В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, Е. А. Пузанкова, Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на прямоугольнике, *Дифферен. уравнения*, 2000, том 36, номер 12, 1695–1698

2000. Т. 36, № 12. С. 1695 — 1698

УДК 517.956.227

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

В. А. Садовничий, В. В. Дубровский, Е. А. Пузанкова

Настоящая работа посвящена обратной задаче для операторов с частными производными. Среди работ, посвященных обратным задачам для операторов с дискретным спектром, можно указать работу [1]. Обратная задача для оператора Лапласа с непрерывным потенциалом рассмотрена в работе [2]. Наша задача — восстановление потенциала в псевдодифференциальном уравнении с частными производными с помощью интерполяционной теоремы Карлесона и принципа Банаха сжимающих отображений. Аналогичный метод использован в работе [3].

Пусть $\Pi = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ — прямоугольник, где $a > 0,\ b > 0$; $\Pi_4 = \{0 \le x \le a/2,\ 0 \le y \le b/2\}$ — в четыре раза меньший прямоугольник. Рассмотрим в $L_2(\Pi)$ краевую задачу M

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad u|_{\partial\Pi} = 0,$$

где $\partial\Pi$ — граница прямоугольника Π. Введем оператор $T = \int \lambda^\beta\, dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора задачи M, $\beta > 0$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Далее, пусть $v_{m,n} = 2^{-1}(ab)^{-1/2}\sin(\pi a^{-1}mx)\sin(\pi b^{-1}ny)$ — собственные ортонормированные в $L_2(\Pi)$ функции оператора T, отвечающие собственным значениям $\lambda_{m,n} = (\pi^2a^{-2}m^2 + \pi^2b^{-2}n^2)^\beta$, $m, n = \overline{1,\infty}$, $\sigma(T) = \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda_{m,n}$ — спектр оператора T. Собственные числа оператора T будем нумеровать в порядке возрастания их величин с учетом кратности с помощью одного натурального индекса t: $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_t \le \lambda_{t+1} \le \ldots$ Обозначим через d_n расстояние от собственного числа λ_n до остальной части спектра $\sigma(T)$. По лемме 1 из работы [4] существует такая подпоследовательность натуральных чисел $\{n_t\}_{t=1}^{\infty}$, что $d_{n_t} \ge C_1 n_t^{\beta-1}$, где $C_1 > 0$ и не зависит от индекса t. Кроме того, пусть P — оператор умножения на, вообще говоря, комплексную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию $p(x,y)$, $(x,y) \in \Pi$; μ_t — собственные значения оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Будем предполагать дополнительно, что функция $p(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(a-x,y) = p(x,y) = p(x,b-y) \quad \text{для почти всех} \quad (x,y) \in \Pi, \tag{1}$$

$$\iint\limits_{\Pi} p(x,y)\cos(2\pi a^{-1}nx)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Pi} p(x,y)\cos(2\pi b^{-1}ny)\,dx\,dy = 0, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{2}$$

Будем предполагать, что a^2b^{-2} — иррациональное число. В этом случае спектр оператора T однократный. Воспользуемся также известной асимптотикой для собственных значений оператора T: $\lambda_t = C_2t^\beta + C_3t^{\beta-1/2} + o(t^{\beta-1/2})$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$.

Лемма 1. *Если* $|t - n| \ge C_4n^{1/2}$, *где* $C_4 > 0$, *то* $|\lambda_t - \lambda_n| \ge \mathrm{const}\cdot\max\{t^{\beta-1/2}, n^{\beta-1/2}\}$, $\mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Пусть $t_- = n - [C_4n^{1/2}]$, тогда

$$\lambda_{t_-} = C_2n^\beta(1 - [C_4n^{1/2}]n^{-1})^\beta + C_3n^{\beta-1/2}(1 - [C_4n^{1/2}]n^{-1})^{\beta-1/2} + o(n^{\beta-1/2}) =$$

$$= C_2n^\beta - \beta C_2C_4n^{\beta-1/2} + o(n^{\beta-1/2}) + C_3n^{\beta-1/2} - (\beta - 1/2)C_3C_4n^{\beta-3/2} + o(n^{\beta-3/2}) + o(n^{\beta-1/2}) =$$

$$= C_2 n^{\beta} + C_3 n^{\beta-1/2} - \beta C_2 C_4 n^{\beta-1/2} - (\beta - 1/2) C_3 C_4 n^{\beta-3/2} + o(n^{\beta-1/2}).$$

