M. V. Shamolin, Application of the methods of Poincaré topographical systems and comparison systems in some concrete systems of differential equations, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 66–70

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 517.925.42+531.552

М. В. Шамолин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПУАНКАРЕ И СИСТЕМ СРАВНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Посвящается Валерию Павловичу Гулиеву

1. Будем рассматривать динамические системы на плоскости или двумерном цилиндре. Исследуем вопросы существования у некоторых систем топографических систем Пуанкаре (ТСП) или более общих систем сравнения.

Под ТСП обычно понимают семейство линий уровня неотрицательной функции, удовлетворяющей условиям

$$\operatorname{grad} V(x^0)=0, \ \det \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{x=x^0=(x_1^0, x_2^0)} \neq 0 \tag{1}$$

(ТСП с центром в точке x^0). При этом если в декартовых координатах задано векторное поле $X=(X_1, X_2)$, то выполнено следующее неравенство:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 \geqslant 0 \ (\leqslant 0). \tag{2}$$

Здесь $V(x_1, x_2)=\text{const}$ — семейство кривых ТСП [1]. С помощью последнего неравенства можно исследовать качественное поведение траекторий системы, заданной векторным полем X.

Пусть векторными полями $X=(X_1, X_2)$ и $Y=(Y_1, Y_2)$ заданы две динамические системы на плоскости в некоторых декартовых координатах. Рассмотрим функцию $\chi=X_1Y_2-Y_1X_2$, которая имеет тот же знак, что и синус угла между векторами X и Y. Очевидно, $\chi=0$ там и только там, где поля X и Y параллельны.

Определение. Функцию χ назовем характеристической, а уравнение $\chi=0$ — уравнением кривой контактов для полей X и Y.

2. Пусть в односвязной области K задана неотрицательная функция $V(x, y)$, определяющая ТСП с центром в точке покоя x_0 какой-то динамической системы. Пусть также неравенство (2) — строгое и выполнено везде в $K\setminus\{x_0\}$. Тогда в K у данной динамической системы нет замкнутых траекторий.

Этот факт обобщает

Теорема. *Пусть в односвязной области D в плоскости, содержащей точку покоя x_0 достаточно гладкого векторного поля v_1, найдется кривая $\gamma\ni x_0$, соединяющая две точки A, $B\in\partial D$ (точки A, B могут быть бесконечно удалены), такая, что существует ТСП с центром в x_0, задаваемая достаточно гладкой функцией V, продолжающаяся вдоль γ до A и B, заполняющая область $K\subset D$ (т. е. в K выполнены условия* (1)) *и обладающая свойством*

$$(v_1, v_2)|_{\mathbf{R}^2} > 0 \tag{3}$$

(*где* $v_2=\operatorname{grad} V$) *почти всюду в K за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0. Тогда во всей области D вокруг точки x_0 не существует ни одной замкнутой траектории поля v_1.*

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая γ_0 существует, ограничивая область $S_0 \ni x_0$. Пусть $\gamma \cap \gamma_0 = \{N_1, N_2\} \neq \varnothing$ (поскольку $x_0 \in \gamma$) и точка N_1 — неособое начальное условие при движении по кривой γ_0. Через точку N_1 проходит замкнутая кривая $\tilde{\gamma}$ из ТСП, причем $\tilde{\gamma} \subset K$. Если кривая $\tilde{\gamma}$ ограничивает область $\tilde{S}$, то существует $\varepsilon > 0$ (которое уменьшим насколько нужно), такое, что:

1) $N_\varepsilon \in \tilde{\gamma}_\delta \cap \gamma$, где $\tilde{\gamma}_\varepsilon$—кривая ТСП;

2) расстояние между точками N_ε и N_1 равно ε;

3) $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ ограничивает область $\tilde{S}_\varepsilon \supset \tilde{S}$.

Выбранное значение ε таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории γ_0 с начальным условием N_1, покинет область $\tilde{S}_\varepsilon$. Поскольку $\tilde{S}_\varepsilon \subset K$ и выполнено неравенство (3) почти всюду в K за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих x_0, то точка с начальным условием N_1 никогда больше в область $\tilde{S}_\varepsilon \subset K \subset D$ не вернется. Так как $\tilde{S} \subset \tilde{S}_\varepsilon$, то приходим к противоречию с замкнутостью кривой γ_0.

3. Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} \alpha' = \omega + A_1 \dfrac{\mathscr{F}(\alpha)}{\cos\alpha}, \\ \omega' = A_2 \mathscr{F}(\alpha); \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \alpha' = \omega + \dfrac{\sigma}{I} \mathscr{F}(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha, \\ \omega' = -\dfrac{1}{I}\mathscr{F}(\alpha) + \sigma\omega^3\cos\alpha - \dfrac{\sigma}{I}\omega\mathscr{F}(\alpha)\sin\alpha; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \alpha' = \omega + \dfrac{\sigma}{I} \mathscr{F}(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2 \sin\alpha + \dfrac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha, \\ \omega' = -\dfrac{1}{I}\mathscr{F}(\alpha) + \sigma\omega^3\cos\alpha - \dfrac{\sigma}{I}\omega\mathscr{F}(\alpha)\sin\alpha + \dfrac{\omega}{m}s(\alpha)\cos\alpha \end{cases} \tag{6}$$

либо в полосе $\Pi = \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, либо в полосе $\Pi' = \left\{(\alpha, \omega) \in \mathbf{R}^2 : \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi\right\}$.

