Ю. В. Садовничий, О пополнении метрических пространств вероятностных мер, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, номер 5, 28–32

15. Щепин Е. В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров//Успехи матем. наук. 1976. 31, № 5. 191—226.
16. Федорчук В. В. Некоторые функторы, ретракты и многообразия//IV Тираспольский симп. по общей топол. и ее прил. Кишинев, 1979. 148—150.

Поступила в редакцию
17.05.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 5

УДК 515.12

Ю. В. Садовничий

О ПОПОЛНЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Для тихоновского пространства X через $P(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер $\mu\in P(bX)$ (где bX — произвольное бикомпактное расширение, например расширение Стоуна—Чеха пространства X), носители (см. [1, гл. 7, § 3]) которых лежат в X. Это множество наделяется топологией, индуцируемой $*$-слабой топологией бикомпакта $P(bX)$. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\operatorname{diam} X<\infty$. Определим метрику $P(\rho)$ на $P(X)$ следующим образом:

$$P(\rho)(\mu_1, \mu_2)=\inf\left\{\int\limits_{X\times X} \rho(x_1, x_2)\,d\lambda : \lambda\in\Lambda(\mu_1, \mu_2)\right\},$$

где $\Lambda(\mu_1, \mu_2)=\{\lambda\in P(X\times X): pr_i(\lambda)=\mu_i,\ i=1, 2\}$. Здесь $pr_i=P(p_i)$, где $p_i: X\times X\to X$ — проектирование на i-й сомножитель.

В [2] было доказано, что для произвольного метрического пространства (X, ρ) метрика $P(\rho)$ порождает на $P(X)$ $*$-слабую топологию. Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 1. *Если $f:(X_1, \rho_1)\to(X_2, \rho_2)$ — нерастягивающее отображение метрических пространств, то отображение $P(f):(P(X_1), P(\rho_1))\to(P(X_2), P(\rho_2))$ также нерастягивающее.*

Эта лемма непосредственно вытекает из леммы 8 работы [3].

Для метрического пространства (X, ρ) через $\mathrm{Cpl}(X, \rho)$ обозначим его пополнение, а через $C_\rho X$ — компактификацию Смирнова (см. [4]) по метрической близости или, что то же самое, пополнение Сэмюэля (см. [5]) по прекомпактной равномерности на X, определяемой метрикой ρ.

Для равномерно непрерывного отображения $f:(X_1, \rho_1)\to(X_2, \rho_2)$ через $\mathrm{Cpl}(f)$ и $\delta(f)$ обозначим продолжения отображения f на метрические пополнения и компактификации по метрической близости соответственно. Верна

Теорема А (см. [6, гл. II]). *Для произвольного метрического пространства (X, ρ) компактификации $C_\rho X$ и $C_\rho(\mathrm{Cpl}(X, \rho))$ естественным образом совпадают, а для произвольного равномерно непрерывного отображения $f:(X_1, \rho_1)\to(X_2, \rho_2)$ имеем $\mathrm{Cpl}(f)=\delta(f)|_{\mathrm{Cpl}(X_1,\rho_1)}$.*

Цель настоящей работы — исследовать пополнения типа Cpl и C_ρ применительно к метрическому пространству $(P(X), P(\rho))$. Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Для произвольного метрического пространства (X, ρ) существует единственное непрерывное отображение*

$$j: C_{P(\rho)}P(X)\to P(C_\rho X),$$

продолжающее естественное вложение

$$i:(P(X),\ P(\rho))\to P(C_\rho X)$$

и равномерно непрерывное на $\mathrm{Cpl}(P(X),\ P(\rho))$.

Доказательство. Единственность отображения j вытекает из того, что оно однозначно определено на всюду плотном подпространстве $P(X)$ бикомпакта $C_{P(\rho)}P(X)$.

