

МОЧАЛОВ В. В.

ЗАДАЧА РИМАНА НА ОТКРЫТОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА $O_{\text{кд}}$

Обобщая нормальные потенциалы Р. Неванлинны ([1], гл. X), Y. Kusunoki [2] определил полуточные канонические дифференциалы и построил теорию абелевых интегралов на открытой римановой поверхности. М. Watanabe [3] систематически изучил эти дифференциалы на открытой римановой поверхности класса $O_{\text{кд}}$.

В предлагаемой статье на открытой римановой поверхности $R \in O_{\text{кд}}$ конечного рода решается краевая задача Римана в классе однозначных кусочно-мероморфных функций, принадлежащих \mathfrak{R}_0 .

1°. Пусть R — открытая риманова поверхность конечного рода h , принадлежащая $O_{\text{кд}}$. Обозначим через \mathfrak{R} класс полуточных канонических дифференциалов (или интегралов от них), а через \mathfrak{R}_0 подкласс \mathfrak{R} , состоящий из однозначных мероморфных функций на R .

Известно ([4], ч. 2, § 3), что для $R \in O_{\text{кд}}$ конечного рода существует единственное компактное продолжение \tilde{R} , причем дополнение поверхности R в \tilde{R} является АД устранимым множеством. Всюду в дальнейшем мы отождествляем R с подобластью на \tilde{R} , которая конформно эквивалентна R .

Воспользовавшись указанным свойством поверхности $O_{\text{кд}}$ можно показать, что для дифференциалов класса \mathfrak{R} справедливо следующее утверждение [3]:

Теорема. Предположим, что $R \in O_{\text{кд}}$ конечного рода и \tilde{R} — ее компактное продолжение. Тогда ограничение на R класса абелевых дифференциалов из \tilde{R} с полюсами внутри R совпадает с классом \mathfrak{R} .

2°. На R зададим кривую $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{p+q} \Gamma_k$, состоящую из конечного числа взаимно непересекающихся простых гладких замкнутых и разомкнутых контуров с фиксированным направлением обхода. На каждом контуре Γ_k пусть заданы функции $G_k(t)$ и $g_k(t)$, непрерывные по Гёльдеру, при этом всюду на Γ_k , $G_k(t) \neq 0$.

Задача А. Найти кусочно-мероморфную функцию $\Phi(q)$ класса \mathfrak{R}_0 с линией скачков $\Gamma \in R'$, имеющую в точках a_1, a_2, \dots, a_m поверхности R полюсы порядков не выше $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ соответственно, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad (1)$$

где R' — произвольная конечная область R .

Из свойств функций класса \mathfrak{R}_0 на поверхности $R \in O_{\text{кд}}$ следует [3], что функция $\Phi(q)$ интегрируема с квадратом в окрестности идеальной границы. Так как множество $\tilde{R}-R$ является АД устранимым, то $\Phi(q)$ можно продолжить аналитически на \tilde{R} . Продолжая $\Phi(q)$ на \tilde{R} и обозначая продолженную функцию через $F(q)$, вместо (1) будем иметь задачу Римана на замкнутой римановой поверхности.

Задача В. На \tilde{R} найти кусочно-мероморфную функцию $F(q)$ с линией скачков $\Gamma \subset R'$, имеющую в точках a_1, a_2, \dots, a_m поверхности R полюсы порядков не выше $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ соответственно, по граничному условию

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad (2)$$

где R' — конечная область R .

Обратно, из теоремы следует, что ограничение на R решения задачи В принадлежит \mathfrak{R}_0 и является решением задачи А.

Таким образом, задача Римана на открытой римановой поверхности $R \in O_{\text{кд}}$ конечного рода равносильна задаче Римана на замкнутой римановой поверхности \tilde{R} , где в качестве решения допускаются лишь функции, имеющие полюсы внутри R .

3°. Задача Римана на замкнутой римановой поверхности изучалась различными авторами ([6], [7], [8], [9]). С целью полноты изложения данного материала дадим краткое решение задачи В, следуя работам ([6], [8], [9]).

