Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. E. Nomofilov, Asymptotic solutions of the second order system of differential equations concentrated in a vicinity of a ray, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 170–179

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 13, 2025, 15:50:20

В.Е.Номофилов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЛУЧА.

В статье строятся формальные асимптотические решения системы уравнений второго порядка на гладком римановом многообразии, сосредоточенные в окрестности фиксированного луча (траектории гамильтоновой системы). Частные примеры такого рода систем доставляют линейные задачи теории упругости, кристаллооптики и магнитной гидродинамики. Методика построения сосредоточенных решений, аналогично методу комплексного ростка В.П.Маслова [5], основана на рассмотрении комплексных решений уравнений Гамильтона--Якоби и переноса. Этот же подход применен В.М.Бабичем и В.В. Улиным в задаче о собственных функциях оператора Лапласа, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической (см.наст.сборник). Полученные на этом пути асимптотические разложения применимы в более широкой окрестности луча, чем разложения, полученные методом параболического уравнения [1].

§ 1. Лучевые решения.

Пусть на гладком $m+1$ -мерном римановом многообразии $\mathcal{M}$ с метрикой $g_{jr}(x)$ заданы гладкие симметрические тензорные поля $A^{il}_{jr}(x)$ и $B_{jr}(x)$:

$$A^{il}_{jr}(x) = A^{li}_{rj}(x), \quad B_{jr}(x) = B_{rj}(x), \tag{1.1}$$

причем тензор $B_{jr}(x)$ при каждом x положительно определен. Рассмотрим систему уравнений

$$\left[\nabla_i A^{il}_{jr}(x)\nabla_l + k^2 B_{jr}(x)\right]u^r = 0, \quad j = 0,\dots,m \tag{1.2}$$

относительно векторного поля $\vec{u} = (u^0,\dots,u^m)$, где ∇ - оператор ковариантного дифференцирования на многообразии $\mathcal{M}$. Здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Будут построены формальные асимптотические решения системы (1.2), сосредоточенные при $k\to\infty$ в окрестности фиксированного луча.

Обозначим через $T^*\mathcal{M}$ пространство кокасательного расслоения, т.е. множество пар (x,p) , где p -ковектор

(1 – форма на $\mathcal{M}$) в точке x [3]. Определим на $T^*\mathcal{M}$ функцию Гамильтона $H(x,p)$ как один из корней характеристического уравнения

$$\det\left\| A^{il}_{jr}(x) p_i p_l - H^2 B_{jr}(x) \right\| = 0. \tag{I.3}$$

Пусть (комплекснозначная) функция $S(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$H(x, \nabla S) = 1. \tag{I.4}$$

Тогда симметрический тензор

$$C_{jr}(x) = A^{il}_{jr}(x) S_i S_l - B_{jr}(x), \qquad (S_i = \nabla_i S)$$

имеет ненулевое ядро. Будем предполагать, что размерность ядра $N = \dim \ker C(x)$ не зависит от x.

Лучевым решением системы (I.2), отвечающим данному корню $H(x,p)$ уравнения (I.3), называется ряд

$$\vec{u}(x) = e^{ikS(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k}\right)^n \left[\vec{V}_n(x) + \frac{i}{k} C^{-1}(x) W_n(x) \right], \tag{I.5}$$

формально удовлетворяющий системе (I.2) при $k \to \infty$. Здесь

$$\vec{V}_n(x) \in \ker C(x), \quad \vec{W}_n(x) \in (\ker C(x))^{\perp}, \tag{I.6}$$

($\perp$ обозначает ортогональное дополнение в $g_{jr}(x)$ –метрике), $C^{-1}(x)$ – обратный оператор к $C(x)$ на ортогональном дополнении к ядру. Лучевые решения системы уравнений второго порядка (в случае простого корня характеристического уравнения) рассматривались в работе [2].