Отсюда следует, что существует $\mathrm{const} > 0$ такая, что $\lambda_n - \lambda_{t_-} \geq \mathrm{const} \cdot n^{\beta-1/2}$. Но тогда и при всех $t \leq t_-$ будет выполняться требуемое неравенство. В случае $t \geq n + C_4 n^{1/2}$ имеем $n \leq t - \mathrm{const} \cdot t^{1/2}$, $\mathrm{const} > 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $0 < \delta < 1$; $(1-\delta)(\beta - 1/2) > 1$, *то на вертикальных прямых* $\Gamma_{n_t} = \{\lambda | \lambda = 2^{-1}(\lambda_{n_t} + \lambda_{n_t+1}) + i\rho\}$ *выполняется неравенство* $\|(T - \lambda E)^{-1}\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-1} \leq (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1})^{-\delta} o(n_t^{1/2-(1-\delta)(\beta-1)}) + (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1/2})^{-\delta} O(n_t^{1-(1-\delta)(\beta-1/2)})$, $C_5 > 0$.

Доказательство. Разобьем рассматриваемый ряд на три слагаемых: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-1} = \sum\limits_{n=1}^{k_1} |\lambda - \lambda_n|^{-1} + \sum\limits_{n=k_1+1}^{k_2} |\lambda - \lambda_n|^{-1} + \sum\limits_{n=k_2+1}^{\infty} |\lambda - \lambda_n|^{-1} \equiv I_1 + I_2 + I_3$, где $k_1 = n_t - [C_4 n_t^{1/2}]$, $k_2 = n_t + [C_4 n_t^{1/2}]$, $C_4 > 0$ и произвольно мало.

Для оценки I_1 воспользуемся неравенством $\sqrt{a^2 + b^2} \geq C a^{\delta} b^{1-\delta}$, $0 < \delta < 1$, $C > 0$. Если $\lambda \in \Gamma_{n_t}$, то $|\lambda - \lambda_n| \geq C_6 |\lambda_{n_t+1} - \lambda_n|^{(1-\delta)} (|\rho| + |\lambda_{n_t} - \lambda_n|)^{\delta}$, $C_6 > 0$. По лемме 1 для слагаемых из суммы I_1 имеем $|\lambda - \lambda_n|^{-1} \leq \mathrm{const} \cdot n_t^{-(1-\delta)(\beta-1/2)} (|\rho| + n_t^{\beta-1/2})^{-\delta}$, $\mathrm{const} > 0$.

Учитывая, что число слагаемых в I_1 меньше n_t, получаем

$$I_1 \leq \mathrm{const} \cdot n_t^{1-(1-\delta)(\beta-1/2)} (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1/2})^{-\delta} = O(n_t^{1-(1-\delta)(\beta-1/2)}) (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1/2})^{-\delta}.$$

Оценим I_2. В силу леммы 1 из работы [4] для слагаемых из I_2 имеем $|\lambda - \lambda_n|^{-1} \leq \mathrm{const} \cdot n_t^{-(1-\delta)(\beta-1/2)} (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1})^{-\delta}$, $\mathrm{const} > 0$.

Учитывая, что число слагаемых в I_2 не превосходит $2C_2 n_t^{1/2}$, а также то, что C_4 произвольно мало, получаем

$$I_2 \leq \mathrm{const} \cdot 2C_4 n_t^{1/2-(1-\delta)(\beta-1/2)} (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1})^{-\delta} = o(n_t^{1/2-(1-\delta)(\beta-1/2)}) (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1})^{-\delta}.$$

Сумма I_3 оценивается аналогично I_1 с учетом соотношения $(1-\delta)(\beta - 1/2) > 1$. Лемма 2 доказана.

На вертикальных прямых Γ_{n_t} известна оценка равномерной нормы резольвенты оператора T: $\|(T - \lambda E)^{-1}\| \leq (|\rho| + C_1 n_t^{\beta-1})^{-1}$.

