



A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization:  $\Gamma_4^2$ -contribution, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2023, Volume 520, 162–188

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 22, 2025, 14:03:13



А. В. Иванов, Н. В. Харук

**ТРЕХПЕТЛЕВЫЕ РАСХОДИМОСТИ В  
ЭФФЕКТИВНОМ ДЕЙСТВИИ 4-Х МЕРНОЙ ТЕОРИИ  
ЯНГА–МИЛЛСА С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ  
ОБРЕЗАНИЕМ:  $\Gamma_4^2$ -ВКЛАД**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективное действие для квантовой теории Янга–Миллса [1–3] в четырехмерном пространстве-времени допускает изучение при помощи пертурбативного подхода [4, 5], то есть с использованием разложения в асимптотический ряд по малому параметру. В качестве такого параметра, как правило, выбирается константа связи  $g$ . В этом случае эффективное (квантовое) действие  $W[B]$  представляется в виде суммы классического действия  $W_{-1}[B]/4g^2$  и квантовых поправок [6–8]

$$W[B] = \frac{1}{4g^2} W_{-1}[B] + \sum_{n=0}^{+\infty} g^{2n} W_n[B]. \quad (1)$$

Здесь  $B$  – фоновое поле [9–14], которое является решением квантового уравнения движения.

Грубость такого разложения заключается в том, что оно является символическим, поскольку каждое отдельное слагаемое такого ряда содержит расходящиеся интегралы (расходимости). Ввиду этого перед изучением мы должны ввести регуляризацию при помощи вспомогательного параметра  $\Lambda$ . В этом случае разложение (1) приобретает более аккуратный вид

$$W[B, \Lambda] = \frac{1}{4g^2} W_{-1}[B] + \sum_{n=0}^{+\infty} g^{2n} (W_n[B, \Lambda] - \kappa_n), \quad (2)$$

---

*Ключевые слова:* теория Янга–Миллса, эффективное действие, регуляризация обрезаем, тепловое ядро, коэффициенты Сили–деВитта.

Оба автора поддержаны Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289. Также А. В. Иванов поддержан Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант «Молодая Математика России».

в котором обе части равенства имеют зависимость от параметра регуляризации. Здесь константы  $\kappa_n$ ,  $n \geq 0$ , убирают слагаемые, не зависящие от фонового поля. Как правило, речь идет об ультрафиолетовых расходимостях в импульсном представлении (инфракрасных в координатном), но возможно появление расходящихся интегралов и другого рода. Наличие последних не нарушает верность вычислений данной работы, поэтому мы просто можем подразумевать, что присутствует дополнительная вспомогательная регуляризация.

Учитывая тот факт, что мы будем рассматривать регуляризацию обрезанием в формулировке [15–18], сразу удобно условиться, что параметр  $\Lambda$  имеет размерность импульса, и регуляризация снимается переходом к пределу  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Этот выбор не является ограничением и может быть достигнут подходящей заменой регуляризующего параметра. Таким образом, правая часть (2) содержит сингулярности по параметру  $\Lambda$ , которые в общем случае могут иметь как степенной характер  $\Lambda^k$ , так и логарифмический  $\ln^k(\Lambda/\mu)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , и  $\mu > 0$  – дополнительный вспомогательный фиксированный размерный параметр.

Устранение расходимостей весьма элегантно описывается теорией перенормировки [19–21], которая заключается в домножении поля Янга–Миллса и константы связи на дополнительные функции параметра  $\Lambda$ . Ясно, что для нахождения этих функций, а точнее, хотя бы первых слагаемых разложения в ряд по  $\Lambda$  и  $\ln(\Lambda/\mu)$ , возникает необходимость в явном вычислении сингулярностей в действии (2).

Использование регуляризации обрезанием [15–18, 22–25] предполагает сохранение размерности пространства, это свойство является одним из основных плюсов данного подхода. Следовательно, такое предположение отсекает обсуждение размерной регуляризации [26–31], в которой, несмотря на наличие фундаментального вопроса о деформации размерности, имеются существенные успехи в многопетлевых вычислениях. Минусы в регуляризации обрезанием также есть, в качестве хорошо известного примера можно привести нарушение калибровочной симметрии.

На данный момент с использованием регуляризации обрезанием исследованы только первые две квантовые поправки, то есть  $W_0[B, \Lambda]$  и  $W_1[B, \Lambda]$ . Подробные вычисления могут быть найдены в работах [7, 8, 16, 17, 32]. Соответствующие логарифмические сингулярные

слагаемые выписываются следующим образом

$$W_0[B, \Lambda] - \kappa_0 = -\frac{11 \ln(\Lambda/\mu)}{6} \frac{c_2}{(4\pi)^2} W_{-1}[B] + \mathcal{O}(1),$$

$$W_1[B, \Lambda] - \kappa_1 = -\rho \ln(\Lambda/\mu) \frac{c_2^2}{(4\pi)^4} W_{-1}[B] + \mathcal{O}(1),$$

где параметр  $\rho$  может варьироваться в зависимости от дополнительной деформации функций Грина.

Данная работа посвящена вычислению сингулярности в трехпетлевом слагаемом  $W_2[B, \Lambda]$  от  $\Gamma_4^2$ -вклада с использованием регуляризации обрезанием в координатном представлении. В работе описывается математический аппарат и выводятся новые соотношения между частями диаграмм. Все вычисления сопровождаются доказательствами на диаграммном языке. Предполагается, что полученные соотношения будут полезны при изучении многопетлевых вкладов, включая оставшиеся трехпетлевые.

Работа имеет следующую структуру. В §2 вводятся основные обозначения, формулируются известные соотношения и производится постановка задачи. Далее, в §3 изложены основные результаты. Затем, в §4 приводятся необходимые выводы и доказательства. В заключительной секции обсуждаются дальнейшие перспективы развития метода, а также приводятся дополнительные замечания и комментарии к полученным результатам.

## §2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

Пусть  $G$  – компактная полупростая группа Ли [33], и  $\mathfrak{g}$  – ее алгебра Ли. Ясно, что любой элемент алгебры можно разложить по некоторому фиксированному базису  $\{t^a\}_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ , элементы которого называются генераторами и удовлетворяют соотношениям

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c, \quad \text{tr}(t^a t^b) = -2\delta^{ab},$$

где  $f^{abc}$  – полностью антисимметричные структурные константы, и  $\text{tr}(\cdot)$  – форма Киллинга. Можно проверить, что упомянутые константы удовлетворяют следующему набору соотношений

$$f^{abc} f^{abe} = c_2 \delta^{ce}, \quad f^{gae} f^{ebd} f^{deg} = -\frac{c_2}{2} f^{abc}, \quad (3)$$

$$f^{abe} f^{ecd} = f^{aed} f^{ebc} - f^{aec} f^{ebd}, \quad (4)$$

где  $c_2$  – фиксированная константа, зависящая от  $G$ .

Ясно, что если в выражениях присутствует большое количество структурных констант, то аналитические формулировки становятся громоздкими, а вычислительные операции трудоемкими. К счастью, упомянутые выше определения и соотношения допускают весьма изящное диаграммное представление.

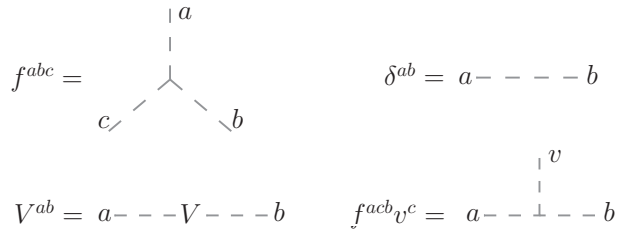


Рис. 1. Базовые элементы диаграммной техники для структурных констант и матриц с групповыми индексами.

Давайте введем базовые определения. Структурную константу  $f^{abc}$  мы будем обозначать вершиной с тремя пунктирными внешними линиями, см. рис. 1. Эти свободные концы символизируют индексы, которые могут соединяться (сворачиваться) с другими элементами диаграммной техники. Важно отметить, что индексы у вершины расставляются по часовой стрелке, в нашем случае  $a \rightarrow b \rightarrow c$ . Выбор начальной линии (для  $a$ ) произволен.

