Г. Г. Магарил-Ильяев, Точные решения некоторых задач приближения положительными операторами, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 91–99

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Г. Г. Магарил-Ильяев

1. Пусть $\mathbf{T}$ — окружность единичного радиуса, которую будем реализовывать в виде отрезка $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами и $L_p(\mathbf{T})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и $C(\mathbf{T})$ — банаховы пространства вещественных измеримых функций $x(\cdot)$ на $\mathbf{T}$ с нормами

$$\|x(\cdot)\|_p := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \mathbf{T}} |x(t)|, & p = \infty, \end{cases}$$

и $\|x(\cdot)\|_C := \max\{|x(t)| \mid t \in \mathbf{T}\}$ соответственно.

В работе рассматриваются линейные положительные операторы вида

$$\Lambda x(t) := (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} u(t-\tau)\, x(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

где $u(\cdot) \in L_1(\mathbf{T})$ и $u(t) \geqslant 0$ п.в. Ясно, что Λ — непрерывный оператор из $C(\mathbf{T})$ в $C(\mathbf{T})$. Будем говорить, что оператор Λ соответствует функции $u(\cdot)$.

Пусть $r \in \mathbf{N}$. Обозначим через W_∞^r совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbf{T}$, у которых $(r-1)$-ая производная $x^{(r-1)}(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\|x^{(r)}(\cdot)\|_\infty \leqslant 1$.

Каждому целому $m \geqslant 0$ сопоставим функцию $\varphi_m(\cdot)$ на $\mathbf{T}$, такую что $\varphi_m^{(m)}(t) := \operatorname{sign}\sin t$ $(\varphi_0^{(0)}(\cdot) := \varphi_0(\cdot))$. Функции $\varphi_m(\cdot)$ хорошо известны в теории приближений (см., например, [1]). Числа

$$K_m := \|\varphi_m(\cdot)\|_C = \varphi_m\left(\frac{m+1}{2}\pi\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j(m+1)}}{(2j+1)^{m+1}}$$

обычно называют константами Фавара.

Положим

$$\mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_1(\mathbf{T}) \mid \|u(\cdot)\|_1 = 1, \quad u(t) \geqslant 0, \quad u(t) = u(-t) \text{ п.в.}\}.$$

2. ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$ *и оператор* Λ *соответствует* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. *Тогда*

$$E_r(\Lambda) := \sup_{x(\cdot)\in W^r_\infty} \| x(\cdot) - \Lambda x(\cdot) \|_C =$$

$$= K_r - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \varphi_r\left(t + \frac{r+1}{2}\pi\right) dt. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $v(\cdot) \in L_1([0, \pi])$, $v(t) \geqslant 0$ п.в. и $\overset{0}{W}{}^r_\infty := \{x(\cdot) \in W^r_\infty \mid x(0) = 0, x(t) = x(-t), t \in \mathbf{T}\}$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$-(2/\pi) \int_0^\pi v(t)\, x(t)\, dt \to \sup, \qquad x(\cdot) \in \overset{0}{W}{}^r_\infty. \qquad (2)$$

Центральным местом доказательства теоремы 1 является следующая

ЛЕММА. *Функция* $\hat{x}(t) := \varphi_r(t + ((r+1)/2)\pi) - K_r$ — *решение задачи* (2).

Прежде чем доказывать лемму, покажем как из нее следует утверждение теоремы 1. Выражение справа в (1) есть $\hat{x}(0) - \Lambda \hat{x}(0)$, и поэтому оно не превосходит $E_r(\Lambda)$. Допустим, что оно строго меньше $E_r(\Lambda)$. Тогда найдется такая функция $x_1(\cdot) \in W^r_\infty$, что

$$\| x_1(\cdot) - \Lambda x_1(\cdot) \|_C > K_r - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \varphi_r\left(t + \frac{r+1}{2}\pi\right) dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t) \hat{x}(t)\, dt. \qquad (3)$$