Функции $\mathscr{F}$ и s удовлетворяют условию

$$\mathscr{F} \in \mathfrak{B}, \quad s \in \Sigma, \tag{7}$$

если не оговорено противное. Класс $\mathfrak{B}$ состоит из гладких π-периодических функций, равных нулю только в точках

$$0 \bmod \frac{\pi}{2}, \text{ причем } \mathscr{F}'(0) > 0, \ \mathscr{F}'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Класс Σ состоит из гладких 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию $s(\alpha)\cos\alpha > 0$ почти всюду.

Системы (4)—(6) описывают плоскопараллельные движения тела в сопротивляющейся среде, при которых все взаимодействие среды с телом сосредоточено на плоской поверхности тела — пластинке. Система (4) описывает случай, когда величина скорости центра пластинки постоянна [2]; система (5) — случай движения, при котором центр масс тела движется прямолинейно и равномерно; система (6) — случай свободного торможения тела в среде. Подробнее описание модели взаимодействия со средой см. в [2—4]. Данная модель может служить для описания движения тела в условиях струйного или отрывного обтекания [5, 6].

В работе [2] показано, что у системы (4) при некоторых условиях не существует так называемых монотонных предельных циклов. При тех же условиях у данного класса систем не существует никаких замкнутых траекторий, стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

Предложение 1. *Пусть* $A_1A_2 \neq 0$. *Если* $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ *при* $\alpha \neq 0$ *в полосе* $\Pi(\Pi')$, *то у систем вида* (4) *не существует замкнутой траектории в полосе* $\Pi(\Pi')$.

Замечание. ТСП для системы (4) являются траектории системы (4) при $A_1=0$.

Предложение 2. *У системы* (5) *в полосе* Π (Π') *при* $\varphi \neq 0$ *не существует замкнутой траектории, если* $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ *при* $\alpha \neq 0$.

Замечание. ТСП для системы (5) являются траектории системы (5) при $\sigma=0$.

Предложение 3. *У системы вида* (6) *при* $\sigma \neq 0$ *в полосе* Π *не существует замкнутой траектории, если* $\mathcal{F}(\alpha) \neq 0$ *при* $\alpha \neq 0$ *и*

$$s(\alpha)|_{\Pi} \geqslant 0, \quad \mathcal{F}(\alpha)\sin\alpha|_{\Pi} \geqslant 0.$$

Замечание. ТСП для системы (6) являются траектории системы (5) при $\sigma=0$.

В работе [7] показано, что системы (6) в полосе Π' обладают предельными циклами.

Рассмотрим систему (6) в области

$$\mathcal{O} = \{(\alpha,\ \omega) \in \mathbf{R}^2 : \omega < 0,\ 0 < \alpha < \pi\}.$$

Если $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то существует особая точка $\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{1}{\sigma}\right)$.

Предложение 4. *Пусть* $s(\alpha) \neq 0$ *при* $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. *Тогда вокруг точки покоя* $\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{1}{\sigma}\right)$ *в области* $\mathcal{O}$ *не существует замкнутой траектории, если равенство*

$$\omega^2\cos\alpha + \frac{\sigma}{l}\,\omega\mathcal{F}(\alpha) + \frac{1}{l}\,\mathcal{F}(\alpha)\sin\alpha = 0$$

выполнено только при $\sin 2\alpha = 0$ *и* $\omega = 0$.

Замечание. Предложения 1—4 доказываются с помощью теоремы.

4. Метод ТСП является частным случаем метода исследования систем сравнения. Рассмотрим две автономные системы уравнений на плоскости и их характеристическую функцию. Зная фазовую топологию одной системы, можно провести анализ устройства фазовой плоскости другой системы.

Предложение 5. *Система* (5) *является системой сравнения для системы* (6) *в следующем смысле: почти всюду угол между векторами одного поля и другого поля лежит в интервале* $(0, \pi/2)$ *и лишь на множестве меры нуль он равен нулю.*

Предложение 6. *Система* (4) *при* $A_1=0$ *является системой сравнения для системы* (6): *почти всюду в полосе* Π *угол между векторами одного поля и другого поля лежит в интервале* $(0, \pi/2)$, *а в полосе* Π' *существует кривая контактов, которая не является прямой или точкой.*

Замечание. Поскольку фазовый портрет системы (5) имеет три различных топологических типа [7], в каждой из областей параметров системы (6) можно использовать свой топологический тип.