Для доказательства существования рассмотрим множество $R=\{\rho_\alpha:\alpha\in A\}$ всех вполне ограниченных псевдометрик на X с условием $\rho_\alpha\leqslant\rho$. На множестве A введем частичный порядок: $\alpha\geqslant\beta\Leftrightarrow\rho_\alpha\geqslant\rho_\beta$; $\alpha,\ \beta\in A$. Через X/ρ_α обозначим фактормножество множества X по следующему отношению эквивалентности:

$$x\sim x'\Leftrightarrow\rho_\alpha(x,\ x')=0.$$

Тогда псевдометрика ρ_α порождает на X/ρ_α метрику, которую будем обозначать $\bar\rho_\alpha$. Естественная проекция p_α: $(X,\ \rho)\to(X/\rho_\alpha,\ \bar\rho_\alpha)$ будет равномерно непрерывна, поскольку $\rho_\alpha\leqslant\rho$. Более того, если $\alpha\geqslant\beta$, то определено единственное равномерно непрерывное отображение $p^\alpha_\beta:(X/\rho_\alpha,\ \bar\rho_\alpha)\to(X/\rho_\beta,\ \bar\rho_\beta)$, такое, что

$$p_\beta=p^\alpha_\beta\circ p_\alpha. \tag{1}$$

Положим $X_\alpha=\mathrm{Cpl}\,(X/\rho_\alpha,\ \bar\rho_\alpha)$, $q_\alpha=\mathrm{Cpl}\,(p_\alpha)$ и $q^\alpha_\beta=\mathrm{Cpl}\,(p^\alpha_\beta)$. Тогда $q_\beta=q^\alpha_\beta\circ q_\alpha$ для любых $\alpha\geqslant\beta$. Отображения p_α и p^α_β близостно непрерывны относительно метрических близостей, поэтому они продолжаются на соответствующие близостные компактификации. Обозначим эти продолжения через π_α и π^α_β соответственно. Тогда

$$\pi_\beta=\pi^\alpha_\beta\circ\pi_\alpha\ \text{для любых}\ \alpha\geqslant\beta \tag{2}$$

и, согласно теореме А, $\pi_\alpha|_{\mathrm{Cpl}(X,\rho)}=q_\alpha$. Кроме того, $\pi^\alpha_\beta=q^\alpha_\beta$, так как $C_{\bar\rho_\alpha}X/\rho_\alpha=X_\alpha$ в силу полной ограниченности метрики ρ_α, $\alpha\in A$.

Покажем, что множество A направлено вверх. Для $\alpha,\beta\in A$ положим $\rho_{\alpha\beta}=\max\{\rho_\alpha,\ \rho_\beta\}$. Тогда $\rho_{\alpha\beta}$ — псевдометрика на X со свойством $\rho_{\alpha\beta}\leqslant\rho$. Кроме того, она вполне ограничена. В самом деле, наделим произведение компактов $X_\alpha\times X_\beta$ метрикой $d_{\alpha\beta}$:

$$d_{\alpha\beta}((x_\alpha,\ x_\beta),\ (x'_\alpha,\ x'_\beta))=\max\{\bar\rho_\alpha(x_\alpha,\ x'_\alpha),\ \bar\rho_\beta(x_\beta,\ x'_\beta)\}.$$

Для $\gamma\in A$ обозначим через $p'_\gamma:X\to X_\gamma$ композицию $i_\gamma\circ p_\gamma$, где $i_\gamma:X/\rho_\gamma\to X_\gamma$ — естественное вложение. Тогда, обозначив через $p_{\alpha\beta}$ диагональное произведение отображений p'_α и p'_β, легко убеждаемся в том, что псевдометрика $\rho_{\alpha\beta}$ порождается метрикой $d_{\alpha\beta}$ и отображением $p_{\alpha\beta}$, значит, она вполне ограничена.

