А. Н. Ветохин, Точный дескриптивный тип множества правильных линейных систем, *Дифференц. уравнения*, 2000, том 36, номер 8, 1128–1129

2000. Т. 36, № 8. С. 1128 — 1129

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ТОЧНЫЙ ДЕСКРИПТИВНЫЙ ТИП МНОЖЕСТВА ПРАВИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Н. Ветохин

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейное пространство M_n систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in R^+, \tag{1}$$

где $A : R^+ \to \operatorname{End} R^n$ — кусочно-непрерывная ограниченная оператор-функция. Пусть $\lambda_1(A) \le \ldots \le \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Согласно определению [1, с. 139], система (1) называется правильной, если коэффициент неправильности Ляпунова

$$\sigma(A) = \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) - \varliminf_{t \to \infty} t^{-1} \int\limits_0^t \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau$$

обращается в нуль.

Известно много различных интересных свойств правильных систем, в частности, в качественной теории дифференциальных уравнений известна теорема Миллионщикова — Оселедца, согласно которой почти все (в смысле всякой нормированной меры, инвариантной относительно сдвигов по t) системы с ограниченными равномерно непрерывными коэффициентами правильны.

В настоящей работе описан дескриптивный тип [2, с. 248] множества правильных систем в пространстве систем вида (1), наделенном метрикой $\rho(A,B) = \sup\limits_{t \in R^+} \|A(t) - B(t)\|$, получившееся таким образом метрическое пространство будем обозначать через M_n^u.

Теорема. *Если $n > 1$, то множество правильных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве M_n^u.*

Доказательство теоремы будет разбито на ряд лемм.

Лемма 1. *Множество правильных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^u.*

Доказательство. Множество правильных систем можно определить как $\sigma^{-1}(0)$ — прообраз нуля при отображении $\sigma(\cdot) : M_n \to R$. Так как показатели Ляпунова являются функциями второго класса Бэра на пространстве M_n^u [3], а функция, определяемая формулой $A \mapsto \varliminf\limits_{t \to \infty} t^{-1} \int\limits_0^t \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau$, непрерывна на этом пространстве, то множество $\sigma^{-1}(0)$ является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ [2, с. 248]. Итак, мы установили, что множество правильных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^u. Лемма 1 доказана.

Проведем некоторое дополнительное построение. Построим метрическое пространство $\mathcal{B}(N)$ следующим образом: точками пространства $\mathcal{B}(N)$ являются по определению всевозможные (счетные) последовательности $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots)$ определяется как $\rho'(\alpha, \beta) = 1/m$, где m наименьшее из тех натуральных чисел, для которых $\alpha_m \ne \beta_m$. Обозначим через P_ω множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности. Бэром доказано, что характеристическая функция множества P_ω не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(N)$ [4].

Пусть $I_n : M_n \to \{0, 1\}$ — характеристическая функция множества правильных систем.

Лемма 2. *Существует непрерывное отображение $\varphi : \mathcal{B}(N) \to M_2^u$ такое, что $I_2(\varphi(\alpha)) = 1$ при $\alpha \in P_\omega$, $I_2(\varphi(\alpha)) = 0$ при $\alpha \notin P_\omega$.*

Доказательство. Каждому $\alpha = (\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \mathcal{B}(N)$ поставим в соответствие систему уравнений

$$\dot{x} = U_\alpha(t)x \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной функцией $U_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $t \in [2^k, 2^{k+1} - k - 1)$ и $U_\alpha(t) = u_k^\alpha(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ при $t \in [2^{k+1} - k - 1, 2^{k+1})$, $u_k^\alpha = (k+1)^{-1} \arccos\left(\exp\left(-(2^{k+1} - 2^k - k - 1)/\min\{\alpha_k, k\}\right)\right)$, $k = 1, 2, \ldots$

Для правильности этой системы необходимо и достаточно [5], чтобы $\varliminf_{k\to\infty}(2^{k+1}-2^k-k-1)^{-1}\ln|\cos(u_k^\alpha(k+ +1))|=0$. Для системы (2) имеет место равенство

$$\varliminf_{k\to\infty}(2^{k+1}-2^k-k-1)^{-1}\ln|\cos(u_k^\alpha(k+1))|=\varliminf_{k\to\infty}[-1/\min\{\alpha_k,k\}].$$

Пусть $\alpha\in P_\omega$, тогда получаем $\varliminf_{k\to\infty}[-1/\min\{\alpha_k,k\}]=0$, т.е. система (2) является правильной. Если $\alpha\notin \notin P_\omega$, то $\varliminf_{k\to\infty}[-1/\min\{\alpha_k,k\}]<0$, т.е. система (2) не является правильной. Итак, мы получили отображение $\varphi:\mathcal{B}(N)\to M_2^u$ такое, что $I_2(\varphi(\alpha))=1$ при $\alpha\in P_\omega$, $I_2(\varphi(\alpha))=0$ при $\alpha\notin P_\omega$. Отображение φ является непрерывным. Действительно, пусть $\rho'(\alpha,\beta)=1/m$, т.е. $\alpha_1=\beta_1,\ldots,\alpha_m=\beta_m$. Тогда получаем $U_\alpha(t)= =U_\beta(t)$ на отрезке $[0,2^{m+1}]$,

$$\rho(U_\alpha(t),U_\beta(t))=\sup_{t>2^{m+1}}\|U_\alpha(t)-U_\beta(t)\|=\sup_{k>m+1}|u_k^\alpha-u_k^\beta|\le\pi/(m+1),$$

а следовательно, отображение φ является непрерывным. Лемма 2 доказана.

З а в е р ш е н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы. Допустим, что множество правильных систем является не только множеством типа $F_{\sigma\delta}$, но и множеством типа $G_{\delta\sigma}$, тогда $I_n:M_n\to\{0,1\}$ — характеристическая функция этого множества принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^u [2, с. 249]. Отображение $\varphi:\mathcal{B}(\mathrm{N})\to M_n^u$, определяемое формулой $\alpha\to\dot{x}=\{U_\alpha(t),\underbrace{-2,\ldots,-2}_{n-2}\}x$, где $U_\alpha(t)$ из леммы 2, является непрерывным. Рассмотрим сложное отображение $I_n(\varphi):\mathcal{B}(N)\to\{0,1\}$. С одной стороны, оно является отображением второго класса Бэра [2, с. 219], с другой — совпадает с характеристической функцией множества P_ω (лемма 2), т.е. не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(N)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Автор благодарен И. Н. Сергееву за оказанное внимание к работе.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1934.
3. *Миллионщиков В. М.* // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 92 — 109.
4. *Baire R.* // Acta Math. 1906. Vol. 30. P. 1 — 48.
5. *Макаров Е. К.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2091 — 2098.

г. Москва

Поступила в редакцию
26 сентября 1997 г.