В. Д. Дзгоев, О конструктивных булевых алгебрах,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 750–757

https://www.mathnet.ru/mzm4198

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

О КОНСТРУКТИВНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

В. Д. Дзгоев

С помощью техники деревьев, по конструктивной булевой алгебре и ее идеалу, строится сильно конструктивная атомная булева алгебра, фактор которой, по идеалу Фреше, изоморфен фактору исходной алгебры по исходному идеалу. Как следствие получено достаточное условие сильной конструктивизируемости.

Необходимое определение и факты из теории конструктивных булевых алгебр можно найти в [1]. Нам понадобится техника деревьев [2].

Определим частичный порядок $\preccurlyeq$ на натуральных числах с помощью следующих рекурсивных функций:

$$P(n) = \left[\frac{n \dot{-} 1}{2}\right], \quad L(n) = 2n + 1, \quad R(n) = 2n + 2,$$

$$n' = \begin{cases} n + 1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ n \dot{-} 1, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

$$\alpha(n, 0) = n, \quad \alpha(n, m + 1) = P(\alpha(n, m)).$$

Полагаем

$$m \preccurlyeq n = \prod_{i=0}^{m} |\alpha(m, i) - n| = 0.$$

Понятно, что $\preccurlyeq$ — рекурсивное отношение, $\langle N, \preccurlyeq\rangle$ — частично упорядоченное множество, которое будем называть *полным деревом*. Множество $D \subseteq N$ будем называть *деревом*, если выполнены условия:

1) если $n \in D$, $n \preccurlyeq m$, то $m \in D$;

2) если $n \in D$, то $n' \in D$.

В терминах частичного порядка $\preccurlyeq$ функции P, R, L можно понимать следующим образом:

$P(n)$ — непосредственный последователь элемента n, т. е. между ними нет никаких других элементов;

$L(n)$ — непосредственный левый предшественник элемента n;

$R(n)$ — непосредственный правый предшественник элемента n;

n' — несравнимый с n элемент, но они имеют один и тот же последователь.

Множество $\Pi[n] = \{x \in D \mid x \succcurlyeq n\}$ назовем *цепью, содержащей* n. *Тупиком дерева* назовем $n \in D$ такой, что $R(n) \notin D$. Понятно, что полное дерево тупиков не имеет.

ЛЕММА 1. *Пусть D — дерево; тогда D рекурсивно тогда и только тогда, когда множество тупиков $T(D)$ рекурсивно.*

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 2. *Если D — рекурсивно перечислимое дерево и $T(D)$-множество тупиков рекурсивно перечислимо, то $T(D)$ рекурсивно.*

Доказательство. Перечисляем одновременно D и $T(D)$. Если $n \in \omega$ принадлежит D, то через конечное число шагов n вычислится в D. Если $n \notin D$, то через конечное число шагов в $T(D)$ вычислится элемент m такой, что $m < n$ и $m \succcurlyeq n$.

В [2] по дереву D каноническим образом строится булева алгебра $\mathfrak{B}_D$ и показано, что если D рекурсивно перечислимо, то $\mathfrak{B}_D$ — конструктивизируемая. В [3] показано, как по конструктивной булевой алгебре $(\mathfrak{B}, \nu)$ построить рекурсивно перечислимое дерево D такое, что $(\mathfrak{B}, \nu)$ изоморфно $(\mathfrak{B}_D, \nu_D)$. Заметим, что в этих соответствиях атому булевой алгебры $\mathfrak{B}$ соответствует тупик дерева D. И наоборот, тупику дерева D соответствует атом алгебры $\mathfrak{B}_D$.

Из теории рекурсии нам понадобится одно утверждение, которое мы приводим с доказательством.

ЛЕММА 3. *Если множество A является Δ_2^0-множеством арифметической иерархии, то существует вычисляемая последовательность $\{B_i \mid i \in \omega\}$ конечных множеств такая, что для любого $n \in \omega$ существуют $t_1, t_2 \in \omega$ такие, что если $n \in A$, то $n \in B_{t'}$ для $t' \geqslant t_1$; если же $n \notin A$, то $n \notin B_{t'}$ для $t' \geqslant t_2$.*

Доказательство. Так как $\Delta_2^0 = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, то существуют рекурсивные предикаты P и Q такие, что

$$(\exists x)(\forall y)\, Q\,(n, x, y) \leftrightarrow n \notin A,$$
$$(\exists x)(\forall y)\, P\,(n, x, y) \leftrightarrow n \in A.$$

Определим функцию

$$f\,(n, y) = \mu x\,[(\forall y' \leqslant y)\, P\,(n, x, y') \vee (\forall y' \leqslant y)\, Q\,(n, x, y')].$$

Очевидно, что f — рекурсивная функция. Пусть

$$B_m = \{n \mid n \leqslant m \,\&\, (\forall y \leqslant m)\, P\,(n, f\,(n, m), y)\}.$$

Покажем, что $\{B_m\}_{m \in \omega}$ — искомая последовательность.