Рассмотрим сначала частный случай задачи, когда отыскивается кусочно-мероморфная функция $F(q)$ по краевому условию

$$F^+(t) - F^-(t) = g(t). \quad (3)$$

Основную роль при решении играет интеграл

$$F_1(q) = \int_{\Gamma} g(p) d\hat{\omega}(p, q, q_0), \quad q_0 \notin \Gamma,$$

где $d\hat{\omega}(p, q, q_0)$ — однозначная ветвь нормального дифференциала третьего рода $d\omega(p, q, q_0)$. Интеграл $F_1(q)$ удовлетворяет краевому условию (3), но, вообще говоря, не является решением задачи, так как при переходе через линии a_1, a_2, \dots, a_h базиса гомологий поверхности \tilde{R} он терпит разрывы первого рода

$$\begin{aligned} \int_{b_\nu} dF_1(q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(p) \int_{b_\nu} d_q d\hat{\omega}(p, q, q_0) = \\ &= \int_{\Gamma} g(p) \varphi_\nu(p), \quad \nu = 1, \dots, h, \end{aligned}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$ — канонический базис абелевых дифференциалов первого рода.

Переходя к построению общего решения, введем новую неизвестную функцию

$$\Psi(q) = F(q) - F_1(q),$$

где $F(q)$ — общее решение (3). Функция $\Psi(q)$ имеет полюсы порядков $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ в точках a_1, a_2, \dots, a_m соответственно, непрерывна на Γ и терпит разрывы первого рода при переходе через линии a_ν ,

$$\int_{b_\nu} d\psi(q) = \int_{\Gamma} g(p) \varphi_\nu(p), \quad \nu = 1, 2, \dots, h. \quad (4)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению нормированного абелева интеграла второго рода по условию (4). Интеграл ищем в виде

$$\Psi(q) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} c_{jk} \int \Psi_{a_j}^{(k)}(q) + C,$$

где $\Psi_{a_j}^{(k)}(q)$ — нормированный дифференциал второго рода, имеющий полюс порядка k в точке $q = a_j$, а c_{jk} — произвольные комплексные постоянные. B -периоды дифференциала $d\Psi(q)$ вычисляются по формуле ([5], гл. 10)

$$\begin{aligned} \int_{b_\nu} d\Psi(q) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} c_{jk} \int_{b_\nu} \Psi_{a_j}^{(k)}(q) = 2\pi i \sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} c_{jk} \frac{\varphi_\nu^{(k-2)}(a_j)}{(k-1)!}, \\ &\quad \nu = 1, \dots, h, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\Psi(q)$ удовлетворяет (4), когда коэффициенты c_{jk} удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} c_{jk} \frac{\varphi_\nu^{(k-2)}(a_j)}{(k-1)!} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(p) \varphi_\nu(p), \nu = 1, \dots, h. \quad (5)$$

Общее решение задачи (3) запишется по формуле

$$F(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(p) d\hat{\omega}(p, q, q_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} \int \Psi_{a_j}^{(k)}(q) + C, \quad (6)$$

где коэффициенты c_{jk} связаны системой уравнений (5).

Пусть ранг системы (5) равен ζ : $0 < \zeta \leq h$. Пусть далее $\{N_{1k}, \dots, N_{hk}\}$, $k = 1, 2, \dots, h - \zeta$ — полная система линейно независимых решений соответствующей (5) однородной транспонированной системы. Тогда система (5) разрешима при выполнении $h - \zeta$ необходимых и достаточных условий

$$\sum_{i=1}^h N_{ik} \left[\int_{\Gamma} g(p) \varphi_i(p) \right] = 0, \quad k = 1, \dots, h - \zeta. \quad (7)$$

В случае разрешимости система (5) имеет $\mu - \zeta$ линейно независимых решений, где $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k$. Задача (3) имеет, следовательно, $\mu - \zeta + 1$ линейно независимых решений.