Подстановка ряда (I.5) в систему (I.2) приводит к простым рекуррентным формулам для $\vec{W}_n$:

$$\vec{W}_n = M^{(1)}\left(\vec{V}_n + C^{-1}\vec{W}_{n-1}\right) - M^{(2)}\left(\vec{V}_{n-1} + C^{-1}\vec{W}_{n-2}\right), \tag{I.7}$$

$$n = 0, 1, \ldots, \qquad \vec{W}_{-2} = \vec{W}_{-1} = \vec{V}_{-1} = 0.$$

Здесь $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ – матричные дифференциальные операторы:

$$M^{(1)}_{jr} = \nabla_i A^{il}_{jr} S_l + A^{li}_{jr} S_l \nabla_i, \qquad M^{(2)} = \nabla_i A^{il}_{jr} \nabla_l.$$

Пусть векторы $\vec{e}_1(x),\dots,\vec{e}_N(x)$ при каждом x образуют базис в $\operatorname{Ker} C(x)$. Удобно нормировать $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_N$ условиями

$$\langle B\vec{e}_s,\vec{e}_q\rangle=\delta_{sq}, \quad 1\le s,\ q\le N,$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает скалярное произведение в римановой метрике $g_{jr}(x)$, δ_{sq} – символ Кронекера. В соответствии с условиями (I.6), будем искать $\vec{V}_n(x)$ в виде

$$\vec{V}_n(x)=\sum_{q=1}^{N}\varphi_q^{(n)}(x)\,\vec{e}_q(x) \tag{I.8}$$

и потребуем, чтобы

$$\langle\vec{W}_n,\vec{e}_q\rangle=0, \quad 1\le q\le N. \tag{I.9}$$

Условия (I.9), в силу равенств (I.7) и (I.8), приводят к рекуррентной системе уравнений относительно коэффициентов $\varphi_q^{(n)}$:

$$\sum_{s=1}^{N}\langle \overset{(1)}{M}(\varphi_s^{(n)}\vec{e}_s),\vec{e}_q\rangle=\Psi_q^{(n)}, \quad 1\le q\le N, \tag{I.10}$$

где

$$\Psi_q^{(n)}=\langle \overset{(2)}{M}(\vec{V}_{n-1}+C^{-1}\vec{W}_{n-2})-\overset{(1)}{M}C^{-1}\vec{W}_{n-1},\vec{e}_q\rangle.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{J}(x)$ – кососимметричная матрица порядка $N\times N$ с компонентами

$$\mathcal{J}_{qs}=\frac{1}{2}\langle \overset{(1)}{M}\vec{e}_q,\vec{e}_s\rangle-\frac{1}{2}\langle \overset{(1)}{M}\vec{e}_s,\vec{e}_q\rangle.$$

Тогда система (I.10) эквивалентна системе уравнений переноса

$$2\langle\nabla\varphi_q^{(n)},\frac{\partial H}{\partial p}\rangle+\varphi_q^{(n)}\langle\nabla,\frac{\partial H}{\partial p}\rangle-\sum_{s=1}^{N}\mathcal{J}_{qs}\varphi_s^{(n)}=\Psi_q^{(n)}, \tag{I.11}$$

$$1\le q\le N, \qquad n=0,1,\dots$$

Здесь у вектора $\partial H/\partial p$ опущены аргументы $x,\nabla S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать [2], что в силу (I.I) справедливо тождество

$$(A_{jr}^{il}+A_{jr}^{li})S_l e_s^r e_q^j=2\delta_{sq}\frac{\partial H}{\partial p_i}(x,\nabla S),$$

с учетом которого имеем:

$$\langle M^{(1)}(\varphi_s^{(n)}\vec{e}_s), \vec{e}_q\rangle = 2\delta_{sq}\langle\nabla\varphi_s^{(n)}, \frac{\partial H}{\partial p}\rangle + \varphi_s^{(n)}\langle M^{(1)}\vec{e}_s, \vec{e}_q\rangle;$$

$$\langle M^{(1)}\vec{e}_s, \vec{e}_q\rangle = \mathfrak{I}_{sq} + \delta_{sq}\langle\nabla, \frac{\partial H}{\partial p}\rangle.$$

Из этой цепочки равенств следует требуемое утверждение.