Пусть $n \in A$; тогда существует такое число $y_0 \geqslant n$, что для $y \geqslant y_0$ имеем $(\forall y' \leqslant y)\, P\,(n, f\,(n, y), y')$ и, следовательно, $n \in B_y$. Наоборот, пусть $n \notin A$; тогда существует y_1 такое, что $y_1 \geqslant n$ и для $y \geqslant y_1$

$$(\forall y' \leqslant y)\, Q\,(n, f(n, y), y') \;\&\; \neg\, \neg\, (\forall y' \leqslant y)\, P\,(n, f\,(n, y), y').$$

Допустим, что существует $\bar{y} \geqslant y$ и $n \in B_{\bar{y}}$, тогда по определению $B_{\bar{y}}$ имеем, что $(\forall g \leqslant \bar{y})\, P\,(n, f\,(n, \bar{y}), g)$, что противоречит выбору числа y_1.

Сформулируем к доказательству основной результат данной работы, аннотированный в [4].

ТЕОРЕМА. *Пусть* $(\mathfrak{B}, \nu)$ — *конструктивная булева алгебра и* J — *идеал* $\mathfrak{B}$. *Если* $B = \nu^{-1}\,(J)$ *является* Δ_2^0-*множеством арифметической иерархии, то существует сильно конструктивизируемая атомная булева алгебра* $\mathfrak{A}$ *такая, что* $\mathfrak{B}/J$ *изоморфна* $\mathfrak{A}/\Phi$, *где* Φ — *идеал Фреше.*

Доказательство разобьем на леммы, которым предпошлем вспомогательные построения.

Пусть $D = \bigcup_i D_i$ — рекурсивно перечислимое дерево такое, что $\mathfrak{B}_D \cong \mathfrak{B}$ и для любых $n, m \in \omega$, если $m \in D_{n+1}$, то $P\,(m) \in D_n$ (см. [3]). Пусть $\{B_i \mid i \in \omega\}$ — вычислимая последовательность конечных множеств, существование которой доказано в лемме 3.

По индукции строим рекурсивно перечислимое дерево D', которое будет порождать искомую алгебру $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_{D'}$. По индукции построим также частично рекурсивную функцию $\varphi\,(x, y)$, которая будет порождать изоморфизм булевых алгебр и рекурсивно перечислимый предикат A, совпадающий с множеством тупиков дерева D'.

Построение дерева D'.

Шаг 0. $D_0' = \{0\}$, $\varphi(0, 0) = 0$, $A(0) \neq 1$.

Шаг $2n+1$. Пусть $e \in D_{n+1}$ — наименьшее число такое, что $e \in B_w$, метка $\Box e$ не стоит на элементах D_{n+1} и выполняются следующие два условия:

Утверждение 1. *Существует тупик $a \in D_{n+1}$ такой, что элементы цепи $\pi[a]$ не помечены никакими метками и $e \notin \pi[a]$.*

Утверждение 2. *Для любого элемента $m \in D_{n+1}$, $m > e$, не помеченного никакими метками, существует тупик k такой, что $m \succcurlyeq k$, $e \not\succcurlyeq k$ и элементы $\pi[k]$ не помечены метками.*

Тогда помечаем меткой $\Box e$ все числа $x \in D_{n+1}$, $x \preccurlyeq e$. Пусть $n_0, n_1, \ldots, n_s$ — тупики дерева D_n' такие, что $A(n_i) \neq 1$, $i \leqslant s$. Пусть $n_i = \varphi(2n, m_i)_{i \leqslant s}$. Тогда полагаем $\tilde{D}_{2n+1} = D_{2n}' \cup \{R(n_i), L(n_i) \mid i \leqslant s\}$, $D_{2n+1}' = \tilde{D}_{2n+1} \cup \{LR(n_i), RR(n_i) \mid R(m_i) \in D_{n+1}$, и $R(m_i)$ не помечено метками $i \leqslant s\}$.

Определим функцию φ так:

$$\varphi(2n+1, m_i) = R(n_i), \quad \varphi(2n+1, L(m_i)) = L(R(n_i)),$$
$$\varphi(2n+1, R(m_i)) = R(R(n_i)).$$

Для $t \in D_{n+1} \setminus \{m_i, L(m_i), R(m_i) \mid i \leqslant s\}$ полагаем $\varphi(2n+1, t) = \varphi(2n, t)$ и $A(L(n_i)) = 1$ для $i \leqslant s$. Для всех k таких, что $k \preccurlyeq \varphi(2n+1, e)$ и k является тупиком дерева D_{n+1}', полагаем $A(k) = 1$. Переходим к следующему шагу.