В силу инвариантности нормы относительно сдвига и центральной симметрии класса W^r_∞ можно считать, что

$$\| x_1(\cdot) - \Lambda x_1(\cdot) \|_C = x_1(0) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\tau) x_1(\tau)\, d\tau. \qquad (4)$$

Рассмотрим функцию $x_2(t) := (1/2)(x_1(t) + x_1(-t)) - x_1(0)$. Тогда из (4) следует, что

$$\| x_1(\cdot) - \Lambda x_1(\cdot) \|_C = -(2/\pi) \int_0^\pi u(t)\, x_2(t)\, dt. \qquad (5)$$

Поскольку функция $x_2(\cdot) \in \overset{0}{W}{}^r_\infty$, то сравнивая (3) и (5) получаем, что $\hat{x}(\cdot)$ не является решением задачи (2) с $v(t) = u(t)$ в противоречие с утверждением леммы. Этим доказано соотношение (1).

Доказательство леммы. Предположим сначала, что $v(t) > 0$ п.в. на $[0, \pi]$. Определим рекуррентным образом последовательность функций $\{p_k(\cdot)\}_{k\geqslant 0}$ на $[0, \pi]$: $p_1(t) :=$

$$: = (2\,(-1)^r/\pi)\int_t^{\pi} v\,(\tau)\,d\tau,$$

$$p_k\,(t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^t p_{k-1}(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^t p_{k-1}(\tau)\,d\tau\right)dt \\ (k = 2j, \quad j = 1, 2, \ldots), \\ \displaystyle\int_0^t p_{k-1}(\tau)\,d\tau \quad (k = 2j+1, \quad j = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\dot p_1\,(t) = (2\,(-1)^{r+1}/\pi)\,v\,(t), \quad \dot p_k\,(t) = p_{k-1}(t) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{6}$$

$$p_1\,(\pi) = 0, \quad p_{2j+1}\,(0) = p_{2j+1}\,(\pi) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Покажем, что если $t \in (0, \pi)$, то $p_{2j+1}\,(t) \neq 0$ и

$$\operatorname{sign} p_{2j+1}\,(t) = (-1)^{r+j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Доказываем индукцией по j. При $j = 0$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $j = m > 0$. Допустим, что функция $p_{2(m+1)+1}\,(\cdot) = p_{2m+3}\,(\cdot)$ имеет нуль на $(0, \pi)$. Поскольку $p_{2m+3}\,(0) = p_{2m+3}\,(\pi) = 0$ (см. (7)), то, согласно теореме Ролля, функция $p_{2m+2}\,(\cdot) = \dot p_{2m+3}\,(\cdot)$ имеет два различных нуля на $(0, \pi)$ и поэтому $p_{2m+1}\,(\cdot) = \dot p_{2m+2}\,(\cdot)$ имеет нуль на $(0, \pi)$, что противоречит индуктивному предположению.

Проверим соотношение (8). Пусть для определенности $(r + m)$ четно, т. е. $p_{2m+1}\,(t) > 0$, $t \in (0, \pi)$. Следовательно, функция $p_{2m+2}\,(\cdot)$ строго монотонно возрастает на $[0, \pi]$. Кроме того, она имеет нуль на $(0, \pi)$, ибо в противном случае функция $p_{2m+3}\,(\cdot)$ была бы монотонна, что невозможно из-за (7). Таким образом, $\dot p_{2m+3}\,(0) = p_{2m+2}\,(0) < 0$, и так как $p_{2m+3}\,(\cdot)$ не имеет нулей на $(0, \pi)$, то $p_{2m+3}\,(t) < 0$, т. е. $\operatorname{sign} p_{2m+3}\,(t) = (-1)^{r+m+1}$, $t \in (0, \pi)$. Соотношение (8) доказано.