Покажем теперь, что рассмотрение комплексных решений уравнений (I.4) и (I.II) дает возможность построить формальные решения системы (I.2), сосредоточенные в окрестности фиксированного луча.

§ 2. Комплексные решения уравнений Гамильтона-Якоби и переноса.

При построении комплексных решений уравнений (I.4) и (I.II) в окрестности луча, удобно пользоваться некоторыми специальными системами локальных координат на многообразии $\mathcal{M}$. Далим определение таких систем координат.

Кривая $\ell_*: \{x = x(t),\ p = p(t)\}$ на кокасательном расслоении $T^*\mathcal{M}$, заданная решениями канонической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x}$$

и лежащая на линии уровня функции Гамильтона $H(x,p) = 1$, называется бихарактеристикой. Проекция бихарактеристики ℓ на $\mathcal{M}$, т.е. кривая $\ell': \{x = x(t)\}$, называется траекторией канонической системы или лучом [5] . Мы предполагаем, что система (I.2) допускает вещественные бихарактеристики. Будем говорить, что локальные координаты $\{x^0, \dots, x^m\}$ на $\mathcal{M}$ трансверсальны по отношению к бихарактеристике ℓ , если ℓ задана уравнениями

$$x^0 = t,\ x^i = 0,\ p_0 = 1,\ p_i = 0,\ \ 1 \leq i \leq m. \qquad (2.I)$$

Отметим, что трансверсальные координаты имеют очевидный геометрический смысл: x^0 – действие, вычисленное вдоль ℓ (квазидлина луча ℓ'), $\{x^1, \dots, x^m\}$ – координаты на m – мерной гиперповерхности, трансверсально пересекающей луч ℓ' в точке x ж). Примером трансверсальных координат могут служить римановы нормальные координаты в случае оператора Лапласа [I] .

ЛЕММА. I) Пусть ℓ - фиксированная бихарактеристика. Тогда луч ℓ' можно покрыть набором карт на $\mathcal{M}$ таких, что локальные координаты на каждой карте будут трансверсальны по отношению к ℓ .

2) Кривая ℓ на $T^*\mathcal{M}$, заданная уравнениями (2.I), является бихарактеристикой в том и только том случае, если

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}\Big|_\ell = \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big|_\ell = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_0}\Big|_\ell = H\Big|_\ell = 1, \quad 1 \leq i \leq m. \qquad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы приведем конструктивное доказательство первого утверждения леммы. Пусть бихарактеристика ℓ в некоторой системе локальных координат $\{x^0,\dots,x^m\}$ задана уравнениями $x=\varphi(t)$, $p=\Psi(t)$. Существуют, очевидно, гладкие линейно независимые при каждом t векторные поля $\eta_1(t),\dots,\eta_m(t)$ на луче ℓ' , ортогональные $\Psi(t)$:

$$\langle \eta_i(t), \Psi(t)\rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \qquad (2.3)$$

Пусть

$$\Phi(\overset{*}{x}, p) = \langle \varphi(\overset{*}{x}{}^0), p\rangle + \sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}{}^i \langle \eta_i(\overset{*}{x}{}^0), p\rangle$$

есть производящая функция точечного канонического преобразования $\{x,p\}\underset{*\ \ *}{\longrightarrow}\{\overset{*}{x},\overset{*}{p}\}$ [4] . Связь между старыми x, p и новыми $\overset{*}{x}, \overset{*}{p}$ каноническими переменными дается равенствами

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \varphi(\overset{*}{x}{}^0) + \sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}{}^i \eta_i(\overset{*}{x}{}^0), \quad \overset{*}{p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \overset{*}{x}}. \qquad (2.4)$$

Первое утверждение леммы будет доказано, если мы покажем, что локальные координаты $\{\overset{*}{x}\}$ трансверсальны по отношению к ℓ .