Итак, множество $S=\{X_\alpha;\ \pi^\alpha_\beta;\ \alpha\in A\}$ является обратным спектром из метрических компактов. Положим $Y=\varprojlim S$ и обозначим через $\bar\pi_\alpha:Y\to X_\alpha$ предельные проекции спектра S. Согласно (2), существует предел $\pi:C_\rho X\to Y$ семейства отображений $\{\pi_\alpha:C_\rho X\to X_\alpha,\ \alpha\in A\}$. При этом

$$\pi_\alpha=\bar\pi_\alpha\circ\pi,\ \alpha\in A. \tag{3}$$

Все отображения π_α есть отображения «на». Поэтому, согласно (3), π также является отображением «на». Покажем, что оно взаимно однозначно. Для этого достаточно проверить, что семейство $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки пространства $C_\rho X$. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in C_\rho X$ — различные точки. У них существуют далекие окрестности U_1 и U_2. Положим $F_i = \bar{U}_i \cap X$, $i=1, 2$. Тогда F_1 и F_2 — замкнутые подмножества метрического пространства (X, ρ), находящиеся на положительном расстоянии m. Определим отображение $\varphi : X \to [0, m]$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{m\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}.$$

Тогда функция $d(x_1, x_2) = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$ будет вполне ограниченной псевдометрикой на X, поскольку пространство $(X/d, \bar{d})$ изометрично вложено в отрезок $[0, m]$. Покажем, что $d \leqslant \rho$. Пусть

$$x_1, x_2 \in X, \ \rho(x_1, x_2) = l, \ m_{ij} = \rho(x_i, F_j); \ i, j = 1, 2.$$

Имеем

$$d(x_1, x_2) = \left| \frac{mm_{11}}{m_{11} + m_{12}} - \frac{mm_{21}}{m_{21} + m_{22}} \right| = \frac{m\,|m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}|}{(m_{11} + m_{12})(m_{21} + m_{22})}.$$

Предположим, что $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \geqslant 0$. Тогда

$$d(x_1, x_2) \leqslant m \frac{m_{11}(m_{12} + l) - m_{12}(m_{11} - l)}{(m_{11} + m_{12})(m_{21} + m_{22})} = \frac{lm}{m_{21} + m_{22}} \leqslant l.$$

Аналогично $d(x_1, x_2) \leqslant l$ в случае $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \leqslant 0$. Таким образом, псевдометрика d есть одна из псевдометрик ρ_α. Но $p_d = \varphi$, а $\varphi(F_1) = 0$, $\varphi(F_2) = m$. Следовательно, $\pi_d(\xi_1) = 0$, $\pi_d(\xi_2) = m$, поскольку $\xi_i \in \bar{F}_i^{C_\rho X}$, $i = 1, 2$. Итак, отображение $\pi : C_\rho X \to Y$ является гомеоморфизмом.

Рассмотрим теперь отображение

$$P(p_\alpha) : (P(X), P(\rho)) \to (P(X/\rho_\alpha), P(\bar{\rho}_\alpha)).$$

Оно равномерно непрерывно для всякого $\alpha \in A$, согласно лемме 1. Отображения $P(p_\beta^\alpha)$ также равномерно непрерывны. Продолжения этих отображений на компактификации по метрической близости и на метрические пополнения обозначим соответственно через j_α, j_β^α и k_α, k_β^α. Тогда из (1) вытекает, что

$$j_\beta = j_\beta^\alpha \circ j_\alpha, \ \alpha \geqslant \beta,$$
$$k_\beta = k_\beta^\alpha \circ k_\alpha, \ \alpha \geqslant \beta. \tag{4}$$

С другой стороны, из теоремы А получаем

$$k_\alpha = j_\alpha|_{\mathrm{Cpl}\,(P(X), P(\rho))}. \tag{5}$$

В силу изометричности тождественного вложения

$$X/\rho_\alpha \subseteq \mathrm{Cpl}\,(X/\rho_\alpha) = X_\alpha$$

вложение $P(X/\rho_\alpha) \subsetneq P(X_\alpha)$ также будет изометричным. А поскольку это вложение плотно, имеем

$$P(X_\alpha) = \mathrm{Cpl}\,(P(X/\rho_\alpha), P(\bar{\rho}_\alpha)) = C_{P(\bar{\rho}_\alpha)} P(X/\rho_\alpha).$$

