



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Исмати (М. Исматов), О некоторых несамосопряженных смешанных задачах теории теплопроводности,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 382–395

<https://www.mathnet.ru/de11246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

30 апреля 2025 г., 14:26:27



 УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О НЕКОТОРЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2005 г. М. Исмати (М. Исматов)

1. Постановка задачи и метод ее решения. Рассмотрим вначале вопрос о разрешимости следующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности (см. [1, 2]):

$$u_t - u_{xx} = f(x, y), \quad (x, t) \in \theta_T = (0, 1) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Краевое условие (4) является нелокальным. Оно означает равенство нулю средней температуры.

Отметим, что соответствующую смешанную задачу с неоднородными краевыми условиями

$$\int_0^1 u(x, t) dx = \mu(t), \quad t \in [0, T], \quad (4_1)$$

введением новой неизвестной функции можно свести к задаче вида (1)–(4) (см. ниже замечание 4). Задача (1)–(3), (4₁) рассмотрена в работах [1, 2], где доказаны существование и единственность классического решения этой задачи, а также получены двусторонние априорные оценки для решения задачи по начальным данным и правой части уравнения в нормах $L_2(0, 1)$, $C(0, 1)$ и $C(\theta_T)$.

Если однородное уравнение теплопроводности интегрировать по x в пределах от 0 до 1, то легко видеть, что нелокальное условие (4) эквивалентно следующему условию, выражающему равенство потоков через концы $x = 0$ и $x = l$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5)$$

Поэтому мы всюду в дальнейшем вместо задачи (1)–(4) будем рассматривать смешанную задачу (1)–(3), (5).

Разыскивая решение задачи (1)–(3), (5) методом разделения переменных в виде $u(x, t) = R(t)v(x)$, относительно $v(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in (0, 1) = G, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = v'(1). \quad (6)$$

Краевая задача (6) с параметром λ является несамосопряженной краевой задачей (в силу краевых условий). По аналогии с [1, 2], следуя В.А. Ильину [3, 4], собственную функцию v_k задачи (6), отвечающую собственному значению λ_k , определим как нетривиальное решение задачи (6), а присоединенную функцию \tilde{v}_k определим как нетривиальное решение задачи

$$\tilde{v}_k'' + \lambda_k \tilde{v}_k = P_k v_k, \quad x \in G, \quad P_k = -4k\pi, \quad \tilde{v}_k(0) = 0, \quad \tilde{v}_k'(0) = \tilde{v}_k'(1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Ясно, что сопряженной задачей к (6) является

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad Y(0) = Y(1), \quad Y'(1) = 0, \quad (8)$$

где $\lambda = \bar{\lambda}$, $Y(x) = \bar{v}(x)$.

Наряду со смешанной задачей (1)–(3), (5) мы также будем рассматривать следующую смешанную задачу с сопряженными краевыми условиями:

$$U_t - U_{xx} = f(x, y), \quad (x, t) \in \Theta_T, \quad U(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

$$U(0, t) = U(1, t), \quad U_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

По аналогии с работами [1, 2] метод решения задач (1)–(3), (5) и (9) основывается на возможности разложения функций, задающих начальное условие задачи и правую часть уравнения $f(x, t)$, в биортогональный ряд по системе собственных и присоединенных (которых бесконечно много) функций несамосопряженных задач. Обоснование такой возможности следует из результата работы [3]. Кроме того, такая возможность следует также из того, что системы $\{v_k\}_0^\infty$ и $\{y_k\}_0^\infty$ образуют базис Рисса в $L_2(0, 1)$, а следовательно, согласно работе [5], являются базисами в $L_2(0, 1)$.

В работе доказывается абсолютная и равномерная сходимость биортогональных разложений по собственным и присоединенным функциям задачи (6) и (8). Эти результаты затем применяются для доказательства существования и единственности классического решения смешанных задач (1)–(3), (5) и (9). Кроме того, будут получены априорные оценки для решения задачи по начальным данным и правой части в нормах $L_2(0, 1)$, $C(0, 1)$ и $C(\bar{\Theta}_T)$. Попутно будут указаны ошибки, допущенные в работах [1, 2] при нахождении решения неоднородного уравнения и константы в априорных оценках.

Как показано в [1], задачи (6) и (8) имеют следующие системы собственных чисел и собственных и присоединенных функций:

$$\lambda_k = \bar{\lambda}_k = \mu_k^2, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_{2k-1} = \mu_{2k} = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (10)$$

$$v_0 = x, \quad v_{2k-1} = x \cos(2\pi kx), \quad v_{2k} = \sin(2\pi kx) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и

$$Y_0 = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin(2\pi kx) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Там же показано, что системы $\{v_k\}_0^\infty$ и $\{Y_k\}_0^\infty$ образуют биортогональную систему функций (лемма 1) и образуют базисы Рисса в $L_2(0, 1)$ (теорема 1), т.е. имеют место следующие двусторонние оценки:

$$\tau \|\varphi\|_{L_2}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^2 \leq R \|\varphi\|_{L_2}^2, \quad R = 16, \quad \tau = \frac{3}{4}, \quad R^{-1} \|\varphi\|_{L_2}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\varphi}_k^2 \leq \tau^{-1} \|\varphi\|_{L_2}^2, \quad (12)$$

где $\varphi_k = (\varphi, Y_k)$ и $\bar{\varphi}_k = (\varphi, v_k)$ – коэффициенты биортогонального разложения функции φ , а (\cdot, \cdot) и $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в $L_2(0, 1)$. Если функция $\varphi(x)$ не удовлетворяет условию $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$, то $R = 20$.

