



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина, О теореме Чудакова в простых числах специального вида,

Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 4, 75–84

<https://www.mathnet.ru/cheb110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

20 апреля 2025 г., 21:59:52



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

О ТЕОРЕМЕ ЧУДАКОВА В ПРОСТЫХ
ЧИСЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина (г. Белгород)

Посвящается 60-летию В.Н. Чубарикова

В 1742 г. в письме к Л. Эйлеру Х. Гольдбах высказал гипотезу, что каждое нечетное число, большее семи, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. В ответном письме Л. Эйлер предположил, что четное число, большее двух, может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. Эти задачи получили названия соответственно *тернарная* и *бинарная проблемы Гольдбаха*.

В 1937 г. И.М. Виноградов полностью решил тернарную проблему Гольдбаха. Утверждение бинарной проблемы Гольдбаха остается до сих пор недоказанным. В 1938 г. Н.Г. Чудаков [1] доказал следующую теорему, решив тем самым бинарную проблему Гольдбаха «в среднем».

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K(X)$ равно числу тех четных чисел между b и X , которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых. Тогда

$$K(X) \leq C_D \frac{X}{\log^D X}, \quad 6 \leq X < \infty,$$

где D — произвольное фиксированное положительное число, C_D — положительная константа, зависящая только от D .

В настоящей работе изучается вопрос о числе решений бинарной проблемы Гольдбаха в простых числах специального вида. Пусть η — произвольное иррациональное алгебраическое число степени n , a и b — произвольные фиксированные действительные числа из отрезка $[0, 1]$. Покажем, что теорема 1 верна и с простыми числами вида:

$$a < \{\eta p_i\} < b, \quad i = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K(X)$ — число тех четных чисел между b и X , которые не могут быть представлены как сумма двух нечетных простых специального вида $a < \{\eta p_i\} < b, i = 1, 2, b - a > 1/2$. Тогда при любом фиксированном $D > 0$

$$K(X) = O(X \log^{-D} X).$$

Данная работа является продолжением исследования авторов ([2], [3]) решения аддитивных задач с простыми числами специального вида. В отличие от ([2], [3]) в настоящей работе η — произвольное иррациональное алгебраическое число.

Доказательство теоремы 2.

1. Пусть $v_j = 2j$, где $j = 1, 2, \dots, N$, $X/2 < v_j \leq X$. Определим множество

$$\mathcal{K} = \{v_j \mid v_j \neq p_1 + p_2, a < \{\eta p_i\} < b, i = 1, 2\}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 S_0^2(y)T(y)dy,$$

где

$$S_0(y) = \sum_{\substack{p \leq X \\ a < \{\eta p\} < b}} e^{2\pi i y p}, \quad T(y) = \sum_{\substack{j \leq N \\ v_j \in \mathcal{K}}} e^{-2\pi i y v_j}.$$

Введем функцию $\psi_0(x)$ — характеристическую функцию интервала (a, b) и продолжим ее с периодом 1 на всю числовую ось. Тогда

$$S_0(y) = \sum_{p \leq X} \psi_0(\eta p) e^{2\pi i y p}.$$

В лемме о «стаканчиках» И.М. Виноградова (см.[4], с. 22) выберем $r = [\log X]$, $\Delta = \log^{-1,5C} X$. При выборе $\alpha = a + \Delta/2$ и $\beta = b - \Delta/2$ функцию ψ из леммы о «стаканчиках» обозначим как ψ_1 , α и β — как α_1 и β_1 , соответственно. Положив $\alpha = a - \Delta/2$ и $\beta = b + \Delta/2$, соответствующую функцию ψ обозначим ψ_2 , α и β — как α_2 и β_2 , соответственно.

Определим

$$J_k = \int_0^1 \left(\sum_{p \leq X} \psi_k(\eta p) e^{2\pi i y p} \right)^2 T(y) dy, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Из свойств $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ следует, что $J_1 \leq I \leq J_2$. Для J_1 и J_2 выведем приближенные формулы, главные члены в которых одинаковы.

