}}^\pm(\rho, t) \sim \mp \frac{1}{2} c'(X^{0\pm}),$$

и амплитуда в окрестности переднего фронта $A^\pm(\rho, t) \sim \tilde{V}(\rho) \sqrt{c(0)/c(X^{0\pm})}$. На сетке $x \in \omega_h$ экспоненты $e^{(i/\mu)p_k x} = 1$ для любого целого k , и подстановка полученных разложений в (5.21) приводит к (5.20).

ТЕОРЕМА 3. *В окрестности переднего фронта волны формулы (5.6) и (5.20) определяют одну и ту же функцию на сетке $x \in \omega_h$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При сравнении указанных формул мы будем различать решения соответствующих им систем Гамильтона с помощью нижнего и верхнего индексов. А именно, нижним индексом будем отмечать решение системы Гамильтона для нестандартных характеристик (5.2), (5.3), а верхним индексом мы будем отмечать решение системы Гамильтона с начальными условиями на вертикальном многообразии (5.17), (5.18).

При $t = 0$ формула (5.6) дает функцию $V(x/\mu)$, которая локализована в окрестности точки $x = 0$ (или $\alpha_0(x, 0) = x$). С течением времени это возмущение остается локализованным в окрестности точки $x = x(t)$, определяемой из уравнения $\alpha_0(x, t) = 0$. В окрестности $\alpha_0(x, t) = 0$ справедливо разложение

$$X_0(\alpha_0, t) = X_{00}(t) + \alpha_0(x, t)X_{01}(t) + O(\alpha_0^2), \quad P_0(\alpha_0, t) = P_{00}(t) + O(\alpha_0).$$

Отсюда следует, что $\alpha_0(x, t) = P_{00}(t)(x - X_{00}(t))$. Также, при замене $P = P_0 + 1$ в окрестности $\alpha = 0$ система (5.2), (5.3) переходит в систему уравнений (5.17), (5.18). Из этого следует, что $X_{00}(t) = X^0(t)$ и $P_{00}(t) = P^0(t)$, а также совпадение фаз в интегральных представлениях асимптотики в окрестности переднего фронта. Учет равенства $X^0(t) = x$ в окрестности $\alpha_0 = 0$, а также применение формулы (3.4) к (5.20) при сужении на решетку, приводят к утверждению теоремы.

6. Приложение. Переход от конечно-разностного уравнения к уравнению типа Шрёдингера

В этом разделе мы кратко описываем схему Данилова и Маслова из работ [4], [5], приводящую к выводу задачи (2.7) из разностной схемы (2.4).

С помощью операторов сдвига по x и по t схеме (2.4) ставится в соответствие система (2.5) уравнений для непрерывных функций

$$\mathcal{L}_1(x, h\widehat{\xi}; h)e^{\delta h \partial/\partial t}U = \mathcal{L}_2(x, h\widehat{\xi}; h)U, \quad U|_{t=0} = \begin{pmatrix} V\left(\frac{x}{\mu}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U = (u, w)^T.$$

Согласно [5] основную роль в построении асимптотики системы играют собственные числа λ^\pm матрицы $A = \mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$. Требование устойчивости разностной схемы $|\lambda^\pm| \leq 1$ (что эквивалентно условию $\delta < 1/c_M$) приводит к тому, что собственные числа являются комплексносопряженными и равны по модулю единице. Операторы, отвечающие собственным числам, равны

$$\lambda^\pm(x, h\widehat{\xi}) = f^\pm(a(x, h\widehat{\xi})), \quad f^\pm(z) = 1 - \frac{z^2}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{z^2(4-z^2)},$$

где оператор $a^2(x, h\widehat{\xi})$ определен формулой (2.6). Операторы $a^2(x, h\widehat{\xi})$ и $4 - a^2(x, h\widehat{\xi})$ являются неотрицательно определенными в L_2 со скалярным произведением с весом $1/c^2(x)$ и с областью определения на пространстве Шварца. Символ оператора \widehat{a}^2 обращается в нуль при $\xi = 0$, и при этом $\lambda^+ = \lambda^-$, что связано с имеющимся в этой задаче эффектом пересечения характеристик. Построение параметрикса позволяет обойти особенности, возникающие в этом случае (см. например [6]). Символ оператора $4 - \widehat{a}^2$, в силу условия $\delta < 1/C_M$, не обращается в нуль ни при каких значениях ξ .

Согласно теореме I.12 из [14] символ оператора $\lambda^\pm(x, h\widehat{\xi})$ имеет следующее разложение:

$$\lambda(x, p) = f(a(x, p)) - ihf''(a(x, p))a_x(x, p)a_p(x, p) + O(h^2).$$

Диагонализация системы приводит к следующим двум задачам

$$e^{\delta h \partial/\partial t}v^\pm = \lambda^\pm(x, h\widehat{\xi})v^\pm, \quad v^\pm|_{t=0} = \pm iW\left(\frac{x}{\mu}\right),$$

$$W = \left(4 - a^2\left(x, \frac{h}{\mu}\widehat{p}\right)\right)^{-1/2} V\left(\frac{x}{\mu}\right),$$