Следуя работе [5], дадим

Определение 1. Будем говорить, что система $\{V_k\}$ обладает свойством базисности, если для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ существует один и только один ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k V_k(x)$, сходящийся к $f(x)$ в смысле метрики L_2 на любом компакте K интервала $G = (0, 1)$.

Легко проверить, что для системы собственных и присоединенных функций задач (10) и (11) необходимое и достаточное условие базисности работы [5]

$$\|V_k\|_{L_2(K)} \|Y_k\|_{L_2(G)} \leq C(K) \quad \forall k \in N_0$$

(где K – любой компакт интервала $G = (0, 1)$, а $C(K)$ постоянная) выполнены.

Как отмечено в работе [4] (см. также и работу [1]), в случае, когда общее число присоединенных функций является бесконечным (например, такое же, как для задачи (6) и (8)), эти системы $\{v_k\}$ и $\{Y_k\}$ могут обладать свойством базисности при одном выборе присоединенных функций и терять его при другом выборе присоединенных функций. В связи с этим в работе [4] при весьма широких предположениях на спектр оператора

$$LV = V^{(n)} + P_1(x)V^{(n-1)} + \dots + P_n V$$

(при этом вид краевых условий не играет никакой роли, в частности, эти условия могут быть нелокальными) дано исчерпывающее решение задачи о существовании приведенной системы функций оператора L , т.е. дан ответ на вопрос о существовании такой специальной полной и минимальной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности тогда и только тогда, когда рассматриваемая задача обладает свойством базисности хотя бы при каком-то одном выборе собственных и присоединенных функций.

Наконец, рассмотрим следующую редукцию смешанной задачи (9):

$$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (13)$$

где V и W соответственно являются решениями следующих смешанных задач:

$$V_t = V_{xx}, \quad (x, t) \in \Theta_T = G \times (0, T), \quad G = (0, 1), \quad (14)$$

$$V(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{G} = [0, 1], \quad (15)$$

$$V(0, t) = V(1, t), \quad V_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \quad (16)$$

и

$$W_t = W_{xx} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Theta_T, \quad (17)$$

$$W(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{G}, \quad (18)$$

$$W(0, t) = W(1, t), \quad W_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

2. Об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных рядов. Вначале рассмотрим вопрос об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных рядов по системе собственных и присоединенных функций v_k задачи (6), (7). Имеет место

Теорема 1. Пусть непрерывная и кусочно-гладкая на сегменте $\bar{G} = [0; 1]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(0) = 0$. Тогда биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям задачи (6)

$$f(x) = f_0 v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k-1} v_{2k-1}(x) + f_{2k} v_{2k}(x)), \quad (20)$$

где $f_k = (f, Y_k)$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{Y_k\}$, сходится абсолютно и равномерно на замкнутом отрезке \bar{G} к функции $f(x)$.

Заметим, что условия на f в теореме 1 могут быть переформулированы следующим образом. Функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а ее производная $f'(x)$ принадлежит пространству $L_2[0, 1]$ и удовлетворяет условию $f(0) = 0$.

Однако в случае тригонометрического ряда, кроме условий 2π -периодичности, еще требуется выполнимость условия $f(1) = f(0)$. В теореме 1 требуется лишь выполнимость условия $f(0) = 0$.

Доказательство теоремы 1. По признаку Вейерштрасса для доказательства абсолютной и равномерной сходимости ряда (20) на отрезке $[0, 1]$ достаточно показать сходимость мажорантного числового ряда

$$|f_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|f_{2k-1}| + |f_{2k}|), \quad (21)$$

так как для любых $k = 0, 1, \dots$ и $x \in [0, 1]$ имеем $|v_k(x)| \leq 1$.

Интегрированием по частям получаем

$$f_{2k-1} = \int_0^1 f(x) Y_{2k-1}(x) dx = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{f_{2k-1}^{(1)}}{k}, \tag{22}$$

где $f_{2k-1}^{(1)} = \int_0^1 \sqrt{2} f'(x) \sin(2k\pi x) dx$. Точно так же получим

$$f_{2k} = \int_0^1 f(x) Y_{2k}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(-\frac{\tilde{f}_{2k}}{k} + \frac{\tilde{f}_{2k}^{(1)}}{k} \right), \tag{23}$$

где $\tilde{f}_{2k} = \int_0^1 \sqrt{2} f(x) \cos(2k\pi x) dx$, $\tilde{f}_{2k}^{(1)} = \int_0^1 \sqrt{2} (1-x) f'(x) \cos(2k\pi x) dx$

$$f_{2k}^{(1)} = \int_0^1 \sqrt{2} f'(x) \cos(2k\pi x) dx. \tag{24}$$

Применяя очевидное неравенство

$$2|ab| \leq a^2 + b^2 \tag{25}$$

и неравенства типа Бесселя

$$|f_0| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + f^2(x)) dx = \frac{1}{2} (1 + \|f\|^2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k-1}^{(1)})^2 \leq \|f'(x)\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_{2k})^2 \leq \|f(x)\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k}^{(1)})^2 \leq \|f'(x)\|^2,$$

из (21) с учетом (22)–(24) и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ получаем

$$\begin{aligned} |f_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|f_{2k-1}| + |f_{2k}|) &\leq \frac{1}{2} (1 + \|f\|^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left(|f_{2k-1}^{(1)}|^2 + |\tilde{f}_{2k}|^2 + |f_{2k}^{(1)}|^2 + \frac{3}{k^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (1 + \|f\|^2) + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} (\|f(x)\|^2) + 2\|f'(x)\|^2 + \frac{\pi^2}{2} = M < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что числовой ряд (21) сходится.