Далее, пусть  $V^{ab}$  – матрица с групповыми индексами. Ей мы сопоставим пунктирную линию с буквой  $V$ , см. рис. 1. При этом важно, как именно изображена буква (перевернута или нет), потому что от этого зависит порядок индексов. Перевернутому символу отвечает матрица  $V^{ba} = (V^t)^{ab}$ . Отдельно удобно определить два специальных случая. Во-первых, если  $V^{ab} = \delta^{ab}$ , то буква отсутствует. Во-вторых, если  $V^{ab} = f^{acb}v^c$ , то мы получаем вершину, у которой одна линия соединена с буквой  $v$ .

С учетом введенных выше определений, соотношения (3) и (4) для структурных констант приобретают интуитивно ясное диаграммное представление, см. рис. 2.

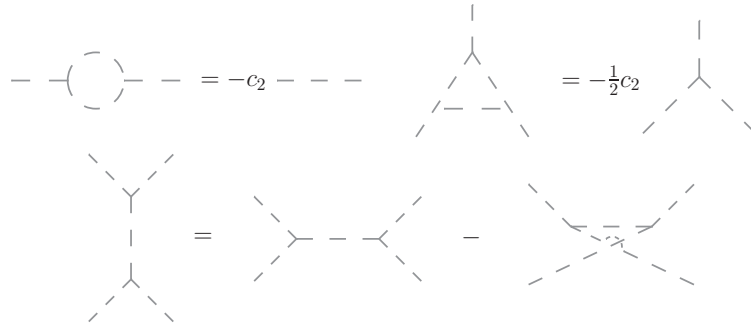


Рис. 2. Диаграммные представления свойств (3) и (4) для структурных констант.

После обсуждения алгебраических конструкций мы можем перейти к определению классического действия Янга–Миллса [5]. Пусть  $\mathbb{R}^4$  – стандартное евклидово пространство с метрическим тензором  $\delta^{\mu\nu}$ , где греческие индексы принимают значения от 1 до 4. Пусть  $H$  является эрмитовым расслоением над  $\mathbb{R}^4$ , и  $A_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a$  – компоненты соответствующей 1-формы связности Янга–Миллса. Мы предполагаем их гладкими. Тогда классическое действие теории определяется равенством

$$S[A] = \frac{1}{4g^2} W_{-1}[A] = \frac{1}{4g^2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x F_{\mu\nu}^a[A](x) F_{\mu\nu}^a[A](x),$$

где

$$F_{\mu\nu}^a[A](x) = \partial_{x^\mu} A_\nu^a(x) - \partial_{x^\nu} A_\mu^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x).$$

Далее следует переход к квантовому действию (1) с использованием представления с функциональным интегралом и метода фонового поля [9–14]. Мы опустим эти стандартные вычисления и сформулируем лишь необходимые для нас равенства, поскольку мы заинтересованы в трехпетлевом слагаемом специального вида. Подробные вычисления могут быть найдены в [5, 16, 19].

Введем в рассмотрение гладкое фоновое поле  $B_\mu(x) = B_\mu^a(x)t^a$ , удовлетворяющее квантовому уравнению движения. Тогда мы можем определить ковариантную производную  $D_\sigma$ , оператор Лапласа  $M_1$  и

соответствующую функцию Грина  $G_1$  следующим образом

$$\begin{aligned} D_\sigma^{ab}(x) &= \partial_{x\sigma} \delta^{ab} + f^{adb} B_\sigma^d(x), \\ M_{1\mu\nu}^{ab}(x) &= -\delta_{\mu\nu} D_\sigma^{ac}(x) D_\sigma^{cb}(x) - 2f^{acb} F_{\mu\nu}^c(x), \\ M_{1\mu\sigma}^{ac}(x) G_{1\sigma\nu}^{cb}(x, y) &= \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее,  $F_{\mu\nu}^c(x) = F_{\mu\nu}^c[B](x)$ . Разумеется, функция Грина дополнительно удовлетворяет некоторым граничным условиям. Мы предполагаем, что они выбраны таким образом, что задача корректна.

На данном этапе также удобно обговорить регуляризацию, поскольку она затрагивает только функцию Грина. Итак, под регуляризацией квантовых поправок в эффективном действии мы подразумеваем деформацию функции Грина [16–18] с последующей ее заменой  $G_1 \rightarrow G_1^\Lambda$  во всех вкладах правой части (1). Более конкретное описание, необходимое для подсчетов, мы дадим ниже.

Согласно общей теории, в построении квантовых поправок из разложения (1) принимают участие три основные вершины  $\Omega_3$ ,  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ . Таким образом, каждую квантовую поправку можно разделить на несколько слагаемых, в зависимости от того, какие вершины используются при их построении. В данной работе мы исследуем вклад, построенный только с использованием вершины  $\Gamma_4$ , которая определяется равенством

$$\Gamma_4[\delta J] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f^{abc} \frac{\delta}{\delta J_\mu^b(x)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^c(x)} f^{aed} \frac{\delta}{\delta J_\mu^e(x)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^d(x)}, \quad (6)$$

где  $J_\mu^a(x)$  – компоненты некоторого гладкого вспомогательного поля. Тогда регуляризованное трехпетлевое слагаемое из разложения (2) выписывается в следующем виде

$$W_3[B, \Lambda] = \widetilde{W}[B, \Lambda] + (\text{вклады, содержащие } \Omega_3 \text{ и } \Gamma_3), \quad (7)$$

где

$$\widetilde{W}[B, \Lambda] = -\frac{1}{2} \Gamma_4^2[\delta J] e^{g_1(J)} \Bigg|_{J=0}^{\text{сильно связанная часть}}$$

и

$$g_1(J) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \int_{\mathbb{R}^4} d^4y J_\mu^a(x) G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, y) J_\nu^b(y).$$

$$4\Gamma_4 = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \quad G_1^\Lambda = \text{—————}$$

Рис. 3. Элементы диаграммной техники для вершины  $\Gamma_4$  и регуляризованной функции Грина  $G_1^\Lambda$ .

Как и в случае со структурными константами, построение квантовых поправок также допускает формулировку на диаграммном языке. Действительно, каждой вершине  $(\Omega_3, \Gamma_3, \Gamma_4)$  можно сопоставить свою картинку, по которой однозначно восстанавливается формула. Здесь мы обсудим вершину  $\Gamma_4$ , остальные случаи можно найти в [16, 17, 29]. Согласно правилу, величине  $4\Gamma_4$  соответствует граф с четырьмя внешними сплошными линиями, см. рис. 3. Он состоит из двух элементов с тремя линиями, каждый из которых соответствует своей структурной константе из формулы (6). Сами константы, согласно вышеизложенному правилу, соединены между собой пунктирной линией. Дуги показывают, какие именно пространственные индексы свернуты друг с другом. Вторым элементом диаграммной техники является регуляризованный пропагатор (функция Грина), ему сопоставляется сплошная линия, также см. рис. 3.

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = - \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

Рис. 4. Свойство вершины  $\Gamma_4$  при перестановке двух соседних сплошных линий.

Здесь важно заметить, что при анализе сильной связности графов мы должны мысленно стягивать все пунктирные линии в точку, потому что вершина  $\Gamma_4$  в действительности содержит одно интегрирование, см. (6). Пунктирная линия на рис. 3 отражает внутреннюю групповую структуру и используется исключительно для дешифровки диаграмм. Также стоит отметить, что вершина  $\Gamma_4$  обладает свойством, указанным на рис. 4, которое следует из антисимметричности структурных констант  $f^{abc} = -f^{acb}$ .



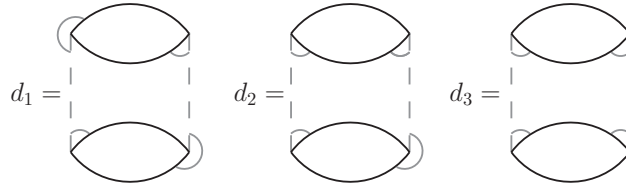


Рис. 5. Набор диаграмм цилиндрического вида для вклада (8).