Аналогично теореме доказывается

Предложение 7. *Рассмотрим систему* (6) *в той области параметров, где* $\frac{s(\alpha)}{m} > \sigma n^2$, *причем* $n^2 = \frac{g^*}{I}$, $g^* = \max\limits_{\alpha} \frac{2\mathscr{F}}{\sin 2\alpha}$.

Тогда в полосе Π' *не существует замкнутой траектории системы* (6).

Системы вида (6) могут обладать предельными циклами в полосе Π', только если $\frac{s(0)}{m} < \sigma n^2$. Для той области параметров, в которой $\frac{s(0)}{m} > \sigma n^2$, можно провести полную топологическую классификацию фазовых портретов системы (6). При этом классы функций $\mathfrak{B}$ и Σ удается разбить на множества, каждое из которых отвечает топологически эквивалентным векторным полям.

5. Рассмотрим системы вида (6) при условии (7). Выше мы поставили вопрос о существовании замкнутых траекторий в полосе $\Pi(\Pi')$, т. е. кривых, окружающих точку $(0, 0)$ $((\pi, 0))$. Теперь исследуем задачу о существовании любых замкнутых траекторий системы (6), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

Сумма индексов особых точек, лежащих внутри таких кривых, должна равняться единице. Значит, такие кривые могут возникнуть вокруг точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbf{Z}$. Внутри таких кривых не могут содержаться два седла $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 0\right)$ и точка $(2\pi k, 0)$, поскольку сумма индексов при этом равна -1. Такие кривые не могут содержать внутри себя одновременно точки $(\pi k, 0)$ и $(\pi(k+1), 0)$ — это невозможно ввиду центральной симметрии поля системы (4) относительно точек $(\pi k, 0)$ и теоремы единственности.

Остается единственная возможность существования такой кривой, содержащей более одной особой точки внутри себя. К примеру, такая кривая может содержать точки $(0, 0)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right)$, сумма индексов которых равна единице. Используя системы сравнения и ТСП для системы (6), удается показать, что последняя возможность реализоваться не может.

Таким образом, проблема существования траекторий указанного типа сводится к отысканию замкнутых траекторий, охватывающих точку $(\pi, 0)$ в полосе Π', поскольку в полосе Π их быть не может, как показано выше.

Замечание. Метод систем сравнения позволяет доказать отсутствие замкнутых траекторий, не стягиваемых по цилиндру в точку.

Автор выражает искреннюю благодарность Д. А. Рятину за помощь при оформлении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1976.
2. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1989. № 3. 51—54.
3. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М., 1986.

4. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде//Сб. науч.-метод. статей по теор. механ. Вып. 18. М., 1987. 75—78.
5. Чаплыгин С. А. Избранные труды. М., 1976.
6. Гуревич Г. И. Теория струй идеальной жидкости. М., 1979.
7. Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 1. 52—58.

Поступила в редакцию
20.06.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 521.11

В. В. Белецкий, В. Л. Кушпатова

ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТА ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКУЮ СТАБИЛИЗАЦИЮ

Один из проектов использования космических тросовых систем предусматривает спуск с основного спутника на длинном тросе (100 км) атмосферного зонда для исследования средних слоев атмосферы и других экспериментов.

Динамика и устойчивость такой системы изучалась в ряде работ (см., например, [1—4]). Было показано, что на устойчивость движения системы в режиме атмосферного зондирования существенно влияет градиент плотности атмосферы.

В [1—4] исследовались в основном движения системы вдоль местной вертикали. Однако система может двигаться также и в режиме аэродинамической стабилизации [5], располагаясь вдоль местной горизонтали. Представляет интерес изучение влияния градиента плотности атмосферы на устойчивость такого режима движения.

Смоделируем трос невесомым несгибаемым стержнем, обладающим продольной упругостью и несущим на своем конце атмосферный зонд массы m. Предположим, что основной спутник движется по круговой орбите радиуса $\tilde{R}_0$ с угловой скоростью ω_0 и линейной скоростью $v_r=\omega_0\tilde{R}_0$.

Рассмотрим движение зонда в плоскости круговой орбиты основного спутника.

Обезразмеренные уравнения движения зонда в орбитальной системе координат имеют вид [1—4]:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}-2\dot{y}-3x=-c\rho_a V\dot{x}-E\left(\frac{r-1}{r}\right)x=0,\\ &\ddot{y}+2\dot{x}=-c\rho_a V(R_0+\dot{y})-E\left(\frac{r-1}{r}\right)y=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad V=\frac{V_r}{\omega_0 l}=\sqrt{(R_0+\dot{y})^2+\dot{x}^2},$$

$$\rho_a=\rho_a(R),\quad R=\sqrt{(R_0+x)^2+y^2}.$$

В нашем случае начало координат связано с основным спутником, ось x направлена от центра Земли к основному спутнику, ось y — по касательной к круговой орбите в направлении движения. Точки обозначают производные по безразмерному времени $\tau=\omega_0 t$; безразмерные координаты x, y связаны с размерными x_p, y_p соотношениями $x=x_p/l$, $y=y_p/l$, где l — ненапряженная длина троса. Введены также безразмер-