Осталось показать, что сумма этого ряда есть функция $f(x)$. Пусть сумма биортогонального ряда (20) равна $\varphi(x)$. Тогда функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут иметь одинаковые коэффициенты Фурье, т.е. $(\varphi, Y_k) = (f, Y_k) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда получим $(\varphi - f, Y_k) = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$. В силу непрерывности φ и f и полноты системы $\{Y_k\}$ получаем, что $f(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \bar{G}$. Теорема доказана.

Имеет место

Теорема 2. Биортогональный ряд непрерывной и кусочно-гладкой на сегменте \bar{G} функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей граничному условию $\varphi(0) = \varphi(1)$ задачи (8),

$$\varphi(x) = \varphi_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} Y_{2k}(x)), \tag{26}$$

где $\varphi_0 = (\varphi, v_0)$, $\varphi_{2k-1} = (\varphi, v_{2k-1})$, $\varphi_{2k} = (\varphi, v_{2k})$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по биортогональной системе $\{v_k\}$, сходится к этой функции абсолютно и равномерно на всем замкнутом сегменте $[0, 1]$.

Доказательство теоремы 2 см. в [7, с. 49–50].

3. О скорости сходимости биортогонального ряда. Имеет место следующая теорема о связи между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее биортогонального ряда.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(m)}(x)$ ($m \geq 0$) непрерывны на отрезке \bar{G} , а производная $\varphi^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на этом отрезке. Кроме того, пусть выполнены следующие условия:

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \varphi'''(1) = 0; \quad \dots; \quad \varphi^{(m-2)}(0) = \varphi^{(m-2)}(1),$$

$$\varphi^{(m-2)}(1) = 0; \quad \varphi^{(m)}(0) = \varphi^{(m)}(1)$$

для четного*) m и $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(1) = 0; \varphi''(0) = \varphi''(1), \varphi'''(1) = 0; \dots; \varphi^{(m-1)}(0) = \varphi^{(m-1)}(1), \varphi^{(m)}(1) = 0$ для не четного m . Тогда для коэффициентов биортогонального разложения этой функции

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

выполняются соотношения

$$\varphi_{2k-1} = o(k^{-(m+1)}), \quad \varphi_{2k} = o(k^{-(m+1)})^{**} \quad (27)$$

и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) \quad (n = \overline{0, m}) \quad (28)$$

сходятся.

Доказательство. Возможны следующие четыре случая: $m = 4p$, $m = 4p + 1$, $m = 4p + 2$, $m = 4p + 3$ ($p = 0, 1, 2, \dots$).

При $m = 4p$ интегрированием по частям получаем

$$\varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi(x) v_{2k}(x) dx = \frac{1}{(2\pi k)^{4p+1}} \int_0^1 \varphi^{(4p+1)} \cos(2k\pi x) dx.$$

При этом мы воспользовались условиями

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \dots, \quad \varphi^{(4p)}(0) = \varphi^{(4p)}(1). \quad (29)$$

Аналогично при $m = 4p + 1$ и выполнении условий (29), при $m = 4p + 2$ и выполнении условий

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \dots, \quad \varphi^{(4p+2)}(0) = \varphi^{(4p+2)}(1) \quad (30)$$

и при $m = 4p + 3$ и выполнении условий (30) соответственно получим

$$\varphi_{2k} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+2}} \int_0^1 \varphi^{(4p+2)} \sin(2k\pi x) dx, \quad \varphi_{2k} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+3}} \int_0^1 \varphi^{(4p+3)} \cos(2k\pi x) dx,$$

*) Для $m = 0$ условия $\varphi(1) = 0$ не требуется (см. теорему 2). Для $m = 1$ и $m = 2$ эти условия соответственно имеют вид $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$ и $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$.

**) Т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_{2k-1} : k^{-(m+1)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_{2k} : k^{-(m+1)}) = 0$.

$$\varphi_{2k} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+4}} \int_0^1 \varphi^{(4p+4)} \sin(2k\pi x) dx.$$

Совершенно аналогично для φ_{2k-1} при $m = 4p$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) и выполнении условий*) $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$, \dots , $\varphi^{(4p-2)}(0) = \varphi^{(4p-2)}(1)$, $\varphi^{(4p-1)}(1) = 0$, при $m = 4p + 1$ и выполнении условий

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(4p)}(0) = \varphi^{(4p)}(1), \quad \varphi^{(4p+1)}(1) = 0, \quad (31)$$

при $m = 4p + 2$ и выполнении условий

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(4p+2)}(0) = \varphi^{(4p+2)}(1), \quad \varphi^{(4p+3)}(1) = 0$$