Переходим к решению задачи B. Решение начнем с построения канонической функции, которая является частным решением однородной задачи

$$F^+(t) = G(t) F^-(t), \quad t \in \Gamma. \quad (8)$$

Исследуем сначала интеграл

$$\Gamma(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G(p) d\hat{\omega}(p, q, q_0), \quad q_0 \notin \Gamma.$$

Обозначим через t_1, t_2, \dots, t_p точки, принятые за начало обхода на замкнутых контурах $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$. Концы разомкнутых кривых $\Gamma_{p+1}, \dots, \Gamma_{p+q}$ обозначим через $t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_{p+2q-1}, t_{p+2q}$ соответственно. Переходя в окрестности этих точек к стандартному локальному параметру $z: q = q_k(z)$, $t_k = q_k(0)$, при $|z| < 1$ будем иметь

$$\Gamma[q_k(z)] = (\alpha_k + i\beta_k) \ln z + \Gamma_k^*(z), \quad (9)$$

где $\Gamma_k^*(z)$ — ограниченная функция в окрестности точки t_k , стремящаяся к конечному пределу при $z \rightarrow 0$,

$$\alpha_k + i\beta_k = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t_k - 0) - \ln G(t_k + 0)] \right\}, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\alpha_k + i\beta_k = \pm \frac{1}{2\pi i} \ln G(t_k), \quad k = p + 1, \dots, p + 2q.$$

При переходе через линии a_1, a_2, \dots, a_n функция $\Gamma(q)$ терпит разрывы первого рода

$$\int_{b_\nu}^{\Gamma} d\Gamma(q) = \int_{\Gamma} \ln G(p) \varphi_\nu(p), \quad \nu = 1, \dots, h. \quad (10)$$

Таким образом, функция $\exp \Gamma(q)$, удовлетворяя граничному условию (8), не является решением задачи, ибо:

1) ее граничные значения не будут непрерывными, если хотя бы одно из чисел $\alpha_k, k = 1, \dots, p$, отрицательно, так как в окрестности точек t_k в силу формулы (9)

$$\exp \Gamma[q_k(z)] = z^{\alpha_k} \exp \Gamma_k^*(z);$$

2) на концах, для которых $\alpha_k < 0, |\alpha_k| > 1, k = p + 1, \dots, p + 2q$, $\exp \Gamma[q_k(z)]$ будет обращаться в бесконечности неинтегрируемого порядка, так как в окрестности конца t_k в силу формулы (9)

$$\exp \Gamma[q_k(z)] = z^{\alpha_k + i\beta_k} \exp \Gamma_k^{**}(z);$$

3) в силу (10) $\exp \Gamma(q)$ терпит разрывы первого рода при переходе через линии a_1, a_2, \dots, a_h .

Чтобы устранить возможные разрывы в точках $t_k, k = 1, \dots, p$ и неинтегрируемые особенности на концах, воспользуемся функцией

$$E(q, t_k, \hat{q}) = \exp \int_{\hat{q}}^{t_k} d\omega(p, q, q_0),$$

где q_0 не лежит на линии интегрирования, а \hat{q} — некоторая внутренняя точка R , не лежащая на контуре интегрирования Γ и не совпадающая с q_0 . Функция $E(q, t_k, \hat{q})$ имеет в точке t_k простой нуль, а в точке \hat{q} — простой полюс и разрывы первого рода при переходе через a_1, a_2, \dots, a_h . Образует произведение

$$X_1(q) = e^{\Gamma(q)} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{\alpha_k} E(q, \hat{q}, t_k) \prod_{k=m+1}^{p+2q} \prod_{j=1}^{|\alpha_k|} E(q, t_k, \hat{q}), \quad (11)$$

где α_k — целые числа, подобранные так, чтобы $0 < \alpha_k - \alpha_k < 1$ на концах определяющих класс, $-1 < \alpha_k - \alpha_k < 0$ на других