Таким образом, после всех подготовительных манипуляций мы можем в явном виде выписать вклады, которые разделяются на три типа в зависимости от внешней формы диаграмм. Мы имеем

$$\widetilde{W}[B, \Lambda] = \widetilde{W}_{\text{cyl}}[B, \Lambda] + \widetilde{W}_{\text{tr}}[B, \Lambda] + \widetilde{W}_{\text{c}}[B, \Lambda],$$

где  $\widetilde{W}_{\text{cyl}}[B, \Lambda]$  содержит диаграммы цилиндрического вида (см. рис. 5),  $\widetilde{W}_{\text{tr}}[B, \Lambda]$  – треугольного вида (см. рис. 6), и  $\widetilde{W}_{\text{c}}[B, \Lambda]$  содержит графы гусеничного вида (см. рис. 7). Используя элементы диаграммной техники и элементарные соотношения из комбинаторики, мы можем выписать их в явном виде

$$\widetilde{W}_{\text{cyl}}[B, \Lambda] = -\frac{1}{32}(2d_1 - 4d_2 + 2d_3), \tag{8}$$

$$\widetilde{W}_{\text{tr}}[B, \Lambda] = -\frac{1}{32}(4d_4 - 4d_5 - 4d_6 + 4d_7), \tag{9}$$

$$\widetilde{W}_{\text{c}}[B, \Lambda] = -\frac{1}{32}(8d_8 - 16d_9 + 8d_{10} - 16d_{11} + 16d_{12} + 8d_{13}). \tag{10}$$

Следовательно, после всех подготовительных манипуляций мы свели задачу к анализу расходимостей в диаграммах трех видов (8)–(10). Этому вопросу и будут посвящены следующие две секции. Сразу можно сказать, что диаграммы цилиндрического и треугольного типов могут быть изучены методами, изложенными в работах [16, 17]. Это связано с теми фактами, что такие диаграммы содержат два интегрирования по  $\mathbb{R}^4$ , и все функции Грина имеют два разных аргумента. Диаграммы гусеничного типа обладают более сложной структурой расходимостей, поскольку часть функций Грина рассматривается

на диагонали (аргументы равны), а часть – нет. Это приводит к появлению так называемых out-частей [34]. Они должны сокращаться вкладами из второго слагаемого (7), которые в данной работе не рассматриваются.

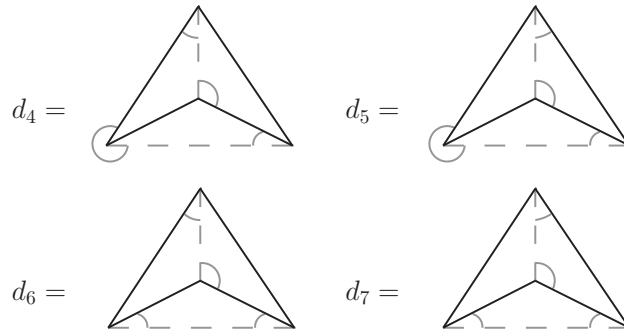


Рис. 6. Набор диаграмм треугольного вида для вклада (9).

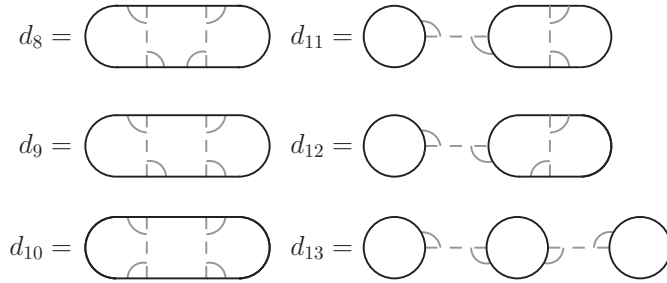


Рис. 7. Набор диаграмм гусеничного вида для вклада (10).

### §3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для формулировки результатов мы должны ввести ряд дополнительных определений, которые позволят компактно выписать расходимости. Прежде всего следует обсудить основной элемент диаграммной

техники – функцию Грина  $G_1$ . Как это было упомянуто, она удовлетворяет уравнению (5) в паре с граничными условиями. Разумеется, даже при конкретных граничных условиях явный вид функции Грина можно было бы выписать лишь в некоторых частных ситуациях. Именно по этой причине нам приходится работать с асимптотическими разложениями.

Пусть  $\sigma > 0$  – вспомогательный параметр с размерностью импульса. Тогда функцию Грина можно представить в виде суммы

$$G_1(x, y) = G_1(x, y)\chi(|x - y| \leq 1/\sigma) + G_1(x, y)\chi(|x - y| > 1/\sigma), \quad (11)$$

где  $\chi(\cdot)$  – характеристическая функция множества, удовлетворяющего неравенству в аргументе. Мы выберем и зафиксируем параметр  $1/\sigma$  столь малым, что для первого слагаемого было бы справедливо асимптотическое разложение по параметру  $|x - y|$  (около диагонали  $x = y$ ) внутри области  $|x - y| \leq 1/\sigma$ . Для второго слагаемого такое разложение в общем случае неверно, потому что параметр  $|x - y|$  перестает быть малым.

Итак, согласно общей теории, см. [35], внутри региона  $|x - y| \leq 1/\sigma$  функция Грина может быть представлена в виде следующего ряда

$$G_1(x, y) = R_0(x - y)a_0(x, y) + R_1(x - y)a_1(x, y) + R_2(x - y)a_2(x, y) + PS_1(x, y) + o(|x - y|^2), \quad (12)$$

где  $PS_1$  – гладкая составляющая нелокального (non-local) типа [35, 36], она неизвестна в общем виде и может зависеть от граничных условий. Далее,  $a_i$  – коэффициенты Сили–деВитта [37–45], которые имеют локальный характер и представимы в виде ряда по фоновому полю и его ковариантным производным. Функции  $R_i$  носят вспомогательный характер для явного выделения сингулярных и логарифмических составляющих. Их гладкость улучшается с ростом порядкового номера, а первые представители выписываются следующим образом

$$R_0(x) = \frac{1}{4\pi^2|x|^2}, \quad R_1(x) = -\frac{\ln(|x|^2\mu^2)}{16\pi^2}, \quad (13)$$

$$R_2(x) = \frac{|x|^2(\ln(|x|^2\mu^2) - 1)}{64\pi^2}. \quad (14)$$

После формулировки базовых понятий для разложения функции Грина следует обсудить и ее регуляризацию. Как это было упомянуто выше, под регуляризацией мы понимаем некоторую деформацию

функции Грина

$$G_1(x, y) \rightarrow G_1^\Lambda(x, y).$$

В данной работе мы будем предполагать, что в области  $|x - y| \leq 1/\sigma$  при регуляризации деформируются следующие составляющие асимптотического разложения (12)

$$R_i(x) \rightarrow R_i^\Lambda(x), \quad PS_1(x, y) \rightarrow PS_1^\Lambda(x, y).$$

Более подробно процесс анализа диаграмм мы изложим в следующей секции, а сейчас мы введем дополнительные обозначения и представим результат.

Сперва определим вспомогательный набор интегралов. Они вычисляются по регуляризованным  $R_i^\Lambda$ -функциям и содержат сингулярные слагаемые по параметру  $\Lambda$ . Их шесть штук

$$I_1 = - \int_{B_{1/\sigma}} d^4x (R_0^\Lambda(x))^3 \left( \frac{|x|^2}{12} R_1^\Lambda(x) - \frac{5}{3} R_2^\Lambda(x) \right), \quad (15)$$

$$I_2 = \frac{1}{8} \int_{B_{1/\sigma}} d^4x (R_0^\Lambda(x))^3 |x|^2, \quad I_3 = 4 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x (R_0^\Lambda(x))^2 (R_1^\Lambda(x))^2, \quad (16)$$

$$I_4 = 2 \int_{B_{1/\sigma}} d^4x (R_0^\Lambda(x))^2 R_1^\Lambda(x), \quad I_5 = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x (R_0^\Lambda(x))^2,$$

$$I_6 = \int_{B_{1/\sigma}} d^4x (R_0^\Lambda(x))^3. \quad (17)$$

Здесь  $B_{1/\sigma}$  – замкнутый шар радиуса  $1/\sigma$  с центром в нуле.