Пусть $\{\lambda_{n_k}\}$ — интерполяционная последовательность в смысле Карлесона (см. [5, с. 277]) спектра $\sigma(T)$ оператора T в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, т.е. существует такое число $\delta = \delta\{\lambda_{n_k}\} > 0$, что $\prod\limits_{j=1, j\neq k}^{\infty} |(\lambda_{n_k} - \lambda_{n_j})/(\lambda_{n_k} + \lambda_{n_j})| \geq \delta$ для любого $k = \overline{1, \infty}$. Тогда по теореме Карлесона (см. [5, с. 289]) существуют такие аналитические, ограниченные в совокупности в правой полуплоскости функции, что $f_{n_k}(\lambda_{n_j}) = \delta_{jk}$, $\|f_{n_k}\|_{\infty} = \sup\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda > 0} |f_{n_k}(\lambda)| \leq 2\delta^{-5}(1 - 2\ln\delta)$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Замечание. Можно рассматривать конечные интерполяционные последовательности в полосе между вертикальными прямыми $\Gamma_{n_{t-1}}$ и Γ_{n_t}. Тогда $n_k \in \{n_{t-1} + 1, n_{t-1} + 2, \ldots, n_t\}$.

Положим $\varphi_{n_k} = \int\limits_0^{\lambda} f_{n_k}(\lambda)\, d\lambda$. Рассмотрим спектральное равенство при $n_k \in \{n_{t-1} + 1, n_{t-1} + 2, \ldots, n_t\}$:

$$\sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\mu_j) = \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j) + (P v_{n_k}, v_{n_k}) + $$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Sp} \int_{\Gamma_{n_t}} \varphi_{n_k}(\lambda)(T + P - \lambda E)^{-1} (P(T - \lambda E)^{-1})^2 \, d\lambda =$$

$$= \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j) + (P v_{n_k}, v_{n_k}) + \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Sp} \int_{\Gamma_{n_t}} \varphi_{n_k}(\lambda)(T - \lambda E)^{-1} (P(T - \lambda E)^{-1})^2 \, d\lambda + \ldots =$$

$$= \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j) + (P v_{n_k}, v_{n_k}) - \frac{1}{6\pi i} \mathrm{Sp} \int_{\Gamma_{n_t}} f_{n_k}(\lambda) (P(T - \lambda E)^{-1})^2 \, d\lambda + \ldots \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j) + (Pv_{n_k}, v_{n_k}) + \alpha_{n_k}(p).$$

При выводе равенства использовали тождество [3]

$$\mathrm{Sp}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(T-\lambda E)^{-1}(P(T-\lambda E)^{-1})^n\, d\lambda = -\mathrm{Sp}\frac{1}{2\pi i(n+1)}\int_\Gamma f'(\lambda)(P(T-\lambda E)^{-1})^n\, d\lambda, \quad n=\overline{1,\infty},$$

получаемое интегрированием по частям формулы для резольвенты. Здесь f — аналитическая функция в правой полуплоскости, причем $|f(\lambda)| < \mathrm{const}\,|\lambda|$ при $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, Γ — замкнутый регулярный контур в правой полуплоскости, не содержащий точек спектра оператора T.

Оценим:

$$|\alpha_{n_k}(p) - \alpha_{n_k}(\widetilde{p})| \le 2\delta^{-5}(1-2\ln\delta)\frac{1}{6\pi}\int_{\Gamma_{n_k}} \|(T-\lambda E)^{-1}\|_1 \|(T-\lambda E)^{-1}\|\, \|p-\widetilde{p}\|_\infty(\|p\|_\infty + \|\widetilde{p}\|_\infty)\, d\rho \le$$

$$\le \frac{\delta^{-5}}{3}(1-2\ln\delta)\|p-\widetilde{p}\|_\infty(\|p\|_\infty+\|\widetilde{p}\|_\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}((|\rho| + C_7 n_t^{\beta-1})^{-1-\delta} o(n_t^{1/2-(1-\delta)(\beta-1)}) +$$

$$+ (|\rho| + C_7 n_t^{\beta-1/2})^{-\delta}(|\rho| + C_7 n_t^{\beta-1})^{-1} O(n_t^{1-(1-\delta)(\beta-1/2)}))\, d\rho =$$

$$= \delta^{-5}(1-2\ln\delta)\|p-\widetilde{p}\|_\infty(\|p\|_\infty+\|\widetilde{p}\|_\infty)(o(n_t^{1/2-(\beta-1)}) + O(n_t^{2-\beta-1/(2\delta+2)})),$$

где $C_7 = \max(C_1, C_5)$.