Соответственно

$$j_\beta^\alpha = k_\beta^\alpha = P(\pi_\beta^\alpha). \tag{6}$$

В силу непрерывности функтора P (см. [7]) предельные проекции спектра $P(S)$ естественным образом совпадают с отображениями $P(\overline{\pi}_\alpha): P(Y) \to P(X_\alpha)$. Поэтому, согласно (4) и (6), существует такое отображение ${}^1j: C_{P(\rho)}P(X) \to P(Y)$, что $P(\overline{\pi}_\alpha) \circ {}^1j = j_\alpha$. Положим $j = P(\pi^{-1}) \circ {}^1j$ и покажем, что это искомое отображение.

Пусть $\mu \in P(X)$ и $F = \operatorname{supp} \mu$. Докажем, что существует вполне ограниченная псевдометрика $\rho_F \leqslant \rho$, являющаяся метрикой на F, такой, что

$$p_F^{-1} p_F(F) = F. \tag{7}$$

Пусть $h_n(x) = \min\{1, \rho(x, x_n)\}$ для любого $x \in X$, где $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ плотно в F и

$$h_0(x) = \min\{1, \rho(x, F)\}, \ t_n(x) = \frac{h_n(x)}{2^{n+1}}.$$

Тогда каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие некоторая точка $(t_0(x), t_1(x), \ldots, t_n(x), \ldots)$ гильбертова кирпича Q. Гильбертова метрика индуцирует на X искомую метрику ρ_F, так как для любых $x, y \in X$

$$\rho_F(x, y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (t_n(x) - t_n(y))^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h_n(x) - h_n(y))^2}{2^{2n+2}}} \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho(x, y))^2}{2^{2n+2}}} \leqslant \rho(x, y),$$

поскольку $-\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) - \rho(y, x_n) \leqslant \rho(x, y)$ и, следовательно, $|h_n(x) - h_n(y)| = |\rho(x, x_n) - \rho(y, x_n)| \leqslant \rho(x, y)$, если $\rho(x, x_n) < 1$ и $\rho(y, x_n) < 1$. Если же $\rho(x, x_n) \geqslant 1$, а $\rho(y, x_n) < 1$, то

$$|h_n(x) - h_n(y)| = 1 - h_n(y) \leqslant \rho(x, x_n) - \rho(y, x_n) \leqslant \rho(x, y).$$

Аналогичные рассуждения проведем и при $n=0$. Далее, ρ_F есть метрика на F. В самом деле, пусть $x, y \in F$ — различные точки. Существует последовательность $\{x_{n_k} : k \in \omega\}$, сходящаяся к точке x. Тогда $t_{n_k}(x) < t_{n_k}(y)$ для некоторого k. Следовательно, $\rho_F(x, y) \geqslant |t_{n_k}(x) - t_{n_k}(y)| > 0$. Координата t_0 нашего вложения обеспечивает выполнение равенства (7).

Множество $A_F = \{\alpha \in A : \rho_\alpha \geqslant \rho_F\}$ направлено и конфинально в A. Действительно, для любого $\alpha \in A$ имеем $\rho_\alpha \leqslant \rho_{\alpha F} = \max\{\rho_\alpha, \rho_F\}$. Отображение $P(\pi)$ ставит в соответствие мере μ набор мер $P(\pi_\alpha)(\mu) = P(p_\alpha)(\mu)$, $\alpha \in A_F$. Отображение ${}^1j$ ставит в соответствие мере μ набор $j_\alpha(\mu) = P(p_\alpha)(\mu)$, $\alpha \in A_F$, поскольку j_α есть продолжение $P(p_\alpha)$. В то же время множество F, согласно (7), состоит из точек взаимной однозначности отображения p_α. Поэтому $P(p_\alpha)^{-1} P(p_\alpha)(\mu) = \mu$ для любого $\alpha \in A_F$. Следовательно, $j(\mu) = P(\pi^{-1}) \circ {}^1j(\mu) = \mu$.