соответственно получим

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+1}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+1)} \sin(2k\pi x) dx, \quad \varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+2}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+2)} \cos(2k\pi x) dx,$$

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+3}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+3)} \sin(2k\pi x) dx, \quad \varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+4}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+4)} \cos(2k\pi x) dx.$$

Докажем теорему для четного $m = 4p + 2$, где $p = 0, 1, 2, \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| &= \left| \frac{1}{(2k\pi)^{m+1}} \int_0^1 (x\varphi)^{(m+1)} \sin(2k\pi x) dx \right| + \left| \frac{1}{(2k\pi)^{m+1}} \int_0^1 \varphi(x)^{(m+1)} \cos(2k\pi x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{m+1}} \left(\frac{|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|}{k^{m+1}} + \frac{|\varphi_{2k}^{(m+1)}|}{k^{m+1}} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\varphi_{2k-1}^{(m+1)} = \int_0^1 \sqrt{2}\varphi^{(4p+1)}(x) \sin(2k\pi x) dx, \quad \varphi_{2k}^{(m+1)} = \int_0^1 \sqrt{2}\varphi^{(4p+1)}(x) \cos(2k\pi x) dx.$$

Так как коэффициенты Фурье $\varphi_{2k-1}^{(m+1)}$ и $\varphi_{2k}^{(m+1)}$ функции $\varphi^{(m+1)}(x) \in L_2[0, 1] \subset L_1[0, 1]$ стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, то из (32) следуют соотношения (27). С другой стороны, из (32) получаем

$$k^m (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) \leq 2^{-1/2} (2\pi)^{-(m+1)} (|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|/k) + (|\varphi_{2k}^{(m+1)}|/k). \quad (33)$$

В силу очевидного неравенства (25), неравенства типа Бесселя

$$\varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|^2 + |\varphi_{2k}^{(m+1)}|^2) \leq \int_0^1 |\varphi^{(m+1)}(x)|^2 dx \quad (34)$$

и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ из (33) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|), \quad (35)$$

а следовательно, сходимость всех рядов (28).

*) При $m = 0$ выполнения каких-либо граничных условий не требуется. При $m = 1$ и $m = 2$ эти условия имеют вид $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$.

Утверждение теоремы 3 для случаев $m = 4p$, $m = 4p + 1$ и $m = 4p + 3$ доказывается аналогично.

Имеет место

Теорема 4. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, причем $m \geq 1$. Тогда биортогональный ряд (26) функции $\varphi(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на сегменте \bar{G} .

Доказательство. Отметим, что ряды (28) являются мажорантными рядами для рядов, полученных из (26) m -кратным почленным дифференцированием. По теореме 3 ряды (28) сходятся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса как исходный ряд (26), так и каждый из рядов

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} Y_{2k}(x))^{(n)}$$

(при $n = \overline{0, m}$) сходится абсолютно и равномерно на сегменте \bar{G} , а это обеспечивает возможность m -кратного почленного дифференцирования исходного ряда (26). Теорема 4 доказана.

Теорема 3 позволяет оценить скорость сходимости биортогонального ряда (26), т.е. дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда (26) $\varphi(x)$ его частичной суммой

$$S_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^n (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1} + \varphi_{2k} Y_{2k}) + \varphi_0 Y_0,$$

или же получить оценку для n -го ее остатка

$$r_n(x) = \varphi(x) - S_n(x, \varphi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} Y_{2k}(x)).$$

Действительно, пусть выполнены все условия теоремы 3. Используя неравенство Коши–Буняковского для сумм, получаем

$$|r_n(x)| \leq A \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \right)^{1/2}, \quad (36)$$

где $A = (2\pi)^{-(m+1)}$, $\varepsilon_k = (|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|^2 + |\varphi_{2k}^{(m+1)}|^2)^{1/2}$. Из неравенства (34) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 < \infty. \quad (37)$$

Пусть $\sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k^2$. Тогда в силу (37) имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$.

Воспользовавшись неравенством

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}} = \frac{1}{(2m+1)n^{2m+1}} \quad (38)$$

и обозначив

$$\delta_n = \frac{A}{\sqrt{2m+1}} \sqrt{\sigma_n}, \quad (39)$$

получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \quad (40)$$

Но тогда из (36) с учетом (37)–(40) получаем

$$|r_n(x)| \leq \delta_n / n^{(m+1/2)} = o(n^{-(m+1/2)}) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (41)$$

В силу теоремы 4 бесконечно малая величина δ_n не зависит от точки x .

Из теоремы 3 и оценки (41) при $m = 0$ непосредственно следует

Теорема 5. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $\bar{G} = [0, 1]$, имеет в нем кусочно-непрерывную производную первого порядка и удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi(1)$. Тогда биортогональный ряд (26) на отрезке G сходится абсолютно и равномерно к этой функции. Более того, можно утверждать равномерную сходимость не только ряда (26), но и ряда более общего вида $\sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} Y_{2k}(x)) \lambda_k^a$, где a – произвольное число, удовлетворяющее требованию $a \leq 1/4$.

Отметим, что аналогичный результат был получен в работе [6] для рядов по собственным функциям первых трех однородных самосопряженных краевых условий для оператора Лапласа в произвольной N -мерной области G .