Положим

$$p\,(t) := \begin{cases} p_r\,(t), & r \text{ — нечетно}, \\ \displaystyle\int_0^t p_{r-1}(\tau)\,d\tau - \int_0^{\pi/2} p_{r-1}(\tau)\,d\tau, & r \text{ — четно}. \end{cases}$$

Отсюда и из доказанного легко следует, что $\operatorname{sign} p\,(t) = (-1)^{(r+1)/2}$, $t \in (0, \pi)$, если r нечетно и

$$\operatorname{sign} p\,(t) = \begin{cases} (-1)^{r/2}, & 0 < t < \pi/2, \\ (-1)^{(r+2)/2}, & \pi/2 < t < \pi, \end{cases}$$

если r четно. Это означает, что $\operatorname{sign} p\,(t) = \operatorname{sign}\sin\,(t + ((r+1)/2)\,\pi)$.

Оценим теперь величину верхней грани в задаче (2). Пусть $x\,(\cdot) \in \overset{0}{W}{}^r_\infty$, тогда вследствие четности и периодичности $x\,(\cdot)$ необходимо $x^{(2j-1)}\,(0) = x^{(2j-1)}\,(\pi) = 0$ $(j = 1, \ldots, [r/2])$. Учитывая это, а также (6) и (7), будем иметь после интегрирования по частям и применения неравенства Гёльдера

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^r\int_0^\pi x(t)\,\mathrm{d}\left(\frac{2}{\pi}(-1)^r\int_t^\pi v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)=$$

$$=(-1)^r\int_0^\pi x(t)\,\mathrm{d}p_1(t)=\ldots=\int_0^\pi x^{(r)}(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\pi|p(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Поскольку $\hat{x}^{(r)}(t)=\operatorname{sign}\sin(t+((r+1)/2)\pi)=\operatorname{sign}p(t)$, то на функции $\hat{x}(\cdot)$ полученное неравенство обращается в равенство и тем самым $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (2). Это доказывает лемму для случая, когда $v(t)>0$ п.в.

Пусть $v(t)\geqslant 0$ п.в. Рассмотрим последовательность $v_k(t):=$ $:=v(t)+1/k$, $k\in\mathbf{N}$. Так как $v_k(t)>0$ п.в., то по доказанному

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_k(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v_k(t)\,\hat{x}(t)\,\mathrm{d}t$$

для всех $x(\cdot)\in\overset{0}{W}{}^r_\infty$, $k\in\mathbf{N}$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k\to\infty$ (что возможно по теореме Лебега) получаем, что $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи и в общем случае. Этим доказана лемма, а с ней и теорема 1.

Отметим, что эта теорема фактически была доказана в работах С. М. Никольского [2] для полиномов Фейера и Надя [3] для средних Чезаро (причем схема доказательства близка к приводимой здесь). Справедливость теоремы 1 для произвольных положительных полиномов отмечена в работе В. А. Баскакова [4], а в его работе [5] величина $E_r(\Lambda)$ была подсчитана для некоторого класса полиномов, но в терминах, отличных от приведенных здесь.

Из теоремы 1 непосредственно извлекаются асимптотически точные результаты о приближении конкретными положительными операторами. Следует отметить при этом, что первые такие результаты были получены в работе С. М. Никольского [6] о приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера и продолжены им в работах [2, 7].

Здесь мы приведем лишь два следствия теоремы 1. Первое из них касается полиномов П. П. Коровкина, которые являются асимптотически наилучшими среди всех положительных полиномов (следствие 2).