Разложив предварительно «сглаженную» функцию $\psi_k(x)$ в ряд Фурье, перейдем к рассмотрению сумм

$$\sum_{|m_1| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_1) \sum_{|m_2| \leq r\Delta^{-1}} c_k(m_2) \int_0^1 S(y + m_1\eta) S(y + m_2\eta) T(y) dy + \\ + O(X^{3/2 - \log \pi} N^{1/2}),$$

где

$$S(y) = \sum_{p \leq X} e^{2\pi i y p}.$$

2. При $m_1 = m_2 = m$ рассмотрим

$$I_1 = \sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j \leq N \\ v_j \in \mathcal{K}}} e^{2\pi i m \eta v_j} \sum_{p_1 \leq X} \sum_{p_2 \leq X} \int_0^1 e^{2\pi i y(p_1 + p_2 - v_j)} dy.$$

Получим

$$I_1 = \sum_{|m| \leq r\Delta^{-1}} c_k^2(m) \sum_{\substack{j \leq N \\ v_j \in \mathcal{K}}} e^{2\pi i m \eta v_j} I_{2,1}(X, j),$$

где $I_{2,1}(X, j)$ — число решений уравнения $p_1 + p_2 = v_j$ в простых числах p_1, p_2 .

Поскольку при $m \neq 0$ ([5], с. 16)

$$c_k(m) = i \frac{e^{-2\pi i m \beta_k} - e^{-2\pi i m \alpha_k}}{2\pi m} \left(\frac{e^{\pi i m \Delta / r} - e^{-\pi i m \Delta / r}}{2\pi i m \Delta / r} \right)^r,$$

то для $0 < |m| < \Delta^{-1/2}$

$$c_k^2(m) = e^{-2\pi i m(a+b)} \frac{\sin^2 \pi m(b-a)}{\pi^2 m^2} (1 + O(\Delta^{1/2})).$$

Тогда

$$I_1 = \sum_{\substack{j \leq N \\ v_j \in \mathcal{K}}} I_{2,1}(X, j) (\sigma(v_j, a, b) + O(\Delta^{1/2})),$$

где

$$\sigma(v_j, a, b) = \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta v_j - (a+b))} \frac{\sin^2 \pi m(b-a)}{\pi^2 m^2}.$$

Известно [5, с. 224], что

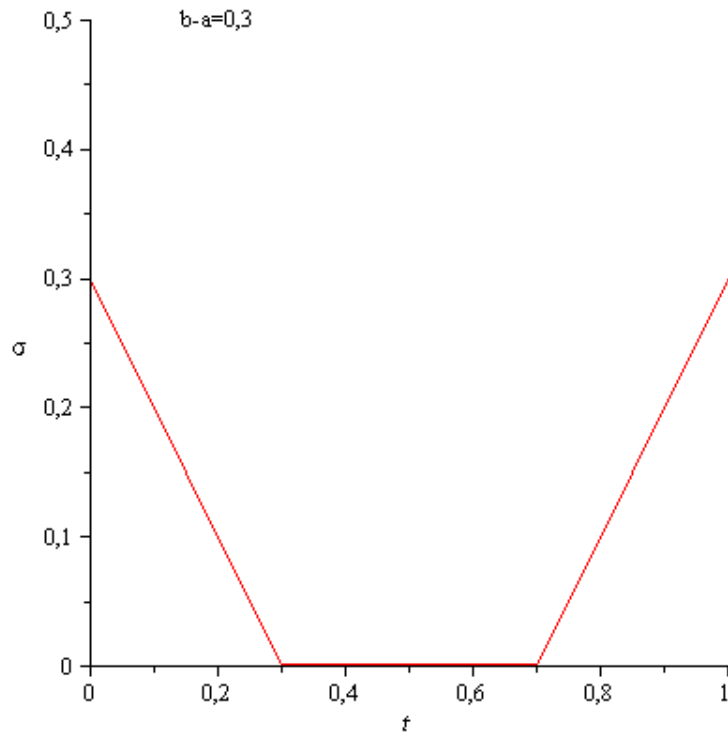
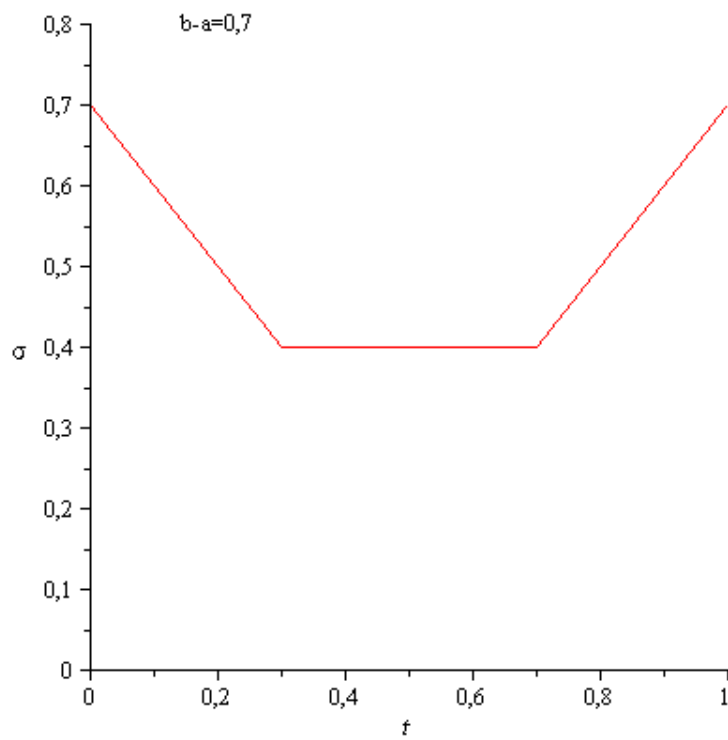
$$I_{2,1}(X, j) \sim \sum_{k+m=v_j} \frac{1}{\log k \log m}.$$