Имеет место аналогичная теореме 3 и относящаяся к биортогональному разложению (20)

Теорема 6. Пусть функции $f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x)$ ($m \geq 0$) непрерывны на сегменте \bar{G} , а производная $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на этом же сегменте. Кроме того, пусть выполнены следующие условия^{*}: $f(0) = 0, f'(0) = f'(1); f''(0) = 0, f'''(0) = f'''(1); \dots; f^{(m-1)}(0) = 0, f^{(m-1)}(0) = f^{(m-1)}(1), f^{(m)}(0) = 0$ для четного m и $f(0) = 0, f'(0) = f'(1); f''(0) = 0, f'''(0) = f'''(1); \dots; f^{(m-1)}(0) = 0, f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1)$ для нечетного m . Тогда для коэффициентов биортогонального разложения этой функции

$$f_k = \int_0^1 f(x) Y_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

выполняются соотношения $f_{2k-1} = o(k^{-(m+1)})$, $f_{2k} = o(k^{-(m+1)})$ и ряды вида (28) сходятся.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 6 для биортогонального ряда (20) будут иметь место также и теоремы вида 4 и 5.

Замечание 2. Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 3 при $m = 0$. Действительно, при $n = m = 0$ из (28) получаем сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|)$, который является мажорантным для ряда (26). Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (26) сходится абсолютно и равномерно на сегменте \bar{G} . Это утверждение сохраняет свою силу и в отношении теорем 1 и 6.

4. О корректной разрешимости смешанных задач.

Существование классического решения. Рассмотрим несамосопряженную смешанную задачу (9). Найдем выражения для формального решения этой задачи. Сначала найдем формальное решение задачи (14)–(16). Разыскивая решение задачи (14)–(16) в виде разложения по базису

$$V(x, t) = R_0(t) Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (R_{2k-1}(t) Y_{2k-1}(x) + R_{2k}(t) Y_{2k}(x)) \quad (42)$$

с неопределенными коэффициентами $R_{2k-1}(t), R_{2k}(t)$, подставляя это выражение в уравнение (14) (допустимость почленного дифференцирования этого ряда один раз по t и дважды по x доказывается ниже (см. теорему 7)) и приравнявая коэффициенты при Y_{2k-1} и Y_{2k} в обеих частях полученного равенства, для нахождения коэффициентов $R_{2k-1}(t)$ и $R_{2k}(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$R'_0(t) = 0, \quad R'_{2k}(t) + \lambda_k R_{2k}(t) = 0, \quad R'_{2k-1}(t) + \lambda_k R_{2k-1}(t) = P_k R_{2k}(t).$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$R_0(t) = A_0, \quad R_{2k}(t) = A_{2k} e^{-\lambda_k t}, \quad R_{2k-1}(t) = e^{-\lambda_k t} (A_{2k-1} + P_k t A_{2k}), \quad (43)$$

где A_0, A_{2k}, A_{2k-1} – произвольные постоянные.

^{*} При $m = 0$ требуется лишь выполнимость условия $\varphi(0) = 0$ (см. теорему 1). При $m = 1$ и $m = 2$ соответственно требуется выполнимость условий $f(0) = 0, f'(0) = f'(1)$ и $f(0) = 0, f'(0) = f'(1), f''(0) = 0$.

Следовательно, выражение (42) примет вид

$$V(x, t) = A_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} [A_{2k} Y_{2k} + (A_{2k-1} + P_k t A_{2k}) Y_{2k-1}].$$

Отсюда в силу начального условия (15) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x) = A_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{2k} Y_{2k} + A_{2k-1} Y_{2k-1}] &\equiv A_0 \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2k} Y_{2k} + \varphi_{2k-1} Y_{2k-1}] \Rightarrow A_0 = \varphi_0, \\ A_{2k} = \varphi_{2k}, \quad A_{2k-1} = \varphi_{2k-1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (42) в силу (43) и (44) для формального решения задачи (14)–(16) получаем выражение

$$V(x, t) = \varphi_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} [\varphi_{2k} Y_{2k} + (\varphi_{2k-1} + P_k t \varphi_{2k}) Y_{2k-1}], \quad (45)$$

где $\varphi_0 = (\varphi, v_0)$, $\varphi_{2k} = (\varphi, v_{2k})$, $\varphi_{2k-1} = (\varphi, v_{2k-1})$ – коэффициенты Фурье начальной функции $\varphi(x)$ по системе $\{v_k\}$, а $P_k = -4k\pi$.

Совершенно аналогично, разложив в биортогональные ряды решения задачи (17)–(19) и правую часть уравнения $f(x, t)$, получим

$$W(x, t) = W_0(t) Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (W_{2k-1}(t) Y_{2k-1} + W_{2k}(t) Y_{2k}), \quad (46)$$

$$f(x, t) = f_0(t) Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k-1}(t) Y_{2k-1} + f_{2k}(t) Y_{2k}), \quad (47)$$

где $f_0(t) = (f, v_0)$, $f_{2k-1}(t) = (f, v_{2k-1})$, $f_{2k}(t) = (f, v_{2k})$ – коэффициенты Фурье функции $f(x, t)$ по системе $\{v_k\}$, а $W_0(t)$, $W_{2k-1}(t)$, $W_{2k}(t)$ – пока неопределенные функции. Для нахождения коэффициентов $W_0(t)$, $W_{2k-1}(t)$, $W_{2k}(t)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$W_0'(t) = f_0(t), \quad W_{2k}'(t) + \lambda_k W_{2k}(t) = f_{2k}(t), \quad W_{2k-1}'(t) + \lambda_k W_{2k-1}(t) = P_k W_{2k}(t) + f_{2k-1}(t). \quad (48)$$