Оператор П. П. Коровкина T_n соответствует функции $u_n(t):=$ $:=1/2+\rho_1^{(n)}\cos t+\ldots+\rho_n^{(n)}\cos nt$, где

$$\rho_k^{(n)}:=\left(\sum_{j=1}^{n+1}\sin^2\frac{j\pi}{n+2}\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n-k+1}\sin\frac{j\pi}{n+2}\sin\frac{(k+j)\pi}{n+2}\right),$$

$k=1,\ldots,n.$

Следствие 1. *Если* $r\geqslant 2$, *то*

$$E_r(T_n)=(\pi^2K_{r-2}/2n^2)+o(1/n^2).$$

Доказательство. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\rho_k^{(n)} = 1 - (k^2\pi^2/2n^2) + o\,(1/n^2).$$

Подставляя $u_n(\cdot)$ в (1) с учетом последнего соотношения, имеем после несложных преобразований

$$E_r(T_n) = K_r - \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{j(r+1)}}{(2j+1)^{r+1}} +$$
$$+ \frac{\pi^2}{2n^2}\cdot\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{j(r-1)}}{(2j+1)^{r-1}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Сумма первых двух слагаемых справа есть $o\,(1/n^2)$, а сомножитель при $\pi^2/2n^2$ сходится к K_{r-2}.

Величина $E_r(T_n)$ при $r = 1$ подсчитана в работе И. Н. Петрова [8], при $r = 2$ — в работе П. П. Коровкина [9], а при $r \geqslant 3$ может быть получена из результатов работы В. А. Баскакова [5].

Обозначим через $\mathscr{L}_n$ — совокупность всех операторов Λ, соответствующих неотрицательным тригонометрическим полиномам степени $\leqslant n$.

Следствие 2. *Пусть* $r, n \in \mathbf{N}$. *Тогда*

$$E_r^n := \inf\{E_r(\Lambda) \mid \Lambda \in \mathscr{L}_n\} = K_r - \nu_n, \tag{9}$$

где ν_n *— наибольшее собственное число симметричной матрицы* $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n+1)$,

$$a_{ij} := \begin{cases} 0, & |i-j| = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, [n/2], \\ \dfrac{2(-1)^{k(r+1)}}{\pi(2k+1)^{r+1}}, & |i-j| = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{n-1}{2}\right]. \end{cases}$$

Кроме того, если $r \geqslant 2$, *то*

$$E_r^n = (\pi^2 K_{r-2}/2n^2) + o\,(1/n^2). \tag{10}$$

Отсюда и из следствия 1 вытекает, что полиномы П. П. Коровкина асимптотически экстремальны в задаче (9).

Доказательство. Нетрудно проверить, что в (9) достаточно ограничиться лишь операторами, которые соответствуют четным полиномам. Пусть $u(t) = 1/2 + \rho_1 \cos t + \ldots + \rho_n \cos nt$ и Λ соответствует $u(\cdot)$. По теореме Фейера — Рисса $u(t) = |\sum_{k=0}^{n} \xi_k e^{ikt}|^2$. Подставляя это в формулу (1), получаем после несложных преобразований, что

$$E_r(\Lambda) = K_r - (A\xi, \xi), \tag{11}$$

где $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $|\xi| = 1$, A — матрица из следствия 2 и $(\cdot, \cdot)$ — символ скалярного произведения. Переход к нижней грани в (11) по всем Λ равносилен максимизации квадратичной формы $(A\xi, \xi)$ на единичной сфере. Отсюда следует (9).

Поскольку $(A\xi, \xi)$ — теплицева форма (см. [10, с. 86]), то согласно теореме из [10, с. 97] $\lim_{n\to\infty} (\nu_n/\varphi_r(\pi/n)) = 1$ при $r \geqslant 2$. Но, очевидно, $\varphi_r(\pi/n) = K_r - (\pi^2 K_{r-2})/2n^2 + o(1/n^2)$ и тем самым (10) доказано.

Это утверждение может быть также получено из результатов [11, 12]. При $r = 2$ экстремальность полиномов П. П. Коровкина установлена в [9].