где $(v^+, v^-)^T = M^{-1}(x, \widehat{p})(u, w)^T$, M – матрица из собственных векторов матрицы A , а верхний индекс T обозначает транспонирование. Взятие логарифма с выбором главной ветви, теорема I.12 из [14] и замена функций $u^+ = iv^-$, $u^- = -iv^+$, приводят к следующим уравнениям:

$$ih\delta \frac{\partial}{\partial t}u^\pm = \pm \arccos\left(1 - \frac{a^2(x, h\widehat{\xi})}{2}\right)u^\pm - ih\left(\pm 2 \frac{\sqrt{a^2(x, h\widehat{\xi})a_x(x, h\widehat{\xi})a_p(x, h\widehat{\xi})}}{(4 - a^2(x, h\widehat{\xi}))^{3/2}}\right)u^\pm, \\ u^\pm|_{t=0} = W\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

(6.1)

Умножение полученного выражения на μ и переход к операции $\hat{p} = -i\mu \partial/\partial x$ приводят к операторам (2.8), (2.9). В силу формулы коммутации канонического оператора и псевдодифференциального справедливо равенство $W(x/\mu) = (1/2)V(x/\mu) + O(\mu)$, поэтому если в (6.1) заменить начальную функцию $W(x/\mu)$ на $(1/2)V(x/\mu)$, то главная часть асимптотики не изменится, что приводит к задачам (2.7).

Вернемся к исходной задаче (2.5) и обсудим способ задания начальных условий. Для того, чтобы полностью определить решение этой задачи при $t \in [0, T]$, начальное условие следует задать на всем полуинтервале $t \in [0, \tau)$:

$$\mathcal{L}_1 e^{\tau \partial/\partial t} U = \mathcal{L}_2 U, \quad U|_{t \in [0, \tau)} = U_0(x, t), \quad U_0(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U_{0n}(x) e^{(i/\tau) 2\pi n t}.$$

Для определения функции $U(x, t)$ на интервале $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, получается равенство

$$U(x, t + k\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2)^k U_{0n}(x) e^{(i/\tau) 2\pi n t}, \quad t \in [0, \tau).$$

В точках $t_k = k\tau$ это выражение принимает вид $U(x, k\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2)^k U_{0n}(x)$, которое в узлах стеки совпадает с решением задачи

$$\mathcal{L}_1 e^{\tau \partial/\partial t} U = \mathcal{L}_2 U, \quad U|_{t \in [0, \tau)} = U^0(x), \quad U^0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U_{0n}(x),$$

при условии равномерной сходимости ряда, определяющего начальное условие. Это и означает, что при решении поставленной задачи можно ограничиться только главной ветвью логарифма.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, “Нестандартные характеристики в асимптотических задачах”, *УМН*, **38:6** (234) (1983), 3–36.
- [2] В. П. Маслов, “Характеристики псевдодифференциальных операторов и разностных схем”, *Международный конгресс математиков в Ницце – 1970. Доклады советских математиков*, Наука, 1972, 188–202.
- [3] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [4] В. П. Маслов, В. Г. Данилов, “Принцип двойственности Понтрягина для вычисления, эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах. I”, *Современные проблемы математики. Дифференциальные уравнения, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **166**, 1984, 130–160.
- [5] В. П. Маслов, В. Г. Данилов, “Принцип двойственности Понтрягина для вычисления эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах. II”, *Современные проблемы математики. Математический анализ, алгебра, топология*, Тр. МИАН СССР, **167**, 1985, 96–107.
- [6] В. Г. Данилов, П. Н. Жевандров, “О методе Маслова построения комбинированных асимптотик для h -псевдодифференциальных уравнений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53:2** (1989), 411–424.
- [7] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [8] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. И. Шафаревич, “Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81:2** (2017), 53–96.

- [9] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazakinskii, “Propagation of a linear wave created by a spatially localized perturbation in a regular lattice and punctured Lagrangian manifold”, *Russ. J. Math. Phys.*, **24**:1 (2017), 127–133.
- [10] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, “Проколотые лагранжевы многообразия и асимптотические решения линейных уравнений волн на воде с локализованными начальными условиями”, *Матем. заметки*, **101**:6 (2017), 936–943.
- [11] L. N. Trefethen, “Group velocity in finite difference schemes”, *SIAM Rev.*, **24**:2 (1982), 113–136.
- [12] R. Vichnevetsky, J. B. Bowles, *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, 1982.
- [13] R. C. Y. Chin, G. W. Hedstrom, “A dispersion analysis for difference schemes: tables of generalized Airy functions”, *Math. Comp.*, **32**:144 (1978), 1163–1170.
- [14] V. E. Nazakinskii, V. E. Shatalov, B. Yu. Sternin, *Methods of Noncommutative Analysis. Theory and Applications*, Walter de Gruyter, Berlin, 1996.
- [15] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [16] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [17] С. Ю. Доброхотов, П. Н. Жевандров, В. П. Маслов, А. И. Шафаревич, “Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **49**:4 (1991), 31–46.
- [18] С. Ю. Доброхотов, П. Н. Жевандров, “Нестандартные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде”, *Функци. анализ и его прил.*, **19**:4 (1985), 43–54.
- [19] S. Yu. Dobrokhotov, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, “Localized waves and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221.
- [20] С. А. Сергеев, “Асимптотические решения одномерного линеаризованного уравнения Кортевега–де Фриза с локализованными начальными данными”, *Матем. заметки*, **102**:3 (2017), 445–461.

С. А. Сергеев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
Российской академии наук, г. Москва;
Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный,
Московская обл.
E-mail: sergeevse1@yandex.ru

Поступило

11.12.2018

Принята к публикации

16.01.2019