Во-вторых, рассмотрим четыре билинейных функции на множестве матриц с групповыми индексами. Пусть  $W$  и  $V$  – две матрицы с элементами  $W^{ab}$  и  $V^{ab}$ . Тогда определим следующие четыре конструкции

$$(W, V)_0 = f^{abc} f^{ebd} W^{ad} V^{ce}, \quad (18)$$

$$(W, V)_1 = f^{a_1bc} f^{dba_2} f^{ce_1g} f^{ge_2d} W^{a_1a_2} V^{e_1e_2}, \quad (19)$$

$$(W, V)_2 = f^{a_2bc} f^{ce_2d} f^{a_1dg} f^{ge_1b} W^{a_1a_2} V^{e_1e_2},$$

$$(W, V)_3 = f^{a_2e_2b} f^{bcd} f^{a_1dg} f^{gce_1} W^{a_1a_2} V^{e_1e_2}. \quad (20)$$

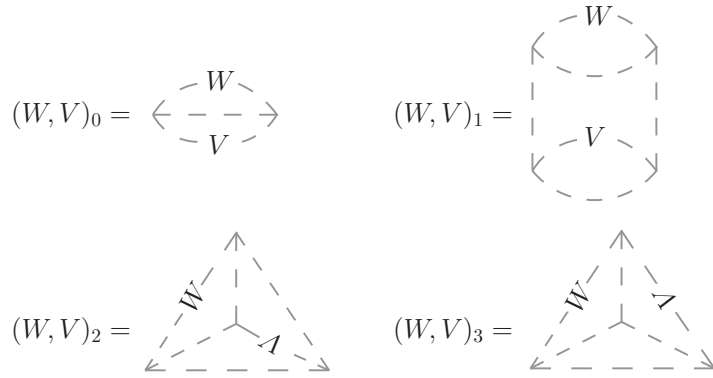


Рис. 8. Диаграммное представление для формул (18)–(20).

Следует заметить, что они полностью построены из структурных констант и матриц. Следовательно, используя диаграммную технику, изложенную на рис. 1, эти величины можно изобразить с помощью диаграмм, см. рис. 8.

В-третьих, введем несколько вспомогательных функционалов от фонового поля:

$$J_1[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left( D_\sigma^{ac}(x) D_\sigma^{cb}(x) PS_{1\mu\mu}^{\Lambda ba}(x, y) \right) \Big|_{y=x}, \quad (21)$$

$$J_2[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x f^{acb} F_{\mu\nu}^c(x) PS_{1\mu\nu}^{\Lambda ba}(x, x), \quad (22)$$

$$J_{3\mu\nu\sigma\rho}[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (PS_{1\mu\nu}^\Lambda(x, x), PS_{1\sigma\rho}^\Lambda(x, x))_0,$$

$$J_{4\mu\nu\sigma\rho}[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x (PS_{1\mu\nu}^\Lambda(x, x), PS_{1\sigma\rho}^\Lambda(x, x))_1,$$

$$J_5[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x PS_{1\mu\mu}^{\Lambda aa}(x, x).$$

**Лемма 1.** *С учетом всего вышеизложенного, расходимости, зависящие от фонового поля  $B$ , для диаграмм цилиндрического и треугольного типов, см. рис. 5 и 6, а также для функционалов  $\widetilde{W}_{\text{cyl}}[B, \Lambda]$  и  $\widetilde{W}_{\text{tr}}[B, \Lambda]$  из (8)–(9) могут быть выписаны в виде следующей таблицы*

	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\widetilde{W}_{\text{cyl}}[B, \Lambda]$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$\widetilde{W}_{\text{tr}}[B, \Lambda]$
$c_3^3 I_1 W_{-1}[B]$	16	4	16	-3/2	8	2	2	2	-3/4
$c_2^2 I_2 J_1[B]$	16	4	16	-3/2	8	2	2	2	-3/4
$c_2^3 I_3 W_{-1}[B]$	2	0	2	-1/4	0	0	0	1	-1/8
$c_2^2 I_4 J_2[B]$	-4	0	-4	1/2	0	0	0	-2	1/4
$c_2 I_5 J_{3\mu\nu\nu}[B]$	0	0	0	0	4	0	0	-2	-1/4
$c_2 I_5 J_{3\mu\nu\nu\nu}[B]$	0	-2	0	-1/4	0	-1	-1	1	-3/8
$c_2 I_5 J_{3\mu\nu\nu\nu\nu}[B]$	-2	0	-2	1/4	-2	0	0	0	1/4
$I_5 J_{4\mu\nu\nu\nu}[B]$	8	4	8	-1/2	8	2	2	0	-1/2
$I_5 J_{4\mu\nu\nu\nu\nu}[B]$	0	0	0	0	0	0	0	2	-1/4
$I_5 J_{4\mu\nu\nu\nu\nu\nu}[B]$	2	0	2	-1/4	0	0	0	0	0
$c_2^2 I_6 J_5[B]$	16	4	16	-3/2	8	2	2	2	-3/4

Теперь мы можем перейти к формулировке результатов для диаграмм гусеничного типа. Как было упомянуто выше, в этом случае результат будет включать слагаемые, содержащие функционалы от второй компоненты разложения (10). То есть части функций Грина вне области  $|x - y| \leq 1/\sigma$ , так называемые out-части.

Пусть  $G_{1\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu}$  обозначают матрицы с групповыми индексами, элементы которых имеют вид  $G_{1\mu\nu}^{ab}$  и  $f^{acb} F_{\mu\nu}^c$ , соответственно. Тогда мы можем определить три функционала

$$J_6[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y G_{1\mu\beta}^{ab}(x, y) f^{bcd} F_{\beta\alpha}^c(y) G_{1\alpha\nu}^{de}(y, x) f^{ega} F_{\nu\mu}^g(x), \quad (23)$$

$$J_{7\mu\nu\sigma\rho}[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y ((G_{1\mu\beta}(x, y) G_{1\beta\nu}(y, x), G_{1\sigma\rho}(x, x))_0 - \eta(x, y)), \quad (24)$$

$$J_{8\mu\nu\sigma\rho}[B] = \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y (G_{1\mu\beta}(x, y) F_{\beta\alpha}(y) G_{1\alpha\nu}(y, x), PS_{1\sigma\rho}^\Lambda(x, x))_0, \quad (25)$$

с помощью которых можно сформулировать результат для диаграмм, изображенных на рис. 7. Здесь  $\eta(x, y)$  – вспомогательная плотность, вычитающая сингулярные слагаемые, не зависящие от фонового поля.

Ее явный вид неважен в нашем контексте.

**Лемма 2.** *С учетом всего вышеизложенного, расходимости, зависящие от фонового поля  $B$ , для диаграмм гусеничного типа, см. рис. 7, и для функционала  $\widetilde{W}_c[B, \Lambda]$  из (10) могут быть выписаны в виде следующей таблицы*

	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$\widetilde{W}_c[B, \Lambda]$
$c_2^2(R_1^\Lambda(0))^2 J_6[B]$	1	0	0	0	2	4	-9/4
$c_2 R_0^\Lambda(0) J_{7\mu\nu\nu\nu}[B]$	0	0	0	4	1	0	3/2
$c_2 R_0^\Lambda(0) J_{7\mu\nu\nu\mu}[B]$	-2	-4	0	-4	-1	0	-3
$c_2 R_0^\Lambda(0) J_{7\mu\nu\nu\nu}[B]$	0	-1	-8	0	0	0	3/2
$c_2 R_1^\Lambda(0) J_{8\mu\nu\nu\nu}[B]$	0	0	0	0	-1	-4	3/2
$c_2 R_1^\Lambda(0) J_{8\mu\nu\nu\mu}[B]$	2	0	0	0	3	4	-3
$c_2 R_1^\Lambda(0) J_{8\mu\nu\nu\nu}[B]$	0	1	0	2	0	0	3/2
$I_5 J_{4\mu\nu\nu\nu}[B]$	1	0	0	0	1	2	-5/4
$I_5 J_{4\mu\nu\nu\mu}[B]$	0	0	0	0	-1	-2	1
$I_5 J_{4\mu\nu\nu\nu}[B]$	0	1	4	0	0	0	-1/2

Можно отметить, что только последние три строки последней таблицы не содержат при подсчете второе слагаемое из формулы (11). Однако при этом они не являются локальными, так как строятся с использованием  $PS_1$ -части.

#### §4. ВЫЧИСЛЕНИЯ

В данной секции мы представим вычисления для результатов, изложенных в предыдущем разделе. Вначале мы сделаем общие замечания и прокомментируем вычисления для диаграмм цилиндрического и треугольного типов, а затем – для гусеничного, поскольку методы их анализа отличаются существенным образом.