3. В этом разделе будет рассматриваться задача о наилучшей аппроксимации класса W_∞^r положительными операторами в ситуации, когда элементы W_∞^r известны приближенно.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Обозначим через $\mathscr{M}_p$ совокупность всех положительных операторов Λ, соответствующих функциям $u(\cdot) \in L_{p'}(\mathbf{T})$, для которых $u(t) \geqslant 0$ п. в. и $\| u(\cdot)\|_1 = 1$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $\varepsilon \geqslant 0$. *Тогда*

$$\inf_{\Lambda\in\mathscr{M}_p} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_\infty^r \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_p\leqslant\varepsilon}} \|x(\cdot) - \Lambda y(\cdot)\|_C =: \alpha, \tag{12}$$

где $\alpha := \alpha(\varepsilon, p, r)$ — *единственный корень уравнения*

$$\|(\varphi_r(\cdot + ((r+1)/2)\pi) - K_r + \alpha)_+\|_p = \varepsilon \quad (a_+ := \max(a, 0)). \tag{13}$$

При этом

$$\alpha := \begin{cases} \left(\dfrac{K_{m-2}}{2}\right)^{\frac{1}{sp+1}} \left(\dfrac{1}{\pi} B\left(\dfrac{1}{s}, p+1\right)\right)^{-\frac{s}{sp+1}} \varepsilon^{\frac{sp}{s+1}} (1 + o(1)), \\ 1 \leqslant p < \infty, \\ \varepsilon, \quad p = \infty, \end{cases} \tag{14}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $m := \max(r, 2)$, $s := \min(r, 2)$, $B(\cdot, \cdot)$ — *бэта-функция Эйлера.*

Если $r = 1, 2$, *то* $o(1) = 0$ *и соотношение* (14) *справедливо для* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant K_r$.

Наконец, если $p < \infty$, $\varepsilon > 0$, *то нижняя грань в* (12) *достигается на операторе, соответствующем функции*

$$\hat{u}(t) := \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_r(\tau + ((r+1)/2)\pi) - K_r + \alpha)_+^{p-1} \, d\tau\right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot (\varphi_r(t + ((r+1)/2)\pi) - K_r + \alpha)_+^{p-1}.$$

Доказательство. Обозначим через $E_r(\Lambda; \varepsilon)$ величину под знаком нижней грани в (12) и покажем, что

$$E_r(\Lambda; \varepsilon) = E_r(\Lambda) + \varepsilon \|\Lambda\|, \tag{15}$$

где $\|\Lambda\|$ — норма оператора Λ: $L_p(\mathbf{T}) \to C(\mathbf{T})$.

Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_\infty^r$ и $z(\cdot) \in L_p(\mathbf{T})$ такое, что $\|z(\cdot)\|_p \leqslant \varepsilon$. Положим $y(\cdot) = x(\cdot) - z(\cdot)$. Тогда, если Λ соответствует $u(\cdot)$, то

$$x(0)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(-\tau)x(\tau)\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(-\tau)z(\tau)\,d\tau=$$
$$=x(0)-\Lambda y(0)\leqslant\|x(\cdot)-\Lambda y(\cdot)\|_C\leqslant E_r(\Lambda;\varepsilon).$$

Переходя к верхней грани по всем указанным $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$, получаем, что левая часть в (15) не меньше правой. Обратно, пусть $x(\cdot)\in W_\infty^r$ и $y(\cdot)\in L_p(\mathbf{T})$ такие, что $\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_p\leqslant\varepsilon$. Положим $z(\cdot)=x(\cdot)-y(\cdot)$. Тогда $\|x(\cdot)-\Lambda y(\cdot)\|_C\leqslant\|x(\cdot)-\Lambda x(\cdot)\|_C+\|\Lambda z(\cdot)\|_C\leqslant E_r(\Lambda)+\varepsilon\|\Lambda\|$ и равенство (15) доказано.