Возьмем такую подпоследовательность $\{t_q\}$ натуральных чисел, что $I = \sum\limits_{q=1}^{\infty} |o(n_{t_q}^{1/2-(\beta-1)}) + O(n_{t_q}^{2-\beta-1/(2\delta+2)})| < \infty$, что возможно, если $\beta > 3/2$. Введем полную ортонормированную систему функций в $L_2(\Pi_4)$: $\psi_l = (ab)^{-1}\cos 2\pi a^{-1}mx \cos 2\pi b^{-1}ny$, $m,n=\overline{1,\infty}$, где $\lambda_l = (\pi^2 a^{-2}m^2 + \pi^2 b^{-2} n^2)^\beta$. Обозначим $\alpha_0(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=n_{t_q-1}+1}^{n_{t_q}} (\varphi_{n_k}(\mu_j) - \varphi_{n_k}(\lambda_j))\right)\psi_{n_k}$, где $n_k \in \{n_{t_q-1}+1,\ldots,n_{t_q}\}$; $\alpha(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_{n_k}(p)\psi_{n_k}$. Тогда

$$\|\alpha(p) - \alpha(\widetilde{p})\|_\infty \le \mathrm{const}\cdot\delta^{-5}(1-2\ln\delta)\|p-\widetilde{p}\|_\infty(\|p\|_\infty + \|\widetilde{p}\|_\infty) I = \gamma\|p-\widetilde{p}\|_\infty.$$

Заметим, что $0<\gamma<1$ при малых $\|p\|_\infty$ и $\|\widetilde{p}\|_\infty$ в зависимости от δ. Но $\alpha(0)=0$, поэтому существует в $L_\infty(\Pi_4)$ замкнутый шар $U(0,\varepsilon)$ радиуса $\varepsilon > 0$ (ε зависит от δ), который $\alpha(\cdot)$ отображает в себя и является на этом шаре сжимающим отображением. Следовательно, операторное уравнение $\alpha_0 - \alpha(p) = p$, где $\alpha_0(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=n_{t_q-1}+1}^{n_{t_q}}(\varphi_{n_k}(\xi_j) - \varphi_{n_k}(\lambda_j))\right)\psi_{n_k}$, имеет единственное решение p при $\alpha_0 \in U(0,\varepsilon)$. При этом p удовлетворяет соотношениям (1) и (2).

Итак, доказана

Теорема 1. *Если a^2b^{-2} — иррациональное число и $\{\lambda_{n_k}\}$ — интерполяционная последовательность, а $\beta > 3/2$, то существует $\varepsilon > 0$, зависящее от $\delta = \delta\{\lambda_{n_k}\} > 0$, такое, что в замкнутом шаре $U(0,\varepsilon) \subset L_\infty(\Pi)$ существует один и только один потенциал p, удовлетворяющий условиям (1) и (2), и при условии, что $\alpha_0 \in U(0,\varepsilon)$, $\sum\limits_{j=n_{t_q-1}+1}^{n_{t_q}}\varphi_{n_k}(\mu_j) = \sum\limits_{j=n_{t_q-1}+1}^{n_{t_q}}\varphi_{n_k}(\xi_j)$, $k=\overline{1,\infty}$, $n_k \in \{n_{t_q-1}+1,\ldots,n_{t_q}\}$, и $\iint\limits_{\Pi_4} p(x,y)\psi_n(x,y)\,dx\,dy = 0$ при $n \ne n_k$, $k = \overline{1,\infty}$.*

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Если a^2b^{-2} — иррациональное число, $p = \sum\limits_{q=1}^{N} A_q\psi_q$, $\widetilde{p} = \sum\limits_{q=1}^{N}\widetilde{A}_q\psi_q$, $1 \le N < \infty$, и $\|p\|_\infty$ и $\|\widetilde{p}\|_\infty$ малы по сравнению с $\delta^{-5}(1-2\ln\delta)$, где $\delta = \delta\{\lambda_q\}_{q=1}^{N} > 0$, $\beta > 0$, то из* *равенств* $\mu_j(p) = \mu_j(\widetilde{p})$, $j = \overline{1, N}$, *вытекает, что в* Π *всюду* $p = \widetilde{p}$, *т. е.* $A_q = \widetilde{A}_q$, $q = \overline{1, N}$, *где* $\mu_j(p)$ *и* $\mu_j(\widetilde{p})$ — *собственные числа операторов* $T + P$ *и* $T + \widetilde{P}$ *соответственно, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.*

Авторы выражают благодарность М. В. Бушмановой за внимание к работе.

Литература

1. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1206 — 1211.
2. *Дубровский В. В., Нагорный А. В.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1563 — 1567.
3. *Дубровский В. В.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 12. С. 1702 — 1703.
4. *Дубровский В. В., Печенцов А. С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 5. С. 852 — 858.
5. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Магнитогорский государственный педагогический институт,
Магнитогорский государственный технический университет

Поступила в редакцию
8 апреля 1999 г.