Получим сперва полезные соотношения для отображений (18)–(20). Пусть  $W$  и  $V$  – две матрицы с групповыми индексами, тогда справедливы следующие равенства

$$(W, V)_3 = -\frac{c_2}{2}(W, V)_0, \tag{26}$$

$$(W, V)_1 = (W, V)_2 + (W, V)_3 = (W, V)_2 - \frac{c_2}{2}(W, V)_0. \tag{27}$$

Такие соотношения следуют из формулы (3) и применения равенств (4) к двум соседним структурным константам из определений (19) и (20). Важен также и один частный случай. Пусть матричные элементы  $V$  представимы в виде  $V^{ab} = f^{acb}v^c$ , тогда

$$\begin{aligned} (W, V)_0 &= \frac{c_2}{2} W^{ab} V^{ba}, \quad (W, V)_2 = 0, \\ (W, V)_1 &= -\frac{c_2}{2} (W, V)_0 = -\frac{c_2^2}{4} W^{ab} V^{ba}. \end{aligned} \quad (28)$$

Эти соотношения также следуют из применения (4) к двум соседним структурным константам, одной из которых выступает константа из  $f^{acb}v^c$ . Отметим, что в случае конкретизации  $W$  (а не  $V$ ) работают те же равенства.

Процесс подсчета расходимостей в диаграммах, изображенных на рис. 5 и рис. 6, практически идентичен. Различия заключаются лишь в появлении  $(\cdot, \cdot)_2$  и  $(\cdot, \cdot)_3$  в диаграммах треугольного типа вместо  $(\cdot, \cdot)_1$ , которое возникает при анализе цилиндрических графов. Таким образом, учитывая равенства (26) и (27), в качестве примера можно рассмотреть лишь одну диаграмму  $d_1$ . Вклады  $\{d_i\}_{i=2}^7$  анализируются аналогично.

Сделаем еще одно важное замечание. Существенным отличием графов  $\{d_i\}_{i=1}^7$  от диаграмм гусеничного типа является то, что все четыре функции Грина содержат оба аргумента  $x$  и  $y$ . Этот факт дает возможность значительно упростить вычисления путем перехода к калибровочному условию Фока–Швингера [16, 17, 29, 42, 44].

Хорошо известно, что первый коэффициент Сили–деВитта  $a_0(x, y)$  из разложения (12) пропорционален упорядоченной экспоненте  $\Phi(x, y)$ , см. [42, 44, 46], и имеет матричные элементы вида  $\delta_{\mu\nu} \Phi^{ab}(x, y)$ . Более того, мы можем выделить его множителем

$$PS_1^\Lambda(x, y) = a_0(x, y) \widehat{P}S_1^\Lambda(x, y), \quad a_k(x, y) = a_0(x, y) \widehat{a}_k(x, y),$$

где  $k \geq 0$ , и явно выписать для последних разложение вида [16, 44]:

$$\begin{aligned} \widehat{a}_{0\mu\nu}(x, y) &= \delta_{\mu\nu}, \\ \widehat{a}_{1\mu\nu}(x, y) &= 2F_{\mu\nu}(y) + (x - y)^{\sigma_1\sigma_2} \frac{\delta_{\mu\nu}}{12} F_{\sigma_1\rho}(y) F_{\sigma_2\rho}(y) \\ &\quad + (x - y)^{\sigma_1} (C_{\sigma_1\mu\nu}(y) + (x - y)^{\sigma_2} C_{\sigma_1\sigma_2\mu\nu}(y)) + o(|x - y|^2), \\ \widehat{a}_{2\mu\nu}(x, y) &= 2F_{\mu\rho}(y) F_{\rho\nu}(y) + \frac{\delta_{\mu\nu}}{12} F_{\sigma\rho}(y) F_{\sigma\rho}(y) + C_{\mu\nu}(y) + o(1). \end{aligned} \quad (29)$$

$$\widehat{a}_{2\mu\nu}(x, y) = 2F_{\mu\rho}(y) F_{\rho\nu}(y) + \frac{\delta_{\mu\nu}}{12} F_{\sigma\rho}(y) F_{\sigma\rho}(y) + C_{\mu\nu}(y) + o(1). \quad (30)$$



Здесь коэффициенты  $C_{\mu\nu}(y)$ ,  $C_{\sigma_1\mu\nu}(y)$  и  $C_{\sigma_1\sigma_2\mu\nu}(y)$  являются полными  $\nabla$ -производными, где

$$\nabla_{y^\sigma} = \partial_{y^\sigma} + [B_\sigma(y), \ ].$$

Следовательно, после таких замен мы можем вынести функцию  $a_0$  из функции Грина, переопределив последнюю

$$G_1^\Lambda(x, y) = a_0(x, y)\widehat{G}_1^\Lambda(x, y).$$

Далее, используя соотношения для упорядоченных экспонент [34]

$$f^{edg}\Phi^{ea}(x, y)\Phi^{db}(x, y)\Phi^{gc}(x, y) = f^{abc}, \quad \Phi^{ac}(x, y)\Phi^{cb}(y, x) = \delta^{ab},$$

можно исключить из диаграммы лишние упорядоченные экспоненты, стоящие около каждой функции Грина. Следовательно, справедливо следующее соотношение

$$d_i = d_i \Big|_{G_1^\Lambda \rightarrow \widehat{G}_1^\Lambda} \tag{31}$$

для всех  $i \in \{1, \dots, 7\}$ . Такое утверждение существенно упрощает процесс подсчета, поскольку количество слагаемых в асимптотическом разложении уменьшается.

Сделаем еще несколько полезных замечаний о процессе подсчета. Как известно, в координатном представлении расходимости являются инфракрасными и получаются по той причине, что плотность в некоторых точках ( $x \sim y$ ) содержит неинтегрируемые особенности. Давайте проследим за процессом их анализа более подробно.

Диаграммы  $\{d_i\}_{i=1}^7$  по построению содержат два интегрирования (по  $x$  и  $y$ ). Разобьем один из интегралов на сумму двух

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4y \int_{\mathbb{R}^4} d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \int_{B_{1/\sigma}(y)} d^4x + \int_{\mathbb{R}^4} d^4y \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{1/\sigma}(y)} d^4x, \tag{32}$$

где  $B_{1/\sigma}(y)$  – замкнутый шар радиуса  $1/\sigma$  с центром в точке  $y \in \mathbb{R}^4$ ,  $B_{1/\sigma} = B_{1/\sigma}(0)$ . Из разбиения видно, что во втором слагаемом переменные интегрирования, они же аргументы функции Грина, удовлетворяют соотношению  $|x - y| \geq 1/\sigma$ . Следовательно, второе слагаемое не содержит инфракрасных расходимостей. На данном этапе уже видно, что сингулярности для диаграмм цилиндрического и треугольного типов не содержат out-частей функции Грина.

Теперь нужно правильным образом выбрать расходящиеся слагаемые. Учитывая тот факт, что мы работаем в четырехмерном пространстве, сингулярными слагаемыми являются те, которые имеют асимптотическое поведение около диагонали  $|x - y|^{-4}$  или хуже.

Если ввести еще одно дополнительное упрощение, то окажется, что расходящихся вкладов не так уж и много. Действительно, для подсчета мы можем использовать лишь специальную часть функции Грина  $\widehat{G}_1^\Lambda$ , которую мы обозначим через  $\widehat{G}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{\mu\nu}(x, y) &= R_0^\Lambda(x - y)\delta_{\mu\nu} + 2R_1^\Lambda(x - y)F_{\mu\nu}(y) \\ &+ \delta_{\mu\nu} \left( \frac{|x - y|^2}{48} R_1^\Lambda(x - y) - \frac{5}{12} R_2^\Lambda(x - y) \right) F_{\sigma\rho}(y) F_{\sigma\rho}(y) \quad (33) \\ &+ \widehat{P}S_{1\mu\nu}^\Lambda(y, y) + \frac{|x - y|^2}{8} (\partial_{x^\sigma} \partial_{x^\sigma} \widehat{P}S_{1\mu\nu}^\Lambda(x, y)) \Big|_{x=y}. \end{aligned}$$

Здесь, переписывая коэффициенты (29) и (30), мы выбросили поправочные члены, а также слагаемые с полной  $\nabla$ -производной, поскольку они нейтрализуют неинтегрируемую плотность. Также был использован тот факт, что интеграл от полной  $\nabla$ -производной и интеграл по  $\mathbb{R}$  от нечетной функции равны нулю.