Пусть Λ соответствует $u(\cdot)$ (можно, как и при доказательстве теоремы 1 считать, что $u(\cdot)$ четно). Тогда в силу теоремы 1, равенства (15) и того факта, что $\|\Lambda\|=\|u(\cdot)\|_{p'}$ нахождение нижней грани в (12) равносильно решению следующей экстремальной задачи

$$f(u(\cdot)):=K_r-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\varphi_r\Big(t+\frac{r+1}{2}\pi\Big)dt+$$
$$+\varepsilon\|u(\cdot)\|_{p'}\to\inf,\qquad(16)$$

$$u(\cdot)\in L_{p'}(\mathbf{T}),\quad u(t)\geqslant0\ \text{п. в.},\quad(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\,dt=1.\qquad(17)$$

Пусть сначала $1\leqslant p<\infty$. Покажем, что функция $\hat{u}(\cdot)$ — решение задачи (16)—(17) и $f(\hat{u}(\cdot))=\alpha$. Предварительно заметим, что для любого $u(\cdot)\in L_{p'}(\mathbf{T})$ справедливо неравенство

$$\varepsilon\|u(\cdot)\|_{p'}\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\varphi_r\Big(t+\frac{r+1}{2}\pi\Big)-K_r+\alpha\Big)_+u(t)\,dt,\qquad(18)$$

которое на функции $\hat{u}(\cdot)$ обращается в равенство. Действительно, пусть $p>1$, тогда по неравенству Гёльдера

$$\varepsilon\|u(\cdot)\|_{p'}\geqslant\varepsilon\|\hat{u}(\cdot)\|_{p'}^{1-p'}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{u}(t)|^{p'-1}u(t)\,dt,\qquad(19)$$

причем при $u(\cdot)=\hat{u}(\cdot)$ это неравенство становится равенством. Подставляя в (19) выражение для $\hat{u}(\cdot)$ и учитывая, что $\|(\varphi_r(\cdot+((r+1)/2)\pi)-K_r+\alpha)_+\|_p=\varepsilon$, получим соотношение (18). При $p=1$ рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $u(\cdot)$ удовлетворяет условиям (17). Тогда, учитывая (18), нетрудно видеть, что

$$f(u(\cdot))\geqslant\alpha-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\varphi_r\Big(t+\frac{r+1}{2}\pi\Big)-K_r+\alpha\Big)_-u(t)\,dt,$$

где $a_-:=\min(a,0)$. Поскольку $u(t)\geqslant0$ п. в., то $f(u(\cdot))\geqslant\alpha$, и так как неравенство (18) на $\hat{u}(\cdot)$ обращается в равенство, то $f(\hat{u}(\cdot))=\alpha$.

Пусть $p=\infty$. Ясно, что в этом случае $\alpha=\varepsilon$. Если $u(\cdot)$ удовлетворяет (17), то из того, что $\varphi_r(t+((r+1)/2)\pi)\leqslant K_r$ для всех

$t \in [-\pi, \pi]$ сразу следует, что $f(u(\cdot)) \geqslant \alpha$. Рассматривая теперь δ-образную последовательность функций $u_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, удовлетворяющих условиям (17), убеждаемся, что $f(u_k(\cdot)) \to \alpha$ при $k \to \infty$, т. е. α — нижняя грань в (16).

Итак, доказано равенство (12) и экстремальность функции $\hat{u}(\cdot)$ при $1 \leqslant p < \infty$.

Докажем теперь асимптотическую оценку (14). Если $p = \infty$, то равенство $\alpha = \varepsilon$ очевидно. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $r > 2$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha \leqslant K_r$. Тогда вследствие четности $\varphi_r(\cdot + ((r+1)/2)\pi)$ соотношение (13) равносильно следующему:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{t(\alpha)} \left(\varphi_r\left(t + \frac{r+1}{2}\pi\right) - K_r + \alpha\right)^p dt = \varepsilon^p, \tag{20}$$