Очевидно, что общее решение задачи Коши

$$y'(t) + P(t)y(t) = \Theta(t), \quad y(0) = y_0 \quad (49)$$

имеет вид

$$y(t) = \exp \left\{ - \int_0^t P(r) dr \right\} \left(C + \int_0^t \Theta(r) \exp \left\{ \int_0^r P(\eta) d\eta \right\} dr \right). \quad (50)$$

Применяя формулу (50), из уравнения (48) находим

$$\begin{aligned} W_0(t) &= C_0 + \int_0^t f_0(r) dr, \quad W_{2k}(t) = e^{-\lambda_k t} \left(C_{2k} + \int_0^t f_{2k}(r) e^{\lambda_k r} dr \right), \\ W_{2k-1}(t) &= e^{-\lambda_k t} \left(C_{2k-1} + \int_0^t \left[P_k \left(C_{2k} + \int_0^r f_{2k}(\eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta \right) + f_{2k-1}(r) e^{\lambda_k r} \right] dr \right). \end{aligned}$$

Подставляя значения $W_0(t)$, $W_{2k-1}(t)$, $W_{2k}(t)$ в ряд (46), получаем

$$W(x, t) = \left(C_0 + \int_0^t f_0(r) dr \right) Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left\{ \left(C_{2k} + \int_0^t f_{2k}(r) e^{\lambda_k r} dr \right) Y_{2k} + \left[C_{2k-1} + P_k C_{2k} t + P_k \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k}(\eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta \right) dr + \int_0^t f_{2k-1}(r) e^{\lambda_k r} dr \right] Y_{2k-1} \right\}, \quad (51)$$

где C_0 , C_{2k} , C_{2k-1} – произвольные постоянные. Отсюда в силу начальных условий задачи (17)–(19) находим, что $C_0 = C_{2k-1} = C_{2k} = 0$. Тогда выражение (51) для формального решения смешанной задачи (17)–(19) примет вид

$$W(x, t) = Y_0 \int_0^t f_0(r) dr + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left\{ \left(\int_0^t f_{2k}(r) e^{\lambda_k r} dr \right) Y_{2k}(x) + \left[P_k \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k}(\eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta \right) dr + \int_0^t f_{2k-1}(r) e^{\lambda_k r} dr \right] Y_{2k-1}(x) \right\}. \quad (52)$$

Наконец, из (13) с учетом формул (45) и (52) для формального решения задачи (9) получим следующее выражение:

$$U(x, t) = \left(\varphi_0 + \int_0^t f_0(r) dr \right) Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left\{ \left(\varphi_{2k} + \int_0^t f_{2k}(r) e^{\lambda_k r} dr \right) Y_{2k}(x) + \varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + P_k \varphi_{2k} t Y_{2k-1}(x) + P_k Y_{2k-1}(x) \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k}(\eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta \right) dr + \left[\int_0^t f_{2k-1}(r) e^{\lambda_k r} dr \right] Y_{2k-1}(x) \right\}. \quad (53)$$

Определение 2. Функция $u(x, t)$ из класса $C^1(\bar{\Theta}_T) \cap C_{x,t}^{2,1}(\Theta_T)$ называется классическим решением задачи (9), если она удовлетворяет уравнению, начальному и граничным условиям этой задачи в обычном классическом смысле.

Имеет место следующая теорема существования классического решения смешанной задачи (9).

Теорема 7. Пусть начальная функция $\varphi(x)$ и правая часть $f(x, t)$ задачи (9) удовлетворяют следующим требованиям: 1) функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $\bar{G} = [0, 1]$, имеет в нем кусочно-непрерывную производную $\varphi'(x)$ и удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi(1)$; 2) функция $f(x, t) \in C(\bar{\Theta}_T)$ и $\forall t \in [0, T]$ относительно x удовлетворяет тем же условиям, что и функция $\varphi(x)$ в п. 1).

Тогда сумма ряда (53) $U(x, t)$ определяет классическое решение смешанной задачи (9). Кроме того, возможно почленное дифференцирование ряда (53) по x и t сколько угодно раз в прямоугольнике $[0, 1] \times [\varepsilon, T]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что доказательство теоремы 7 сводится к проверке выполнимости следующих утверждений:

- ряд (53) равномерно сходится в прямоугольнике $\bar{\Theta}_T = [0, 1] \times [0, T]$, $T < \infty$;
- ряд (53) при любом $t \geq r \geq \varepsilon > 0$ можно сколько угодно раз почленно дифференцировать по x и t в прямоугольнике $[0, 1] \times [\varepsilon, T]$;
- сумма ряда (53) $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению, начальному и граничным условиям задачи (9) в обычном классическом смысле.

Докажем справедливость утверждения а). Для этого ряд (53) перепишем в виде (13), где V и W определены соответственно формулами (45) и (52). Из (53) при $t = 0$ получим ряд (26).