$$\cdot \prod_{p \nmid v_j} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p|v_j} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \gg \frac{X}{\log^2 X}.$$

Нами изучено поведение ряда $\sigma(v_j, a, b)$ ([6]) и получено равенство

$$\begin{aligned} \sigma(v_j, a, b) &= (b-a)^2 + \{\eta v_j - a - b\}^2 - \{\eta v_j - a - b\} - \\ &- 0,5(\{\eta v_j - 2a\}^2 - \{\eta v_j - 2a\} + \{\eta v_j - 2b\}^2 - \{\eta v_j - 2b\}). \end{aligned}$$

При фиксированной разности $b-a$ нами построены графики. Если $b-a > 1/2$, то сумма ряда $\sigma(v_j, a, b) > 0$.

Рис.1. $0 \leq b - a \leq 1/2$ Рис.2. $1/2 < b - a \leq 1$

3. Если $m_1 \neq m_2$, то допустим, что $m_1 < m_2$. Сделаем замену $t = y + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau; 1 - 1/\tau)$, где $\tau = X \log^{-B} X$, $B > 2C + 8$.

По теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде

$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta_1}{q\tau}, \quad (d, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\theta_1| \leq 1. \quad (2)$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (2) выберем $q \leq \log^A X$, $A > 2C + 8$. Тогда $E_2 = E \setminus E_1$.

4. На «малых» дугах известна оценка для $|S(t)|$. На «больших» дугах получаем оценку для $|S(t + m\eta)|$. Пользуясь неравенством Коши, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) |S(t)| |S(t + (m_2 - m_1)\eta)| |T(t - m_1\eta)| dt \ll \\ & \ll \sqrt{\pi(X)\pi(N)} \left(\max_{t \in E_1} |S(t + m\eta)| + \max_{t \in E_2} |S(t)| \right). \end{aligned}$$

5. Оценим

$$\max_{t \in E_1} |S(t + m\eta)|$$

сверху. Для этого изучим рациональные приближения числа $t + m\eta$.

По теореме Дирихле

$$\eta = \frac{A}{Q} + \frac{\theta}{Q\tau_1}, \quad (A, Q) = 1, \quad |\theta| < 1, \quad 1 \leq Q \leq \tau_1. \quad (3)$$

Значение τ_1 выберем позже.

Поскольку η — алгебраическое число степени n , согласно теореме Лиувилля имеем

$$\frac{c(\eta)}{Q^n} \leq \left| \eta - \frac{A}{Q} \right|, \quad c(\eta) > 0. \quad (4)$$

Из (3), (4) получаем

$$\tau_1^{\frac{1}{n-1}} \leq Q \leq \tau_1.$$

Для t , принадлежащих «большим» дугам E_1 , рассмотрим $\gamma = t + m\eta$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{d}{q} + \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta m}{Q\tau_1} = \frac{V}{Y} + \frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta m}{Q\tau_1}, \\ & (A_1, Q_1) = 1, \quad (V, Y) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$Y = \frac{qQ_1}{(dQ_1 + A_1q, qQ_1)}, \quad (5)$$

то

$$Y \leq qQ \leq q\tau_1.$$

При выборе $\tau_1 = \sqrt{\tau}$ выполняется

$$\frac{\theta_1}{q\tau} \ll \frac{1}{\tau_1^2} \ll \left(\frac{q}{Y}\right)^2,$$

$$\left|\frac{\theta_1}{q\tau} + \frac{\theta m}{Q\tau_1}\right| = \frac{\theta_2}{Y^2}, \quad |\theta_2| \leq (1 + |m|)q^2. \quad (6)$$