где $t(\alpha)$ — единственный положительный корень уравнения $\varphi_r(t + ((r+1)/2)\pi) - K_r + \alpha = 0$ (функция $\varphi_r(\cdot + ((r+1)/2)\pi)$ строго монотонна на $[0, \pi]$). На отрезке $[0, \pi/2]$ функция $\varphi_r(\cdot + ((r+1)/2)\pi)$ есть полином вида

$$\varphi_r(t + ((r+1)/2)\pi) = K_r - (K_{r-2}/2)\,t^2 + t^3 q(t),$$

где $q(\cdot)$ — ненулевой полином ($r > 2$). Таким образом, корень $t(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha - (K_{r-2}/2)\,t^2 + t^3 q(t) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\alpha, \gamma) := \alpha - (K_{r-2}/2)\,\gamma + |\gamma|^{3/2} q(\sqrt{\gamma})$$

в окрестности точки $(0, 0)$. По теореме о неявной функции $\gamma(\alpha) = 2\alpha/K_{r-2} + o(\alpha)$. Так как $\gamma(\alpha) > 0$ при достаточно малых $\alpha > 0$, то легко видеть, что

$$t(\alpha) = \sqrt{\gamma(\alpha)} = \sqrt{(2\alpha/K_{r-2})}\,(1 + o(1)).$$

Подставляя $t(\alpha)$ в (20) и делая замену переменных $t = \sqrt{(2\alpha/K_{r-2})}\,\tau$, будем иметь

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{K_{r-2}}}\,\alpha^{p+1/2}\int_0^{1+o(1)}\left(1 - \tau^2 + \left(\frac{2}{K_{r-2}}\right)^{3/2}\sqrt{\alpha}\,q\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{K_{r-2}}}\right)\right)^p d\tau = \varepsilon^p.$$

Учитывая непрерывность подынтегрального выражения по τ и α, после элементарных оценок получим, что

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{K_{r-2}}}\,\alpha^{p+1/2}\left(\int_0^1 (1-\tau^2)^p\,d\tau + o(1)\right) = \varepsilon^p.$$

Отсюда (поскольку интеграл равен $B(1/2, p+1)/2$) уже легко следует формула (14) для $r > 2$.

Если $r = 1, 2$, то непосредственным подсчетом устанавливается формула (14) для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant K_r$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарен С. Б. Стечкину и В. А. Баскакову за полезные обсуждения.

Центральный научно-исследовательский
институт комплексной автоматизации

Поступило
14.12.87
Переработанный вариант
06.02.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

[2] Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. МИАН. Т. 15. М.: Наука, 1945.

[3] Sz. Nagy B. Approximation der Funktionen durch die arith metischen Mittel ihrer Fourierschchen Reihen // Acta Sci. Math. Szeged. 1946. V. 11. P. 71—84.

[4] Баскаков В. А. О порядке приближения дифференцируемых функций линейными положительными операторами // Теория приближения функций. Труды Международной конференции по теории приближений функций. Калуга, 24—28 июля 1975 г. М.: Наука, 1977.

[5] Баскаков В. А. О порядке приближения дифференцируемых функций некоторыми линейными положительными операторами // Мат. сб. 1968. Т. 76, № 3. С. 344—361.

[6] Никольский С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4. С. 501—508.

[7] Никольский С. М. Оценка остатка сумм Фейера для периодических функций, имеющих определенную производную // ДАН СССР. 1941. Т. 31, № 3. С. 210—214.

[8] Петров И. М. Порядок приближения функций класса Z некоторыми полиномиальными операторами // УМН. 1958. Т. 13, вып. 6. С. 127—131.

[9] Коровкин П. П. Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса Z_2 линейными положительными полиномиальными операторами // УМН. 1958. Т. 13, вып. 6. С. 99—103.

[10] Гренандер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.

[11] Давидчик А. Н. Экстремальные задачи приближения периодических функций линейными операторами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1983.

[12] Левин В. А. Приближение дифференцируемых функций положительными методами суммирования рядов Фурье // Математические заметки. 1983. Т. 34, вып. 4. С. 515—519.