ж) В качестве трансверсальных координат могут быть выбраны хорошо известные лучевые координаты, но лишь в области регулярности лучевого поля.

Функция Гамильтона $H(x,p)$, как видно из уравнения (I.3), является однородной функцией первой степени относительно p. В силу канонической системы и теоремы Эйлера об однородных функциях, имеем

$$\langle \frac{d\varphi}{dt}, \Psi(t)\rangle = \langle \frac{\partial H}{\partial p}, p\rangle = H = 1. \tag{2.5}$$

Легко видеть, что из равенств (2.3) и (2.5) следует линейная независимость векторов $d\varphi/dt$, $\eta_1(t),\dots,\eta_m(t)$ при каждом t. Отсюда вытекает, что якобиан

$$\left.\frac{\mathcal{D}(x)}{\mathcal{D}(\overset{*}{x})}\right|_{\overset{*}{x}{}^0=t,\,\overset{*}{x}{}^i=0} = \det\left|\frac{d\varphi}{dt}, \eta_1(t),\dots,\eta_m(t)\right|$$

отличен от нуля. Согласно теореме о неявных функциях, первое уравнение (2.4) определяет гладкую невырожденную замену локальных координат $\{x\} \longrightarrow \{\overset{*}{x}\}$ в окрестности луча ℓ', уравнение которого в новых координатах имеет вид $\overset{*}{x}{}^0 = t$, $\overset{*}{x}{}^i = 0$.

Второе уравнение (2.4) дает:

$$\left.\overset{*}{p}_0\right|_\ell = \langle \frac{d\varphi}{dt}, \Psi(t)\rangle = 1, \quad \left.\overset{*}{p}_i\right|_\ell = \langle \eta_i(t), \Psi(t)\rangle = 0,$$

и, следовательно, локальные координаты $\{\overset{*}{x}\}$ трансверсальны по отношению к бихарактеристике ℓ.

Доказательство второго утверждения леммы очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Умножая обе части первого уравнения (2.4) скалярно на $\Psi(\overset{*}{x}{}^0)$, с учетом (2.3) получаем

$$\langle x - \varphi(\overset{*}{x}{}^0), \Psi(\overset{*}{x}{}^0)\rangle = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\overset{*}{x}{}^0$, можно затем исключить $\overset{*}{x}{}^0$ из уравнения (2.4), после чего нетрудно найти $\overset{*}{x}{}^i$ ($i = 1,\dots,m$) как функции $x^0, x^1,\dots,x^m$.

Пусть ℓ – бихарактеристика, $\{x^0,\dots,x^m\}$ – локальные координаты, трансверсальные по отношению к ℓ. Удобно ввести следующие обозначения: $\tau = x^0$, $\vec{x} = (x^1,\dots,x^m)$ – вектор с компонентами $x^1,\dots,x^m$. Скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x^1,\dots,x^m)$ и $\vec{h} = (h^1,\dots,h^m)$ определим равенством

$$(x,h) = \sum_{i=1}^{m} x^i h^i.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби (I.4) в координатах τ, $\vec{x}$ записывается в виде

$$H\left(\tau,\vec{x},\frac{\partial S}{\partial\tau},\frac{\partial S}{\partial\vec{x}}\right)=1. \tag{2.6}$$

Будем называть формальным решением уравнения (2.6) ряд

$$S(\tau,\vec{x})=\tau+\sum_{n=2}^{\infty}S_n(\tau,\vec{x}),$$

где $S_n(\tau,\vec{x})$ – однородные полиномы по $x^1,\dots,x^m$ степени n с коэффициентами, зависящими от τ, если при любом $\vec{h}$

$$\frac{1}{n!}\left(\vec{h},\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^n\left[H\left(\tau,\vec{x},\frac{\partial S}{\partial\tau},\frac{\partial S}{\partial\vec{x}}\right)-1\right]\Bigg|_{\vec{x}=0}=0,\quad n=0,1\dots \tag{2.7}$$