Наконец, равномерная непрерывность отображения $j|_{\mathrm{Cpl}(P(X), P(\rho))}$ вытекает из (5) и равномерной непрерывности отображений k_α. Теорема доказана.

Автор выражет благодарность профессору В. В. Федорчуку за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988.

2. Садовничий Ю. В. О метрике на пространствах вероятностных мер//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 4. 31—35.
3. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1990. **54**, № 2. 396—417.
4. Смирнов Ю. М. О пространствах близости//Матем. сб. 1952. **31**. 543—574.
5. Samuel P. Ultrafilters and compactifications//Trans. Amer. Math. Soc. 1948. **64**. 100—132.
6. Isbell J. R. Uniform spaces//Amer. Math. Soc. 1964.
7. Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия//Успехи матем. наук. 1981. **36**, № 3. 177—195.

Поступила в редакцию
20.05.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 5

УДК 517.518.475

В. А. Окулов

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть R^N ($R^1=R$; $N=1, 2, \ldots$) — N-мерное евклидово пространство. Точки N-мерного еклидова пространства обозначим так: $\bar{x}=(x_1, \ldots, x_N)$, $\bar{y}=(y_1, \ldots, y_N)$ и т. д. Если $M=\{1, \ldots, N\}$ и B — любое непустое подмножество множества M, то символом $\bar{x}_B$ будем обозначать те точки из R^N, у которых от нуля могут быть отличны лишь координаты с индексами из множества B, причем $\bar{x}_M=\bar{x}$, $\bar{x}_{\{k\}}=\bar{x}_k$ ($k=1, \ldots, N$). Количество элементов в множестве B обозначим $k(B)$, а символом T^N — N-мерный куб $[-\pi, \pi]^N$ ($T^1=T$; $N=1, 2, \ldots$). Будем рассматривать 2π-периодические по всем переменным функции $f: T^N \to R$.

Если $f \in L(T^N)$, то, следуя Л. В. Жижиашвили (см., например, [1]), выражение

$$\tilde{f}_B(\bar{x}) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{k(B)} \int\limits_{T^{k(B)}} f(\bar{x}+\bar{s}_B) \prod_{i\in B} \operatorname{ctg}\frac{s_i}{2}\, ds_i \tag{1}$$

будем называть сопряженной функцией N переменных по совокупности тех переменных, индексы которых образуют множество B. Стоящий в определении (1) интеграл понимается как несобственный в смысле Прингсхейма.

Если $f \in C(T^N)$, т. е. является непрерывной 2π-периодической функцией, то через $\|f\|_{C(T^N)}$, как обычно, обозначим величину $\max\limits_{\bar{x}\in T^N} |f(\bar{x})|$.

В этом случае функцию

$$\omega_k(f, \delta_k) = \sup_{|u_k|\leqslant\delta_k} \|f(x+u_k\bar{e}_k)-f(\bar{x})\|_{C(T^N)},$$

где $\delta_k \geqslant 0$ ($1\leqslant k\leqslant N$), а $\bar{e}_k$ — k-й единичный базисный вектор в R^N, назовем модулем непрерывности функции f по переменной x_k ($1\leqslant k\leqslant N$), выражение

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|\bar{u}|\leqslant\delta} \|f(\bar{x}+\bar{u})-f(\bar{x})\|_{C(T^N)},$$

где $|\bar{u}| = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} |u_k|$, $\delta\geqslant 0$, — модулем непрерывности по совокупности всех переменных. В частности, если