Таким образом, вводя специальное обозначение  $\stackrel{\text{IR}}{=}$  для равенства сингулярных частей, зависящих от фонового поля, мы можем продлить цепочку (31) и записать

$$\begin{aligned} d_i \stackrel{\text{IR}}{=} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{V_{1/\sigma}(y)} d^4 x \left( \left( \text{плотность для } d_i \right) \Big|_{G_1^\Lambda \rightarrow \widehat{G}} \right. \\ \left. - \left( \text{плотность для } d_i \right) \Big|_{B=0} \right), \end{aligned}$$

где второе слагаемое в скобках убирает инфракрасную расходимость, не зависящую от фонового поля.

Наконец, после замены переменной  $x \rightarrow x + y$  в интеграле мы получим сумму факторизованных слагаемых, где каждый отдельный вклад будет представлен в виде произведения интеграла по  $\mathbb{R}^4$  от гладкой плотности, зависящей от фонового поля  $B_\mu$ , на интеграл по шару  $V_{1/\sigma}$  от комбинации  $R_i^\Lambda$ -функций.

Давайте для примера проанализируем первую диаграмму  $d_1$ , см. рис. 5. Остальные графы могут быть изучены аналогичным образом. Действительно, в этом случае плотность диаграммы имеет вид

$$\begin{array}{cc} f_{a_1 b_1 c_1} & \begin{array}{c} G_{1\alpha\beta}^{\Lambda a_1 c_3}(x, y) \\ G_{1\mu\nu}^{\Lambda b_1 b_3}(x, y) \end{array} & f_{a_3 b_3 c_3} \\ f_{a_1 a_2 b_2} & \begin{array}{c} G_{1\alpha\beta}^{\Lambda a_2 c_4}(x, y) \\ G_{1\mu\nu}^{\Lambda b_2 b_4}(x, y) \end{array} & f_{a_3 b_4 c_4} \end{array}.$$

Здесь функции Грина и структурные константы специально так расположены, чтобы явно была видна связь аналитического выражения и диаграммного. Далее, согласно общей идее, изложенной выше, нужно заменить  $G_1^\Lambda$  на упрощенную функцию  $\widehat{G}$  из (33) и выписать все слагаемые, зависящие от фонового поля и имеющие асимптотику при  $x \sim y$  вида  $|x - y|^{-4}$  или хуже.

Одним из таких слагаемых является

$$\int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{V_{1/\sigma}(y)} d^4 x \begin{array}{cc} f_{a_1 b_1 c_1} & \begin{array}{c} 2R_1^\Lambda(x-y)F_{\alpha\beta}^{a_1 c_3}(y) \\ R_0^\Lambda(x-y)\delta_{\mu\nu}\delta^{b_1 b_3} \end{array} & f_{a_3 b_3 c_3} \\ f_{a_1 a_2 b_2} & \begin{array}{c} 2R_1^\Lambda(x-y)F_{\alpha\beta}^{a_2 c_4}(y) \\ R_0^\Lambda(x-y)\delta_{\mu\nu}\delta^{b_2 b_4} \end{array} & f_{a_3 b_4 c_4} \end{array},$$

где  $F_{\mu\nu}^{ab} = f^{acb}F_{\mu\nu}^c$ . Затем, после предложенной замены  $x \rightarrow x + y$ , мы получаем факторизацию вида

$$16 \int_{V_{1/\sigma}} d^4 x \left( R_0^\Lambda(x) \right)^2 \left( R_1^\Lambda(x) \right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \left( F_{\alpha\beta}(y), F_{\alpha\beta}(y) \right)_1,$$

где было использовано определение (19), см. рис. 8. Далее, используя определение (16) для  $I_3$  и применяя равенство (28), последнее выражение можно переписать в виде

$$-c_2^2 I_3 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y F_{\alpha\beta}^{ab}(y) F_{\alpha\beta}^{ba}(y) = c_2^3 I_3 W_{-1}[B].$$

Учитывая тот факт, что таких вкладов в плотности возникает два, мы получаем третью строку сверху для диаграммы  $d_1$  в первой таблице секции 3.

Остальные строки таблицы, включая случаи диаграмм  $\{d_i\}_{i=2}^7$ , следуют из аналогичных вычислений с учетом равенств

$$\widehat{P}S_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, x) = PS_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, x),$$

$$\left( \partial_{x_\sigma} \partial_{x^\sigma} \widehat{P} S_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}(x, y) \right) \Big|_{y=x} = \left( D_\sigma^{ac}(x) D_\sigma^{ce}(x) P S_{1\mu\nu}^{\Lambda eb}(x, y) \right) \Big|_{y=x}.$$

Результаты приведены в первой таблице предыдущей секции.

Теперь мы можем перейти к анализу диаграмм гусеничного типа  $\{d_i\}_{i=8}^{13}$ , изображенных на рис. 7. Процесс их подсчета содержит меньшее количество промежуточных преобразований, а ответ включает нелокальные  $PS_1$ -вклады и out-части. Сперва мы рассмотрим три диаграммы  $\{d_i\}_{i=8}^{10}$ . Они имеют похожую структуру, поэтому анализировать придется лишь первую из них  $d_8$ . Затем мы докажем специальное утверждение для диаграмм  $\{d_i\}_{i=11}^{13}$ , которое позволит свести их к ответам для предыдущих трех.

Итак, давайте выпишем плотность для  $d_8$ :

$$G_{1\mu\nu}^{\Lambda b_3 a_2}(x, x) \begin{array}{ccc} f^{a_1 a_2 a_3} & G_{1\mu\rho}^{\Lambda a_3 c_2}(x, y) & f^{c_1 c_2 c_3} \\ f^{a_1 b_2 b_3} & G_{1\nu\sigma}^{\Lambda b_2 d_3}(x, y) & f^{c_1 d_2 d_3} \end{array} G_{1\sigma\rho}^{\Lambda c_3 d_2}(y, y). \quad (34)$$

Здесь функции расположены специальным образом для удобства сравнения. При работе с такой плотностью мы не будем заменять функции Грина на упрощенные, поскольку упорядоченная экспонента в конечном итоге сохранится, и не будем делать сдвига переменных. В данном случае мы сразу получаем сингулярный множитель из боковых функций  $G_1^\Lambda(x, x)$  и  $G_1^\Lambda(y, y)$ . Действительно, в этом случае можно воспользоваться регуляризованным разложением (12), которое мгновенно дает сингулярности вида  $R_i^\Lambda(0)$ .

К примеру, заменяя одну из боковых функций Грина в (34) на первое слагаемое  $R_0^\Lambda(0)\delta_{\mu\nu}\delta^{ab}$  асимптотического разложения, мы получаем вклад вида

$$R_0^\Lambda(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x \begin{array}{ccc} f^{a_1 a_2 a_3} & G_{1\mu\rho}^{\Lambda a_3 c_2}(x, y) & f^{c_1 c_2 c_3} \\ f^{a_1 b_2 a_2} & G_{1\mu\sigma}^{\Lambda b_2 d_3}(x, y) & f^{c_1 d_2 d_3} \end{array} G_{1\sigma\rho}^{\Lambda c_3 d_2}(y, y). \quad (35)$$

Затем, используя соотношение (3) и симметричность функции Грина

$$G_{1\mu\rho}^{\Lambda a_3 c_2}(x, y) = G_{1\rho\mu}^{\Lambda c_2 a_3}(y, x),$$

плотность под интегралом (35) преобразуется, и мы получаем

$$\begin{aligned}
 & -c_2 R_0^\Lambda(0) \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x (G_{1\rho\mu}^\Lambda(y, x) G_{1\mu\sigma}^\Lambda(x, y), G_{1\sigma\rho}^\Lambda(y, y))_0 \\
 & = -c_2 R_0^\Lambda(0) J_{7\mu\nu\nu\mu}[B],
 \end{aligned}$$

что, с учетом кратности появления слагаемых такого вида, дает третью строку для диаграммы  $d_8$  во второй таблице секции 3.