Легко видеть, что уравнения (2.7) при $n=0$ и 1 удовлетворяются в силу равенств (2.2). Положим

$$S_2(\tau,\vec{x})=\frac{1}{2}(\Gamma(\tau)\vec{x},\vec{x}),$$

где $\Gamma(\tau)$ –симметричная матрица порядка $m\times m$. Уравнение (2.7) при $n=2$ приводит к матричному уравнению Риккати

$$\frac{d\Gamma}{d\tau}+\Gamma R\Gamma+\Gamma L+L^T\Gamma+Q=0, \tag{2.8}$$

где R, L, Q – матрицы порядка $m\times m$, зависящие от τ:

$$R_{is}=\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_s}\Bigg|_{\ell},\quad L_{is}=\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial x^s}\Bigg|_{\ell},\quad Q_{is}=\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial x^s}\Bigg|_{\ell},$$

$1\le i$, $s\le m$; L^T – матрица, транспонированная к L.

Решения уравнения (2.8) известным образом выражаются через решения канонической системы в вариациях [I]. Именно, пусть матрицы $Y(\tau)$ и $Z(\tau)$ порядка $m\times m$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dY}{d\tau}=RZ+LY,\quad \frac{dZ}{d\tau}=-L^TZ-QY \tag{2.9}$$

и соотношениям[ж)]

ж) Левые части (2.I0) являются первыми интегралами системы (2.9), что позволяет удовлетворить условиям (2.I0) за счет выбора начальных данных для Y и Z

$$Y^T Z - Z^T Y = 0, \quad Y^* Z - Z^* Y = iI, \qquad (2.10)$$

где I – единичная матрица, звездочка обозначает эрмитово сопряжение. Тогда матрица

$$\Gamma = Z Y^{-1}$$

удовлетворяет уравнению (2.8), симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. Невырожденность матрицы $Y(\tau)$ следует из соотношений (2.10).

Уравнения (2.7) при $n \geq 3$, в силу равенств (2.2) дают:

$$\frac{\partial S_n(\tau,\vec{h})}{\partial \tau} + \left((R\Gamma + L)\vec{h}, \frac{\partial S_n(\tau,\vec{h})}{\partial \vec{h}}\right) = \Lambda_n(\tau,\vec{h}),$$

или, с учетом первого уравнения (1.9)

$$\frac{\partial S_n(\tau,\vec{h})}{\partial \tau} + \left(\frac{dY}{d\tau} Y^{-1}\vec{h}, \frac{\partial S_n(\tau,\vec{h})}{\partial \vec{h}}\right) = \Lambda_n(\tau,\vec{h}). \qquad (2.11)$$

Здесь $\Lambda_n(\tau,\vec{h})$ – однородные полиномы по $h^1,\ldots,h^m$ степени n, зависящие от S_{n-1}, $S_{n-2}\ldots$. Замена $\vec{h}$ на $Y(\tau)\vec{h}$ приводит уравнение (2.11) к виду

$$\frac{d}{d\tau} S_n(\tau, Y(\tau)\vec{h}) = \Lambda_n(\tau, Y(\tau)\vec{h}).$$

Отсюда найдем $S_n(\tau, Y\vec{h})$ и, следовательно, $S_n(\tau,\vec{x})$.