Обозначим $(dQ_1 + A_1q, Q_1)$ как δ , тогда $\delta|q$ и

$$(dQ_1 + A_1q, qQ_1) \leq q(dQ_1 + A_1q, Q_1) = q\delta \leq q^2. \quad (7)$$

Тогда из (5), (7) имеем

$$Y \geq \frac{Q_1}{q} \geq \frac{Q}{mq}. \quad (8)$$

6. К сумме $S(\gamma)$ применим интегральное преобразование Абеля:

$$S(\gamma) \ll |\mathbb{C}(X)| \frac{1}{\log X} + \int_2^X |\mathbb{C}(x)| \frac{dx}{x \log^2 x},$$

где

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{p \leq X} e^{2\pi i \gamma p} \log p.$$

При выборе $U = X^{0,2/(n-1)}$ имеет место соотношение

$$\mathbb{C}(x) = \sum_{U < n \leq X} e^{2\pi i \gamma n} \Lambda(n) + O(\sqrt{X}).$$

Для оценки тригонометрической суммы с функцией Мангольдта рассмотрим:

$$\sum_{U < n \leq X} e^{2\pi i \gamma n} \Lambda(n) = W_1 - W_2 - W_3,$$

где

$$W_1 = \sum_{d \leq U} \mu(d) \sum_{l \leq Xd^{-1}} (\log l) e^{2\pi i \gamma dl},$$

$$W_2 = \sum_{d \leq U} \mu(d) \sum_{n \leq U} \Lambda(n) \sum_{r \leq X(dn)^{-1}} e^{2\pi i \gamma dnr},$$

$$W_3 = \sum_{U < m \leq XU^{-1}} a_m \sum_{U < n \leq Xm^{-1}} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn},$$

$$a_m = \sum_{\substack{d|m \\ d \leq U}} \mu(d).$$

Получаем

$$W_1, W_2 \ll \log X \sum_{d \leq U^2} \left| \sum_{l \leq Xd^{-1}} e^{2\pi i \gamma d l} \right| \ll \\ \ll \log X \sum_{d \leq U^2} \min(Xd^{-1}, \|\gamma d\|^{-1}).$$

Согласно неравенствам (6), (8) для

$$\gamma d = \frac{Vd + \theta_2 d Y^{-1}}{Y}$$

имеем $|\theta_2 d Y^{-1}| < 0,5$. Полагая

$$r = \begin{cases} k, & \text{если } k \leq Y/2, \\ Y - k, & \text{если } Y/2 < k \leq Y, \end{cases}$$

где k — наименьший неотрицательный вычет числа Vd по модулю Y , имеем

$$W_1, W_2 \ll \log^2 X \sum_{0 < r \leq Y/2} \frac{Y}{r - 0,5} \ll Y \log^3 X.$$

7. Перейдем к оценке суммы W_3 . Пусть

$$U < M \leq XU^{-1}, \quad U < K \leq XM^{-1},$$

$$M_1 \leq 2M, \quad K_1 \leq 2K, \quad MK \leq X.$$

Тогда

$$W_3 \ll |W_3(M, K)| \log^2 X,$$

где

$$W_3(M, K) = \sum_{M < m \leq M_1} a_m \sum_{K < n \leq K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn}.$$

Возведем сумму $W_3(M, K)$ в квадрат, с помощью неравенства Коши получим:

$$W_3(M, K)^2 \ll \left(\sum_{M < m \leq M_1} a_m^2 \right) \sum_{M < m \leq M_1} \left| \sum_{K < n \leq K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn} \right|^2.$$

Поскольку $a_m \leq \tau(m)$, для первой суммы имеем

$$\sum_{M < m \leq M_1} a_m^2 \ll M \log^3 X.$$

Для второй суммы

$$S(M, K) = \sum_{M < m \leq M_1} \left| \sum_{K < n \leq K_1} \Lambda(n) e^{2\pi i \gamma mn} \right|^2,$$

раскрывая квадрат модуля, делая внутренним суммирование по m , получим

$$S(M, K) \ll \log^2 X \sum_{K < n_1, n_2 \leq K_1} \left| \sum_{M < m \leq M_2} e^{2\pi i \gamma m (n_1 - n_2)} \right|,$$