Аналогичными вычислениями получаются все остальные вклады для диаграмм  $d_8$ ,  $d_9$  и  $d_{10}$ . Важно отметить, что, к примеру, сам функционал  $J_{7\mu\nu\nu\mu}[B]$  также содержит собственную подрасходимость. Мы не выделяли ее сознательно, поскольку по общим соображениям она должна сокращаться аналогичными вкладками от других диаграмм (с учетом второго слагаемого из (7)).

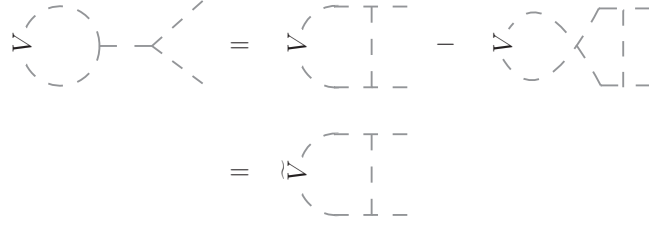


Рис. 9. Диаграммное соотношение для произвольной матрицы  $V^{ab}$  с групповыми индексами. Здесь  $\tilde{V}^{ab} = V^{ab} - V^{ba}$ .

Перейдем к последним диаграммам  $\{d_i\}_{i=11}^{13}$  и докажем одно вспомогательное утверждение. Пусть  $V$  – произвольная матрица с групповыми индексами, тогда, используя соотношение (4), элементы диаграммной техники на рис. 1 и представление диаграммных соотношений на рис. 2, можно показать справедливость соотношения, представленного на рис. 9, где  $\tilde{V}^{ab} = V^{ab} - V^{ba}$ .

Такое соотношение является примечательным с той точки зрения, что оно позволяет представить диаграмму с левой стороны рис. 10 через знакомую диаграмму с правой стороны рис. 10, у которой функция Грина  $G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab}$  заменена на  $\tilde{G}_{\mu\nu}^{ab} = G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab} - G_{1\mu\nu}^{\Lambda ba}$ . Аналогичное утверждение было доказано в [29].

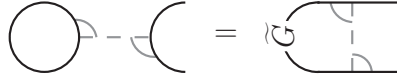


Рис. 10. Соотношение для вершины  $\Gamma_4$ , когда две соседние сплошные линии соединены. Здесь  $\tilde{G}_{\mu\nu}^{ab} = G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab} - G_{1\mu\nu}^{\Lambda ba}$ .

Используя равенство на рис. 10, мы можем представить диаграммы  $\{d_i\}_{i=11}^{13}$ , изображенные на рис. 7, в виде диаграмм, изображенных на рис. 11.

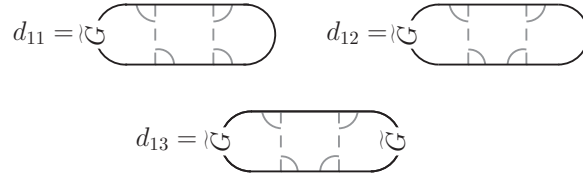


Рис. 11. Альтернативное диаграммное представление для  $d_{11}$ ,  $d_{12}$  и  $d_{13}$ . Здесь  $\tilde{G}_{\mu\nu}^{ab} = G_{1\mu\nu}^{\Lambda ab} - G_{1\mu\nu}^{\Lambda ba}$ .

Таким образом, мы получаем простой рецепт подсчета оставшихся гусеничных диаграмм путем сведения их к уже посчитанным. Результаты вычислений представлены во второй таблице секции 3.

## §5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучены трехпетлевые расходимости для эффективного действия квантовой четырехмерной теории Янга–Миллса от  $\Gamma_4^2$ -вклада. Основные результаты приведены в виде двух лемм в секции 3 и двух таблиц, в которых представлены величины всех сингулярных слагаемых, зависящих от фонового поля. Также доказан ряд вспомогательных утверждений, которые будут полезны при анализе остальных трехпетлевых (и других многопетлевых) вкладов.



Рис. 12. Соотношение для цилиндрических диаграмм, изображенных на рис. 5.

Далее, можно протестировать некоторые промежуточные вычисления. К примеру, легко проверить, что в общей сумме мы получили правильное количество сильно связанных графов. Действительно, из формул (8)–(10) следует, что их 96. Если же мы будем вычислять общее количество, то получим

$$\left. \partial_s^8 e^{s^2/2} \right|_{s=0} = \partial_s^8 e^{s^2/2} \frac{s^8}{4!2^4} = 105.$$

Это число полностью согласуется с нашим результатом, так как общее количество графов включает 9 несвязных. Другой небольшой проверкой является то, что некоторые диаграммы в действительности равны между собой. К примеру, диаграммы  $d_1$  и  $d_3$ , а также  $d_5$  и  $d_6$ . Хорошо видно, что результаты для них совпадают. Проверку равенства диаграмм можно произвести следующим образом. В первом случае,  $d_1$  и  $d_3$ , достаточно применить соотношение на рис. 12 в паре с тем фактом, что мы можем переставлять дуги, прилегающие к одной пунктирной линии, на другую сторону от пунктирной линии одновременно. Второе равенство,  $d_5 = d_6$ , следует из деформации графа (одного из двух) путем перемещения одной из нижних точек в центр, а центральной — на место предыдущей.

Также отдельно отметим, что несмотря на то, что вклады (23)–(25) идут в паре с сингулярным множителем, см. вторую таблицу секции 3, они и сами содержат дополнительные сингулярности. Мы сознательно их отдельно не выделяли, потому что они должны анализироваться вместе с расходимостями из второго слагаемого (7). Более того, предполагается, что они сократятся, так как они содержат out-части. В качестве примера наличия внутренней сингулярности рассмотрим функционал (23). Применяя к нему разбиение (32) и подставляя вместо функций Грина их асимптотическое разложение (первое слагаемое) около диагонали, получим

$$J_6[B] \stackrel{\text{IR}}{=} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y \int_{B_{1/\sigma}(y)} d^4 x \delta_{\mu\beta} \delta^{ab} R_0^\Lambda(x-y) f^{bcd} F_{\beta\alpha}^c(y) \\ \times \delta_{\alpha\nu} \delta^{de} R_0^\Lambda(x-y) f^{ega} F_{\nu\mu}^g(x).$$

Далее, после сдвига  $x \rightarrow x+y$  и разложения в ряд Тейлора одной из напряженностей поля, мы выписываем ответ в виде

$$J_6[B] \stackrel{\text{IR}}{=} c_2 I_5 W_{-1}[B].$$

Аналогичные вычисления можно проделать и с функционалом (25). В этом случае ответ записывается в следующей форме

$$J_{8\mu\nu\sigma\rho}[B] \stackrel{\text{IR}}{=} I_5 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y (F_{\mu\nu}(y), PS_{1\sigma\rho}^\Lambda(y, y))_0 \\ \stackrel{\text{IR}}{=} \frac{c_2}{2} I_5 \int_{\mathbb{R}^4} d^4 y f^{acb} F_{\mu\nu}^c(y) PS_{1\sigma\rho}^{\Lambda ba}(y, y).$$

Ответ для (24) имеет более громоздкий вид и его изучение выходит за рамки данной работы.

Дополнительно прокомментируем вклады, содержащие функционал (21). Как показывают вычисления, нерегуляризованная  $PS_1$ -часть удовлетворяет следующему соотношению

$$M_{1\mu\sigma}^{ac}(x) PS_{1\sigma\nu}^{cb}(x, y) \Big|_{x=y} = \frac{1}{16\pi^2} a_{2\mu\nu}^{ab}(y, y),$$

поэтому функционал (21) в первом порядке малости по регуляризующему параметру может быть выражен через функционалы (22) и  $W_{-1}[B]$

$$J_1[B] = 2J_2[B] + \frac{5c_2}{2^4 3\pi^2} W_{-1}[B] + o(1).$$

В заключение обсудим форму сингулярностей для интегралов (15)–(17). В качестве примера рассмотрим регуляризацию обрезанием в координатном представлении, при которой  $R_0^\Lambda$  получается из  $R_0$  путем замены в формуле (13) функции  $|\cdot|$  на деформированный аналог  $|\cdot|_\Delta$



вида

$$|x| \rightarrow |x|_{\Lambda} = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| > 1/\Lambda; \\ 1/\Lambda, & \text{если } |x| \geq 1/\Lambda. \end{cases} \quad (36)$$