неособенных концах, $\alpha_k - x_k = 0$ на особенных концах и в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, p$. Произведение (11) представляет из себя кусочно-мероморфную функцию класса h_s , граничные значения которой удовлетворяют краевому условию (8): в точках линии Γ , отличных от концевых, она непрерывна и не обращается в нуль. Однако функция (11) имеет разрывы при переходе через линии a_1, a_2, \dots, a_h . Чтобы устранить эти разрывы, введем новую неизвестную функцию

$$X(q) = X_1(q) \exp \left\{ \sum_{k=1}^h \int_{\hat{q}}^{q_k} d\hat{\omega}(p, q, q_0) \right\}. \quad (12)$$

Пути интегрирования интегралов 3 рода

$$\int_{\hat{q}}^{q_k} d\hat{\omega}(p, q, q_0), \quad k = 1, 2, \dots, h$$

пока не определены. Функция $X(q)$ принадлежит классу h_s , удовлетворяет краевому условию (8) и при переходе через A -разрезы канонического сечения приобретает множители

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = \exp \left\{ - \int_{\Gamma} \ln G(\tau) \varphi_\nu(\tau) + 2\pi i \sum_{k=1}^{p+2q} x_k \int_{\hat{q}}^{t_k} \varphi_\nu(\tau) - \right. \\ \left. - 2\pi i \sum_{k=1}^h \int_{\hat{q}}^{q_k} \varphi_\nu(\tau) \right\}, \quad t \in a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, h.$$

Точки q_k , $k = 1, 2, \dots, h$ определим так, чтобы функция (12) стала однозначной на $R - \Gamma$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{k=1}^h \int_{\hat{q}}^{q_k} \varphi_\nu(\tau) \equiv \sum_{k=1}^h u_\nu(q_k) = \sum_{k=1}^{p+2q} x_k \int_{\hat{q}}^{t_k} \varphi_\nu(\tau) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G(\tau) \varphi_\nu(\tau), \quad \nu = 1, \dots, h. \quad (13)$$

В систему (13) входят абелевы интегралы первого рода, многозначные на R . Поэтому систему (13) следует рассматривать как систему сравнений по модулю периодов абелевых интегралов первого рода

$$\sum_{\mu=1}^h u_\nu(q_\mu) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G(\tau) \varphi_\nu(\tau) + \sum_{k=1}^{p+2q} \int_{\hat{q}}^{t_k} \varphi_\nu(\tau), \quad \nu = 1, \dots, h. \quad (14)$$

Таким образом, для определения точек q_1, \dots, q_h получена задача обращения абелевых интегралов 1 рода — проблема обращения Якоби.

Допустим теперь, что точки q_1, \dots, q_h уже определены. Сохраним за решением проблемы Якоби прежние обозначения. Не меняя положения точек \hat{q}, q_1, \dots, q_h , будем деформировать пути интегрирования в соотношениях (14) так, чтобы последние превратились в точные равенства. Возможность этого следует из методики решения проблемы Якоби [8].

Пусть среди точек q_1, \dots, q_h различными будут точки q_1, \dots, q_n , и их кратности обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. При указанном выборе точек q_1, \dots, q_h функция (12) удовлетворяет однородному краевому условию (8) и имеет порядок κ . (Нули порядков $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в точках q_1, \dots, q_n , нуль порядка $\kappa - h$, если $\kappa > h$, и полюс порядка $h - \kappa$, если $\kappa < h$ в точке \hat{q}). Так как $\hat{q} \in R$, то функция $X(q)$ удовлетворяет всем требованиям канонической функции.

С помощью канонической функции краевое условие (2) приведем к виду

$$[F(t)X^{-1}(t)]^+ - [F^{-}(t)X^{-1}(t)]^- = g(t)[X^+(t)]^{-1}, \quad t \in \Gamma.$$

Получаем задачу о скачке для функции $\Psi_1(q) = F(q)X^{-1}(q)$ с особенностями. (Полюсы порядков μ_1, \dots, μ_m в точках a_1, \dots, a_m , полюсы порядков $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в точках q_1, \dots, q_n , полюс порядка $\kappa - h$, если $\kappa > h$ и нуль порядка $h - \kappa$, если $\kappa < h$ в точке \hat{q}).