Шаг $2n+2$. Пусть p — наименьший из элементов D_{n+1} таких, что p помечен меткой $\Box p$ и вместе с тем $p \in B_n$. Тогда пусть $m \in D_{2n+1}'$ — наименьший элемент относительно порядка $\preccurlyeq$ со следующим свойством:

$$(*)\begin{cases} m \in \pi[\varphi(2n+1, p)] \text{ и существует } a \text{ — тупик дерева}, \\ D_{2n+1}' \text{ — такой, что } a \preccurlyeq m, \quad A(a) \neq 1. \end{cases}$$

Пусть a — наименьший с таким свойством; определяем

$$D_{2n+2}' = D_{2n+1}' \cup \{x \mid x \in D_a^m\},$$

где D_a^m — конечное поддерево полного дерева с вершиной, совпадающей с элементом a, которое изоморфно дереву $D_{n+1}(q)$, где q определяется равенством $m = \varphi(2n+1, q)$,

$$D_{n+1}(q) = \{x \in D_{n+1} \mid x \preccurlyeq q\}.$$

Полагаем $A(y) = 1$ для всех y, которые являются тупиками D^{*}_{2n+1}, и выполнено $(\neg\, y \preccurlyeq a \,\&\, y \preccurlyeq m)$. Для всех $x \in D_{n+1}(q)$ полагает $\varphi(2n+2, x) = y$, где y — образ элемента x при изоморфизме $D_{n+1}(q)$ на подмножество D^m_a. Для остальных $x \in D_{n+1}$ определяем $\varphi(2n+2, x) = \varphi(2n+1, x)$. Метку $\square p$ снимаем со всех элементов D_{n+1}. Если какое-то условие не выполняется, то переходим к следующему шагу; полагаем $\varphi(2n+2, x) = \varphi(2n+1, x)$ для $x \in D_{n+1}$. Построение окончено.

Замечания. 1. Если $x \in D_n$ и помечено меткой $\square e$ и $y \prec x$, то y также помечено меткой $\square e$.

2. Если $t \in \omega$, $x \prec y$, то $\varphi(2t+1, x) < \varphi(2t+1, y)$.

3. Число $x \in D$ помечалось меткой тогда и только тогда, когда $D'(P(\varphi(t, x))) = \{y \in D' \mid y \preccurlyeq \varphi(t, x)\}$ — конечное множество для $t \in \omega$ такого, что $\varphi(t, x)$ определено.

4. Число $x \in \omega$ является тупиком дерева D' тогда и только тогда, когда $A(x) = 1$.

ЛЕММА 4. *Для любого* $u \in \omega$ *метка* $\square n$ *ставится не более конечного числа раз.*

Доказательство. Предположим, что метка $\square e$ ставится бесконечное число раз и снимается бесконечное число раз. Рассмотрим возрастающую последовательность $\xi = \{n_i \mid i < \omega\}$ таких натуральных чисел, что на шаге $2n_i + 1$ метка $\square e$ ставилась, а на шаге $2n_{i+1} + 2$ метка $\square e$ снималась с элементов дерева. Из построения следует, что $e \in B_{n_i}$ и $e \notin B_{n_{i+1}}$ для $n_i \in \xi$. Это противоречит лемме 3 по выбору $\{B_i \mid i < \omega\}$.

ЛЕММА 5. *Для любого* $x \in \omega$ *существует шаг, начиная с которого, если* $x \in B$, *то метка* $\square x$ *ставится и не снимается; если* $x \notin B$, *то метка* $\square x$ *снимается и больше не ставится.*

Доказательство. В силу выбора последовательности $\{B_i\}_{i<\omega}$ для любого $x \in \omega$ существует $n \in \omega$ такое, что если $x \in B$, то $x \in B_{\bar{n}}$, $\bar{n} \geqslant n$; если $x \notin B$, то $x \notin B_{\bar{n}}$, $\bar{n} \geqslant n$.

Начиная с шага $2n + 1$, метка $\square x$ либо устанавливается и сниматься не будет, либо вообще не будет ставиться.