В свою очередь, функции  $R_1^{\Lambda}$  и  $R_2^{\Lambda}$  могут содержать дополнительные свободные параметры, см. [16–18] и двумерный аналог [47]. Однако, в качестве примера мы зафиксируем выбор и будем предполагать, что деформация производится заменой (36) в соответствующих формулах (13) и (14). Тогда после интегрирования сингулярные вклады в (15)–(17) можно выписать в следующем виде

$$\begin{aligned} I_1 &\stackrel{\text{IR}}{=} -\frac{L^2}{2^{10}\pi^6} - \frac{47L}{2^{12}3^2\pi^6}, & I_2 &\stackrel{\text{IR}}{=} \frac{L}{2^8\pi^4}, \\ I_3 &\stackrel{\text{IR}}{=} \frac{L^3}{2^73\pi^6} + \frac{L^2}{2^9\pi^6}, & I_4 &\stackrel{\text{IR}}{=} \frac{L^2}{2^6\pi^4} + \frac{L}{2^7\pi^4}, \\ I_5 &\stackrel{\text{IR}}{=} \frac{L}{2^3\pi^2}, & I_6 &\stackrel{\text{IR}}{=} \frac{3\Lambda^2}{2^7\pi^4}, \end{aligned}$$

где  $L = \ln(\Lambda/\mu)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. N. Yang, R. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. — Phys. Rev. **96** (1954), 191–195.
2. A. Trautman, *The geometry of gauge fields*. — Czechoslovak J. Phys. **29**, No. 1 (1979), 107–116.
3. O. Babelon, C. M. Viallet, *The Riemannian geometry of the configuration space of gauge theories*. — Comm. Math. Phys. **81**, No. 4 (1981), 515–525.
4. L. D. Faddeev, V. Popov, *Feynman diagrams for Yang–Mills field*. — Phys. Lett. B **25** (1967), 29–30.
5. L. D. Faddeev, A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*. — Frontiers in Physics, Vol. 83, Addison-Wesley, 1991.
6. L. D. Faddeev, *Mass in quantum Yang–Mills theory (comment on a Clay millenium problem)*. — Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.) **33**, No. 2 (2002), 201–212.
7. L. D. Faddeev, *Scenario for the renormalization in the 4D Yang–Mills theory*. — Int. J. Mod. Phys. A **31** (2016), 1630001.
8. С. Э. Деркачёв, А. В. Иванов, Л. Д. Фаддеев, *Сценарий для перенормировки в квантовой теории Янга–Миллса в четырехмерном пространстве-времени*. — ТМФ **192**, No. 2 (2017), 227–234.
9. B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. 2. The manifestly covariant theory*. — Phys. Rev. **162** (1967), 1195–1239.
10. B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. 3. Applications of the covariant theory*. — Phys. Rev. **162** (1967), 1239–1256.

11. G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*. — In Karpacz 1975 Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, No. 368, vol. 1, Wroclaw, 1976, pp. 345–369.
12. C. H. Oh, *Two-loop approximation of the effective potential for the Yang–Mills field*. — Prog. Theor. Phys. **55**, No. 4 (1976), 1251–1258.
13. L. F. Abbott, *Introduction to the background field method*. — Acta Phys. Polon. B, **13**, No. 1–2 (1982), 33–50.
14. И. Я. Арефьева, А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Производящий функционал для S-матрицы в калибровочно-инвариантных теориях*. — ТМФ **21**, No. 3 (1974), 311–321.
15. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for  $\phi^3$  model*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **487** (2019), 151–166.
16. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-loop cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action*. — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48** (2020), 015002.
17. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*. — Eur. Phys. J. C, **82** (2022), 997.
18. A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation*. — J. Phys. A: Math. Theor. **55** (2022), 495401.
19. J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*. — Cambridge University Press, 1984.
20. O. I. Zavalov, *Renormalized Quantum Field Theory*. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1990.
21. D. I. Kazakov, *Radiative corrections, divergences, regularization, renormalization, renormalization group and all that in examples in quantum field theory*. — arXiv:0901.2208.
22. M. Oleszczuk, *A symmetry-preserving cut-off regularization*. — Z. Phys. C **64** (1994), 533–538.
23. Sen-Ben Liao, *Operator cutoff regularization and renormalization group in Yang–Mills theory*. — Phys. Rev. D **56** (1997), 5008–5033.
24. G. Cynolter, E. Lendvai, *Cutoff regularization method in gauge theories*. — arXiv:1509.07407.
25. Н. В. Харук, *Регуляризации смешанного типа и нелогарифмические сингулярности*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **494**, (2020), 242–249.
26. G. 't Hooft, *Renormalization of massless Yang–Mills fields*. — Nucl. Phys. B **33** (1971), 173–199.
27. C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Dimensional renormalization: the number of dimensions as a regularizing parameter*. — Nuovo Cim. B **12** (1972), 20–26.
28. I. Jack, H. Osborn, *Two-loop background field calculations for arbitrary background fields*. — Nucl. Phys. B **207** (1982), 474–504.

29. J. P. Bornsen, A. E. M. van de Ven, *Three-loop Yang–Mills  $\beta$ -function via the covariant background field method.* — Nucl. Phys. B **657** (2003), 257–303.
30. А. В. Иванов, *О размерной регуляризации на примере теории Янга–Миллса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **465** (2017), 147–156.
31. А. В. Иванов, *About renormalized effective action for the Yang–Mills theory in four-dimensional space-time.* — EPJ Web Conf. **191**, XXth International Seminar on High Energy Physics (QUARKS-2018) (2018), 06001, 7 pp.
32. С. Л. Шаташвили, *Двухпетлевое приближение в формализме внешнего поля.* — ТМФ **58**, No. 2 (1984), 219–228.
33. M. Nakahara, *Geometry, topology and physics.* — CRC Press, Second Ed., 2003.
34. А. В. Иванов, N. V. Kharuk, *Ordered exponential and its features in Yang–Mills effective action.* — Commun. Theor. Phys. (2023), to be published, <https://doi.org/10.1088/1572-9494/acde4e>.
35. M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields.* — Ann. Physics **142** (1982), 359–392.
36. Н. В. Харук, *Нулевые моды оператора Лапласа в двухпетлевых вычислениях в теории Янга–Миллса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **509** (2021), 216–226.
37. V. Fock, *Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quanten- mechanik.* — Sow. Phys. **12** (1937), 404–425.
38. P. B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold.* — J. Differ. Geom. **10** (1975), 601–618.
39. A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *The Generalized Schwinger–Dewitt technique in gauge theories and quantum gravity.* — Phys. Rept. **119** (1985), 1–74.
40. D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: User’s manual.* — Phys. Rept. **388** (2003), 279–360.
41. D. Fursaev, D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*, Springer, 2011, pp. 1–304.
42. А. В. Иванов, *Диаграмматика теплового ядра ковариантного оператора Лапласа.* — ТМФ **198**, No. 1 (2019), 113–132.
43. А. В. Иванов, N. V. Kharuk, *Non-recursive formula for trace of heat kernel.* — 2019 Days on Diffraction (DD), IEEE, 2019, 74–77 pp. 74–77.
44. А. В. Иванов, Н. В. Харук, *Тепловое ядро: метод собственного времени, калибровка Фока–Швингера, интеграл по путям и линия Вильсона.* — ТМФ **205**, No. 2 (2020), 242–261.
45. А. В. Иванов, N. V. Kharuk, *Special functions for heat kernel expansion.* — Eur. Phys. J. Plus **137** (2022), 1060.
46. A. Polyakov, *Gauge Fields and Strings.* — London, UK, Harwood Academic Publishers, 1987.
47. P. V. Akashevich, A. V. Ivanov, *On two-loop effective action of 2D sigma model.* — arXiv:2304.02374.

Ivanov A. V., Kharuk N. V. Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization:  $\Gamma_4^2$ -contribution.

In the paper, we study three-loop divergences in the effective action of the four-dimensional Yang–Mills theory from the  $\Gamma_4^2$ -contribution. As the regularization we use a cutoff (deformation of the Green’s function) in the coordinate representation.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В.А.Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки 27,  
191023, С.-Петербург, Россия

Поступило 29 мая 2023 г.

С.-Петербургский международный  
математический институт  
им. Леонарда Эйлера,  
Песочная наб. 10,  
197022, С.-Петербург, Россия

*E-mail:* regul1@mail.ru

*E-mail:* natakharuk@mail.ru