Формальные решения уравнений переноса (1.11) удобно искать в виде ряда

$$\varphi_q^{(n)}(\tau,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt[4]{g(\tau)}\sqrt{\det Y(\tau)}} \sum_{z=0}^{\infty} \Theta_{q,z}^{(n)}(\tau,\vec{x}),$$

где $\Theta_{q,z}^{(n)}(\tau,\vec{x})$ – по-прежнему, однородные полиномы по x^1, $x^2,\ldots,x^m$ степени z, $g(\tau)$ – определитель метрического тензора в координатах $\tau,\vec{x}$ на луче l' :

$$g(\tau) = \det \left\| g_{jz}(\tau,\vec{x}) \right\|_{\vec{x}=0}.$$

Аналогично тому, как это было сделано для уравнения (2.6), получим относительно $\Theta_{q,z}^{(n)}(\tau,\vec{x})$ рекуррентную систему уравнений

12 113

$$2\frac{d}{d\tau}\overset{(n)}{\theta}_{q,r}(\tau,Y\vec{h})-\sum_{s=1}^{N}\mathcal{J}_{qs}(\tau)\overset{(n)}{\theta}_{s,r}(\tau,Y\vec{h})=\overset{(n)}{T}_{q,r}(\tau,Y\vec{h}), \tag{2.12}$$

$$1\leq q\leq N,\quad n=0,1,\ldots,\quad r=0,1,\ldots$$

Здесь однородные полиномы $\overset{(n)}{T}_{q,r}$ зависят от $\overset{(n)}{\theta}_{q,r-1},\ \overset{(n)}{\theta}_{q,r-2},\ldots$ Решение системы уравнений (2.12) имеет вид

$$\overset{(n)}{\theta}_{q,r}(\tau,Y(\tau)\vec{h})=\frac{1}{2}\sum_{s,l=1}^{N}\Phi_{qs}(\tau)\int^{\tau}\Phi_{ls}(t)\overset{(n)}{T}_{l,r}(t,Y(t)\vec{h})\,dt, \tag{2.13}$$

где матрица ортогонального преобразования $\Phi=(\Phi_{qs})$ есть решение задачи Коши

$$2\frac{d\Phi}{d\tau}=\mathcal{J}(\tau)\Phi,\quad \Phi(\tau_0)=I.$$

Напомним, что $\mathcal{J}(\tau)$ – кососимметричная матрица. Полагая в формуле (2.13) $\vec{h}=Y^{-1}(\tau)\vec{x}$, найдем $\overset{(n)}{\theta}_{q,r}(\tau,\vec{x})$.

Легко видеть, что полиномы $\overset{(n)}{\theta}_{q,r}(\tau,\vec{x})$ и $S_n(\tau,\vec{x})$ находятся однозначно, если задать их при фиксированном значении $\tau=\tau_0$. Распорядившись подходящим образом этими начальными данными, можно построить все решения, отвечающие высшим модам в методе параболического уравнения (см. [1], гл. 8). Для того, чтобы получить решение, отвечающее моде с номером $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, следует положить

$$\overset{(0)}{\theta}_{q,r}(\tau,Y\vec{h})\Big|_{\tau=\tau_0}=C_q\prod_{s=1}^{m}(ih^s)^{\alpha_s}\begin{cases}0, & r<|\alpha|\\ 1, & r=|\alpha|,\end{cases}$$

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m,$$

где C_q – постоянные, не все равные нулю.

Пользуясь случаем, автор искренне благодарит В.М.Бабича и В.С.Булдырева за внимание к работе.

Литература

1. Б а б и ч В.М., Б у л д ы р е в В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972.

2. Б а б и ч В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волно-

вых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. Вопр.динамич.теории распростр.сейсм.волн, 1961, вып.5, с.36–46.
3. Д у б р о в и н Б.А., Н о в и к о в С.П., Ф о м е н к о А.Т. Современная геометрия. М., 1979.
4. Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Механика. М., 1973.
5. М а с л о в В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., 1977.

Nomofilov V.E. Asymptotic solutions of the second order system of differential equations concentrated in a vicinity of a ray.

Formal asymptotic solutions of the second order system of differential equations on a smooth Riemannian manifold concentrated in the vicinity of a fixed ray are constructed by means of the ray method with complex eikonal.