ЛЕММА 6. *Для любого* $x \in D \setminus B$ *существует* $t \in \omega$ *такое, что* $\varphi(t, x)$ *определено.*

Доказательство. Пусть $x \in D \setminus B$ и существует $t \in \omega$ такое, что $\varphi(t, x)$ определено. Предположим, что $L(x) \in D \setminus B$. Пусть n — наименьшее число такое, что $L(x) \in D_{n+1}$. Если на шаге $2n+1$ $L(x)$ не помечено никакой меткой, то $\varphi(2n+1, L(x))$ определено. Пусть число $L(x)$ на шаге $2n+1$ помечено меткой. Так как $L(x) \notin B$, то по лемме 5 существует шаг k такой, что на этом шаге и далее число $L(x)$ больше никаких меток не получит. Тогда на шаге $2k+2$ $\varphi(2k+2, L(x))$ определится. Для $R(x)$ доказательство аналогично.

ЛЕММА 7. *Для любого элемента $y \in D'$, не являющегося тупиком, существуют $x \in D$ и $t \in \omega$ такие, что $y = \varphi(t, x)$.*

Доказательство. На каждом шаге $n \in \omega$, если y не становилось тупиком дерева D', то с добавлением y к D'_n указывалось $x \in D$ такое, что $\varphi(n, x) = y$.

ЛЕММА 8. *Для любого $x \in D \setminus B$ такого, что x не является тупиком дерева D, существует t_0 такое, что для $t \geqslant t_0$ $\varphi(t, x) = \varphi(t_0, x)$, т. е. стабилизируется φ.*

Доказательство. Если $x \in D$ ни разу не получало меток, то утверждение следует из определения шага $2n+1$. Пусть $x \notin B$, но на x ставились и с x снимались метки. Для любого $x \in D$, если $x \notin B$, то либо $L(x) \notin B$, либо $R(x) \notin B$. Рассмотрим два случая:

$$\text{(i)} \qquad L(x) \notin B, \quad R(x) \in B;$$

$$\text{(ii)} \qquad L(x) \notin B, \quad R(x) \notin B.$$

(Случай $L(x) \in B$, $R(x) \notin B$ аналогичен (i), и мы его не рассматриваем.)

Случай (i). В силу лемм 5 и 6 существует шаг n_1, после которого на $x, L(x)$ не ставится никаких меток, значение $\varphi(n_1, x)$ определено, на $R(x)$ поставлена метка и больше не снимается. Предположим, что $\varphi(n_1, x) \neq \neq \varphi(n_1 + t, x)$ для некоторого $t \in \omega$. Это означает, что на каком-то шаге $2k$, $2k \geqslant n_1$, наименьшее $m \in D'_n$, удовлетворяющее условию (*) шага $2k$, равно x. Но так как $R(x)$ помечено меткой и если x удовлетворяет условию (*), то $L(x)$ тоже удовлетворяет (*). Следовательно, $m \preccurlyeq L(x)$ и $\varphi(n_1 x) = \varphi(n_1 + t, x)$ для любого $t \in \omega$.

Случай (ii). Пусть n_2 — шаг, после которого на элементы x, $L(x)$, $R(x)$ не ставится меток. Тогда в силу условия Y_2 шага $2k+1$ для любого $n > n_2$ в дереве D_{n+1} существуют тупики k_0, k_1 такие, что элементы цепи $\pi[k_i]_{i \leqslant 1}$ не помечены метками и $k_1 \preccurlyeq L(x)$, $k_2 \preccurlyeq R(x)$.

В силу замечания (3) существуют бесконечные цепи π_0, π_1 в дереве D' такие, что $\varphi(n_2, L(x)) \in \pi_0$, $\varphi(n_2, R(x)) \in \pi_2$. Это гарантирует, что на любом шаге $2k$ минимальное относительно порядка $\preccurlyeq$ число $m \in D'_{2k}$, удовлетворяющее условию (*), не равно x и, следовательно, $\varphi(n_2, x) = \varphi(n_2 + t, x)$ для любого $t \preccurlyeq x$.

Окончание доказательства теоремы. Для любого $x \in \mathfrak{B}_D$, если $x \notin J$, то существует $n_i \in D \setminus B$, $n_i \subseteq x$. С другой стороны, если $x \subseteq y$, то $[x] \subseteq [y]$. Следовательно, $X = \{[x] \in \mathfrak{B}/J \mid x \in D \setminus \setminus B\}$ — плотное множество в $\mathfrak{B}/J$. Очевидно, что X порождает $\mathfrak{B}_D/J$. Применяя теорему 12.5 [5, с. 62], получаем, что булева алгебра $\mathfrak{B}_D/J$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}_{D_1}$, где D_1 — дерево, порожденное множеством $D \setminus B$.