Общее решение задачи (2) запишется по формуле

$$F(q) = X(q)\Psi_1(q), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(q) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(p)[X^+(p)]^{-1} d\hat{\omega}(p, q, q_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} b_{jk} \int \Psi_{a_j}^{(k)}(q) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{\lambda_j+1} c_{jk} \int \Psi_{q_j}^{(k)}(q) + \varepsilon \sum_{k=2}^{|\kappa-h|+1} d_k \int \Psi_{\hat{q}}^{(k)}(q), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\varepsilon = 0$ при $\kappa < h$ и $\varepsilon = 1$ при $\kappa > h$, а произвольные постоянные b_{jk}, c_{jk}, d_k связаны системой уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_j+1} b_{jk} \frac{\varphi_v^{(k-2)}(a_j)}{(k-1)!} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{\lambda_j+1} c_{jk} \frac{\varphi_v^{(k-2)}(q_j)}{(k-1)!} + \\ & + \varepsilon \sum_{k=2}^{|\kappa-h|+1} d_k \frac{\varphi_v^{(k-2)}(\hat{q})}{(k-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(p)[X^+(p)]^{-1} d\hat{\omega}(p, q, q_0). \end{aligned} \quad (17)$$

При $\kappa < h$ к системе условий (17) добавляется еще одна система

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=2}^{\mu_{j+1}} b_{jk} \frac{d}{dq^\sigma} \int \Psi_{a_j}^{(k)}(q) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2}^{\lambda_{j+1}} c_{jk} \frac{d}{dq^\sigma} \int \Psi_{q_j}^{(k)}(q) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dq^\sigma} g(p) [X^+(p)]^{-1} d\hat{\omega}(p, q, q_0), \quad \sigma = 0, 1, \dots, h - \kappa - 1.$$

(18)

Исследование числа линейно-независимых решений и условий разрешимости задачи проводится по такой же схеме, как в [6]. Мы не будем на этом останавливаться.

Переходим к решению задачи А. Как уже отмечалось, решение задачи А совпадает с решением задачи В, определенным на поверхности \tilde{R} , поэтому решение задачи (2) запишется по формулам (15)–(18), где под $\Phi(q)$, $X(q)$, $\Psi_1(q)$, $\varphi_\nu(q)$, $\Psi_{a_j}^{(k)}(q)$, $d\hat{\omega}(p, q, q_0)$ понимается ограничение на R функций $\Phi(q)$, $X(q)$, $\Psi_1(q)$, $\varphi_\nu(q)$, $\Psi_{a_j}^{(k)}(q)$, $d\hat{\omega}(p, q, q_0)$ соответственно, определенных на поверхности \tilde{R} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Неванлинна Р. Униформизация. М., ИЛ., 1955.
2. Kusunoki Y. Theory of Abelian integrals and its applications to conformal mappings. Mem. Col. Sci. Univ. of Kyoto, Ser. A, Math., 32, № 2, 1959.
3. Watanabe M. A remark on the Weierstrass points on open Riemann surfaces.—I. Math. Kyoto Univ., 1966, 5, № 3.
4. Sario L., Nakai M. Classification theory of Riemann surfaces. Berlin, Springer, 1970.
5. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ., 1960.
6. Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами.—Иzv. вузов. Математика, 1961, № 6, с. 121–131; Письмо в редакцию.—Иzv. вузов. Математика, 1962, № 3, с. 81–94.
7. Родин Ю. Л. О задаче Римана на замкнутой римановой поверхности.—ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, с. 1038–1040.
8. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.—УМН, 1971, т. 26, вып. 1 (157), с. 113–179.
9. Мерлин А. В. О сингулярном интегральном уравнении с многозначным на римановой поверхности ядром.—Труды семинара по краевым задачам, вып. 6. Изд-во Казан. ун-та, 1969, с. 167–178.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 г.