где $M_2 = \min(M_1, X/n_1, X/n_2)$, и n_1 независимо от n_2 пробегает те же значения, что и n_2 . При $n_1 = n_2$ внутренняя сумма равна $M_2 - M$, что даст оценку $\ll X \log^2 X$. В остальных случаях имеем:

$$\begin{aligned} G(M, K) &= \sum_{K < n_2 < n_1 \leq K_1} \left| \sum_{M < m \leq M_2} e^{2\pi i \gamma m (n_1 - n_2)} \right| \ll \\ &\ll \sum_{K < n_2 < n_1 \leq K_1} \min(M, \|\gamma(n_1 - n_2)\|^{-1}) \ll K \sum_{1 \leq h \leq K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1}). \end{aligned}$$

Сумма по h оценивается по аналогии, что и соответствующая сумма у И. М. Виноградова ([5], с. 94). Поскольку условия леммы ([5], с. 94, лемма VI.2.5) в рассматриваемом случае не выполняются, приводим все рассуждения. Пусть $h = h_1 + Ys$, $0 \leq h_1 < Y$, тогда

$$\gamma h = \gamma h_1 + \beta_1 = \frac{Vh_1 + [\beta_1 Y] + \theta_2 h_1 Y^{-1} + \{\beta_1 Y\}}{Y},$$

где $\beta_1 = \gamma Y s$.

$$\sum_{1 \leq h \leq K} \min(M, \|\gamma h\|^{-1}) \ll \left(\frac{K}{Y} + 1 \right) \sum_{0 \leq h_1 < Y} \min \left(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta_1\|} \right).$$

Делая замену $Z = Vh_1 + [\beta_1 Y]$, учитывая периодичность функции $\|x\|$ с периодом 1, имеем

$$\sum_{0 \leq h_1 < Y} \min \left(M, \frac{1}{\|\gamma h_1 + \beta_1\|} \right) \ll \sum_{|Z| \leq 0,5Y} \min \left(M, \frac{1}{\left\| \frac{Z}{Y} + \frac{\theta_3(Z)}{Y} \right\|} \right),$$

где $|\theta_3(Z)| < 2|m|q^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} G(M, K) &\ll \\ &\ll K \left(\frac{K}{Y} + 1 \right) \left(M(4|m|q^2 + 2) + \sum_{2|m|q^2 \leq |Z| \leq 0,5Y} \frac{Y}{|Z| - 2|m|q^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $q \leq \log^A X$, $|m| < \Delta^{-1} \log X$, имеем

$$G(M, K) \ll K \left(\frac{K}{Y} + 1 \right) \left(\frac{M}{\Delta} + Y \right) \log^{1+2A} X \ll$$

$$\ll \left(K^2 M \left(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{M} + \frac{1}{K\Delta} \right) + KY \right) \log^{1+2A} X.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_3(M, K)^2 &\ll M \log^3 X (X \log^2 X + \\ &+ K^2 M \left(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{M} + \frac{1}{K\Delta} \right) + KY) \log^{3+2A} X \ll \\ &\ll \left(X^2 \left(\frac{1}{Y\Delta} + \frac{1}{U} + \frac{1}{U\Delta} \right) + XY \right) \log^{6+2A} X. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$W_3 \ll \left(X \left(\frac{1}{\sqrt{Y\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{U}} + \frac{1}{\sqrt{U\Delta}} \right) + \sqrt{XY} \right) \log^{4+A} X.$$

8. По лемме ([7], с. 35) имеем

$$\max_{t \in E_2} |S(t)| \ll \log^4 X (X \log^{-A/2} X + X^{4/5} + X^{1/2} \tau^{1/2}).$$

9. В результате получили

$$\left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) |S(t)| |S(t + (m_2 - m_1)\eta)| |T(t - m_1\eta)| dt \ll \frac{X^2}{\log^C X}.$$

10. При выборе $A = D + 12$, $B = 2D + 14$, $C = D + 2$ следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чудаков Н. Г. О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых // Изв. АН СССР, Серия математич., №1, 1938, с. 25—40.
- [2] Motkina N. Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a special type [Электронный ресурс] / Gritsenko S., Motkina N. // Режим доступа: <http://arXiv.org/abs/0812.4606> — 26 Dec 2008
- [3] Motkina N. Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type [Электронный ресурс] / Gritsenko S., Motkina N. // Режим доступа: <http://arXiv.org/abs/0812.4665> — 25 Dec 2008
- [4] Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1983.
- [5] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. — М.: Наука, 1983.

- [6] Мотькина Н. Н. О некоторых особых рядах / С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина // Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел: сб. материалов Международной конференции (Белгород, 17-21 окт. 2011 г.). — Белгород: ИПК НИУ «БелГУ», 2011. —С. 44—45.
- [7] Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. —М.: Мир,1985.

НИУ «Белгородский государственный университет»
Поступило 1.12.11