Пусть $Y = \{[y] \in \mathfrak{B}_D/\Phi \mid y \in D$, существуют $x \in D$ $t_0 \in \omega$ такие, что $y = \varphi(t_0, x)$ и для любого $t \in \omega$ $\varphi(t_0, x) = \varphi(t_0 + t_1, x)$, либо если такого t_0 нет, то любое $t \in \omega$, такое, что $y = \varphi(t, x)\}$.

Покажем, что Y плотно в $\mathfrak{B}_{D'}/\Phi$. Из леммы 7 следует, что для любого $y \in D'$, если y не тупик, то существуют $x \in D, t \in \omega$ такие, что $y = \varphi(t, x)$. Пусть t_0 — наименьшее число такое, что $\varphi(t_0 x) = \varphi(t_0 + t_1, x)$, $t \in \omega$. Если $t_0 = 2n + 1$, то $\varphi(2n + 1, x) \preccurlyeq \varphi(2n, x)$. Если $t_0 = 2n + 2$, то пусть m — наименьшее относительно порядка $\preccurlyeq$ число, удовлетворяющее условию (*) шага $2n + 2$,

$$\varphi(t_0, x) \preccurlyeq m, \quad m = \varphi(2n + 1, q).$$

Из определения шага $2n + 2$ имеем, что

$$[m] = [\varphi(2n + 1, q)] = [\varphi(2n + 2, q)]$$

и $\varphi(t_0, x) \preccurlyeq \varphi(2n + 2, q)$. Следовательно, Y плотно в в $\mathfrak{B}_{D'}/\Phi$. Из лемм 7 и 8 следует, что Y порождает $\mathfrak{B}_{D'}/\Phi$.

Зададим функцию f следующим образом:

$$f([\bigcup \{n_1, \ldots, n_s\}]) = [\bigcup \{\varphi(t, n_1), \ldots, \varphi(t, n_s)\}],$$

где t — наименьшее число такое, что $\varphi(t, n_i) = \varphi(t + k, n_i)$, $k \in \omega$, $i \leqslant s$, либо если такое t не существует, то оно выбирается произвольно. Из определения дерева и способа построения по дереву D булевой алгебры $\mathfrak{B}_D$ можно получить, что для любого $x \in \mathfrak{B}_D$ $x = \bigcup \{p_1, \ldots, p_s\}$ имеет единственное представление длины s. Это позволяет легко проверить корректность определения функции f.

Из лемм 7 и 8 легко следует, что f задает биекцию X на Y с сохранением включений. Применяя теорему 12.5 [5, с. 62], получаем, что $\mathfrak{B}_{D'}/\Phi$ изоморфна $\mathfrak{B}_D/J$, что доказывает теорему.

Следствие 1. *Если* $(\mathfrak{B}, \nu)$ — *конструктивная атомная булева алгебра,* Φ — *идеал Фреше алгебры* $\mathfrak{B}$, $\nu^{-1}(\Phi) \in \Delta_2^0$, *то* $\mathfrak{B}$ *сильно конструктивизируема.*

Доказательство. Из теоремы следует существование сильно конструктивизируемой атомной булевой алгебры $\mathfrak{B}'$ такой, что $\mathfrak{B}'/\Phi$ изоморфна $\mathfrak{B}/\Phi$. Как известно, это влечет изоморфизм самих алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$.

Следствие 2 [6]. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *конструктивизируемая булева алгебра; тогда существуют сильно конструктивизируемые булевы алгебры* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ *такие, что* $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1/\Phi \cong \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1 \not\cong_r \mathfrak{B}_2$, *где* $\cong_r$ *означает рекурсивный изоморфизм булевых алгебр.*

Следствие 3 [7, 2]. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *атомная булева алгебра; тогда, если* $\mathfrak{B}/\Phi$ *конструктивизируема, то* $\mathfrak{B}$ *сильно конструктивизируема.*

Автор благодарит С. С. Гончарова за постановку задачи и внимание к работе.

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова

Поступило 28.08.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ершов Ю. А. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
[2] Перетятькин М. Г. Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 5. С. 535—557.
[3] Гончаров С. С. Некоторые свойства конструктивизаций булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2, С. 264—278.
[4] Дзгоев В. Д. О конструктивизируемости булевых алгебр // IV Всесоюзная конференция по математической логике (тезисы) // Кишинев, 1976. С. 42
[5] Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
[6] Remmel J. B. Recursive isomorphism types of recursively presented Boolean algebras // Notices Amer. Math. Soc. 1987. V. 25, № 7. A — 706.
[7] Гончаров С. С. Конструктивизируемость некоторых булевых алгебр и суператомных булевых алгебр // Тезисы докладов X научной студенческой конференции / Новосибирск, 1972. С. 13—14.