Следовательно, равномерная сходимость ряда (53) при $t = 0$ следует из теоремы 2. Пусть $t \geq \varepsilon$, где ε – любое действительное положительное число. Тогда равномерная сходимость ряда (53) в прямоугольнике $[0, 1] \times [\varepsilon, T]$, $T < \infty$, является следствием утверждения б).

Доказательство утверждения б) для задачи (9) при $f(x, t) = 0$ (т.е. для ряда (45)) можно проводить по аналогии с работой [8]. Следовательно, остается убедиться в справедливости этого утверждения для ряда (52). Действительно, из (52) получим

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = & \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (-\lambda_k) \left[f_{2k} e^{-\lambda_k(t-r)} Y_{2k}(x) + \right. \\ & \left. + \left(P_k \int_0^r f_{2k}(\eta) e^{-\lambda_k(t-\eta)} d\eta + \frac{1}{k\pi} f_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} + f_{2k-1}(r) e^{-\lambda_k(t-r)} \right) Y_{2k-1}(x) \right] dr, \end{aligned} \quad (54)$$

$$f(x, t) = f_0(t) Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{2k}(t) Y_{2k}(x) + f_{2k-1}(t) Y_{2k-1}(x)]. \quad (55)$$

Для любого фиксированного $t \in [0, \infty)$, согласно теореме 2, ряд (55) сходится равномерно на сегменте \bar{G} . Для любого $x \in \bar{G}$ и t , удовлетворяющего неравенствам $t \geq r \geq \varepsilon > 0$, с учетом оценок $|Y_{2k}(x)| \leq 4$, $|Y_{2k-1}(x)| \leq 4$ из (54) имеем

$$\begin{aligned} |W_{xx}(x, t)| \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_k \left[|f_{2k}(r)| e^{-\lambda_k(t-r)} + |P_k| \int_0^r |f_{2k}(\eta)| e^{-\lambda_k(r-\eta)} d\eta + |f_{2k-1}(r)| e^{-\lambda_k(t-r)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k\pi} |f_{2k}(r)| e^{-\lambda_k(t-r)} \right] dr \leq (2\pi)^2 \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-\lambda_k \varepsilon} \left(\frac{|f_{2k}(r)| + |f_{2k-1}(r)|}{k} \right) dr + \\ & + 2(2\pi)^3 \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-\lambda_k \varepsilon} \left(\frac{|f_{2k}(r)| T}{k} \right) dr + 4\pi \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda_k \varepsilon} \left(\frac{|f_{2k}(r)|}{k} \right) dr. \end{aligned}$$

Используя оценку

$$k^n e^{-(2k\pi)^2 \varepsilon} < 1 \quad (56)$$

для любого достаточно большого натурального n , неравенства (25) и Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |W_{xx}(x, t)| \leq & \frac{2\pi^2}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_{2k}(r)|^2 + |f_{2k-1}(r)|^2 + \frac{2}{k^2} \right) dr + \\ & + (2\pi)^3 T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_{2k}(r)|^2 + \frac{1}{k^2} \right) dr + 2\pi \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_{2k}(r)|^2 + \frac{1}{k^2} \right) dr = \\ = & (2\pi^2 + T(2\pi)^3 + 2\pi) \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2k}(r)|^2 dr + 2\pi^2 \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2k-1}(r)|^2 dr + \frac{\pi^2 T}{6} [(2\pi)^2 + T(2\pi)^3 + 2\pi]. \end{aligned}$$

Наконец, применяя неравенство Бесселя, приходим к оценке

$$|W_{xx}(x, t)| \leq 2\pi(\pi + T(2\pi)^2 + 1) \int_0^T \|f(x, r)\|^2 dr + 2\pi^2 \int_0^T \|f(x, r)\|^2 dr + \frac{\pi^2 T \cdot 2\pi}{6} [2\pi + T(2\pi)^2 + 1] =$$

$$= M_1 \int_0^T \|f(x, r)\|^2 dr + M_2,$$

где $M_1 = 2\pi[2\pi + T(2\pi)^2 + 1]$, $M_2 = (T\pi^3/3)[2\pi + T(2\pi)^2 + 1]$.

Следовательно, ряд (54) равномерно сходится в прямоугольнике $\Theta_T = [0, 1] \times [\varepsilon, T]$, где ε – любое положительное число.

Воспользовавшись оценкой (56), можно убедиться в справедливости других утверждений б).

Утверждение в) непосредственно следует из (53) и утверждения б). Теорема 7 доказана.

Для смешанной задачи (1)–(3), (5) также имеет место аналогичная теореме 7

Теорема 8. Пусть начальная функция $\varphi(x)$ и правая часть уравнения (1) $f(x, t)$ удовлетворяют следующим требованиям: 1) функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке \bar{G} , имеет в нем кусочно-непрерывную производную $\varphi'(x)$ и удовлетворяет условию $\varphi(0) = 0$; 2) функция $f(x, t)$ непрерывна в прямоугольнике $\bar{\Theta}_T = [0, 1] \times [0, T]$ и для всех $t \in [0, T]$ относительно переменной x удовлетворяет таким же условиям, как и функция $\varphi(x)$ в п. 1).

Тогда сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [(\varphi_{2k} + P_k t \varphi_{2k-1}) v_{2k}(x) + \varphi_{2k-1} v_{2k-1}(x)] e^{-\lambda_k t} + v_0 \int_0^t f_0(r) dr +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left\{ \left(\int_0^t f_{2k-1}(r) e^{\lambda_k r} dr \right) v_{2k-1} + \right.$$

$$\left. + \left[\int_0^t f_{2k}(r) e^{\lambda_k r} dr + P_k \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k-1}(\eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta \right) dr \right] v_{2k}(x) \right\}, \quad (57)$$

где $\varphi_k = (\varphi, Y_k)$ и $f_k(t) = (f, Y_k)$ – коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ по системе $\{Y_k\}$ соответственно, определяет классическое решение смешанной задачи (1)–(3), (5). Кроме того, возможно почленное дифференцирование ряда (57) по x и t сколько угодно раз в прямоугольнике $[0, 1] \times [\varepsilon, T]$, где ε – произвольное положительное число.

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 7, поэтому его не приводим.

Замечание 3. Н.И. Ионкиным при нахождении решения задачи (1)–(3), (5) при $\varphi(x) = 0$ допущена ошибка в правой части выражения

$$W_t - (W_{xx} + f) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k t f_{2k-1}(t) v_{2k}(x), \quad (58)$$

т.е. решение Н.И. Ионкина (41) из [1] не удовлетворяет задаче (1)–(3), (5) при $\varphi(x) = 0$. Легко проверить, что решение этой задачи имеет вид

$$W(x, t) = v_0 \int_0^t f_0(r) dr + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \left\{ \left(\int_0^t f_{2k-1}(r) e^{\lambda_k r} dr \right) v_{2k-1}(x) + \right.$$

$$+ \left[\int_0^t f_{2k}(r) e^{\lambda_k r} dr + P_k \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k-1}(\eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta \right) dr \right] v_{2k}(x) \Big\}$$

и отличается от формулы (41) из [1]. В связи с этим и константы в априорных оценках теоремы 4 из [1] и теорем 2–4 из [2] будут другими. Например, теорема 4 из [1] принимает такой вид.

Теорема 9. Если функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(3), (5) при $\varphi(x) = 0$, то для нее справедлива оценка

$$\left[M^{-1} \int_0^t \|f(x, r)\|_{L_2(G)}^2 dr \right]^{1/2} \leq \|u(x, t)\|_{L_2(G)} \leq \left[M \int_0^t \|f(x, r)\|_{L_2(G)}^2 dr \right]^{1/2},$$

где $M = RC/\tau$, $R = 16$, $\tau = 3/4$, $C = \max\{t, (2\pi)^{-2}\}$.

Замечание 4. Если граничные условия (3), (4₁) заданы в виде

$$u(0, t) = \nu(t), \quad \int_0^1 u(x, t) dx = \mu(t), \quad t \in [0, t], \quad (4_2)$$

то введением новой неизвестной функции $Z(x, t)$ формулой

$$Z(x, t) + (1 - 2x)\nu(t) + 2x\mu(t) = u(x, t) \quad (59)$$

задачу (1)–(2), (4₂) можно свести к следующей задаче вида (1)–(3), (5):

$$Z_t = Z_{xx} + F(x, y), \quad (x, t) \in \Theta_T = (0, 1) \times (0, T), \quad Z(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (60)$$

$$Z(0, t) = 0, \quad \int_0^1 Z(x, t) dx = 0, \quad t \in [0, T],$$

где $F(x, t) = f(x, t) - (1 - 2x)\nu'(t) - 2x\mu'(t)$, $\Phi(x) = \varphi(x) - (1 - 2x)\nu(0) - 2x\mu(0)$, $\Phi(0) = 0$, $\int_0^1 \Phi(x) dx = 0$.

Следовательно, решение общей задачи (1)–(2), (4₂) запишется в виде равенства (59), в котором $Z(x, t)$ является решением задачи (60) и определяется рядом вида (57), т.е. теорема 8 имеет место и для задачи (1)–(2), (4₂) при дополнительном предположении о дифференцируемости функций $\nu(t)$ и $\mu(t)$.

О единственности классического решения. Имеет место

Теорема 10. Пусть дополнительно к условиям 1), 2) теоремы 5 функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (61)$$

Тогда классическое решение задачи (9) существует и единственно.

Единственность классического решения задачи (1)–(3), (5) доказана Н.И. Ионкиным в [2].

Замечание 5. Дополнительные требования (61), наложенные на разлагаемые функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ в теореме 10 (в отличие от теоремы 7), связаны с методом ее доказательства.

Отметим также, что часть приведенных выше результатов в краткой форме опубликована в [9].

Автор выражает благодарность В.А. Ильину и Е.И. Моисееву за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ионкин Н.И.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
2. *Ионкин Н.И.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
3. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 4. С. 796–798.
4. *Ильин В.А.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
5. *Бари Н.К.* // Уч. зап. МГУ. 1951. Т. 4. Вып. 148. С. 69–107.
6. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2. С. 61–119.
7. *Исматил М., Исматов Н.М.* // Проблемы математики и информатики. Душанбе, 2001. С. 48–50.
8. *Исматил М.* // Паём ИПС. Душанбе, 2000. № 5. С. 117–130.
9. *Исматил М.* // Паём ИПС. Душанбе, 2001. № 6. С. 158–167.

Таджикский институт предпринимательства и сервиса,
г. Душанбе

Поступила в редакцию
17.03.2003 г.