

УДК 513.6

РУДАКОВ А. Н., ЦИНК Т., ШАФАРЕВИЧ И. Р.

ВЛИЯНИЕ ВЫСОТЫ НА ВЫРОЖДЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА $K3$

Посвящается памяти О. Н. Введенского

Введение

Для алгебраического многообразия X , определенного над алгебраически замкнутым полем k конечной характеристики, его кристаллические когомологии $H_{\text{cris}}^i(X)$ содержат информацию о геометрии многообразия X , аналогичную той, которая над полем комплексных чисел может быть получена путем введения на X кэлеровой структуры. Выявление этой информации в различных специальных случаях является увлекательной проблемой, очень мало исследованной. Группы H_{cris}^i — это модули над кольцом $W(k)$ векторов Витта с действующим на них эндоморфизмом Фробениуса. Подобные объекты (кристаллы) описываются не очень сложными инвариантами (по крайней мере, после умножения на поле частных кольца $W(k)$) и речь идет о том, чтобы понять геометрический смысл этих инвариантов. Например, кристалл, соответствующий группе H_{cris}^2 для алгебраической поверхности с геометрическим родом 1, в качестве такого инварианта имеет целое число h , принимающее значения $1 \leq h \leq b_2/2$. Наиболее интересным примером является поверхность типа $K3$. В этом случае (и ряде других случаев) геометрический смысл инварианта h выяснил Артин [1]. Он показал, что поверхности можно сопоставить формальную группу $\widehat{\text{Bgr}}(X)$, так называемую формальную группу Брауера, в нашем случае эта группа одномерна и h совпадает с ее высотой ($h \geq 1$ в этом случае означает, что $h = \infty$, т. е. формальная группа унипотентна).

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на то, что возникающий таким образом инвариант — высота поверхности типа $K3$ — играет роль в интересном геометрическом вопросе о возможных вырождениях поверхностей типа $K3$. Пусть X/S — семейство поверхностей, база которого S является спектром одномерного регулярного локального кольца, а общий слой — поверхностью типа $K3$. Перестройкой этого семейства называется семейство X'/S' , если $S' \rightarrow S$ — конечный морфизм, а общие слои семейств $X \times_S S'$ и X' изоморфны. Задача заключается в нахождении для заданного семейства X/S перестройки X' с возможно более простым вырождением (т. е. замкнутым слоем). В частности, если семейство обладает перестройкой, для которой морфизм $X' \rightarrow S'$ — гладкий, то оно называется невырождающимся.

Основное наблюдение этой работы заключается в том, что в некоторых случаях можно построить такую перестройку X'/S' , что она или не вырождается или же ее замкнутый слой имеет высоту 1 или 2 (определение высоты в этом случае сохраняет силу и для вырожденного слоя).

Мы доказываем это в двух случаях: а) для семейств, имеющих «стандартные вырождения» — такие, к которым согласно В. С. Куликову [7] можно свести любые семейства в характеристике 0, и б) для поверхностей степени 2, т. е. двойных плоскостей и эллиптических поверхностей (эти случаи не так уже далеки друг от друга, так как в случае б) существует перестройка, вырожденный слой которой отличается от типа а) только деревьями гладких рациональных компонент — [16]). Остается открытым вопрос, не верно ли такое же утверждение в общем случае.

В весьма широких предположениях группа $\widehat{B}g$ может быть определена для семейства X/S как формальная группа над S . (Мы приводим простое изложение этого вопроса в § 1.) Тогда высота группы $\widehat{B}g$ может только подскакивать при специализации. В частности, в случаях а) и б) мы получаем, что если высота общего слоя семейства X/S больше 2, то семейство не вырождается. Суперсингулярные поверхности (т. е. такие, у которых все двумерные циклы алгебраические) имеют $h = \infty$ и реализуются как поверхности степени 2, т. е. относятся к случаю б). Поэтому суперсингулярные поверхности не вырождаются, т. е. их многообразие модулей полно. Отсюда, как известно, следует, что отображение периодов, введенное Огасом [11] для таких поверхностей, эпиморфно и для него имеет место аналог теоремы Торелли.

В качестве другого приложения нашего результата мы показываем, что два определения суперсингулярных поверхностей типа $K3$ («все циклы алгебраические» и $h = \infty$) совпадают для поверхностей степени 2.

§ 1. Специализация формальной группы Брауера

В работах [1] и [3] было введено понятие формальной группы Брауера алгебраического многообразия и указаны его применения к геометрии поверхностей типа $K3$ над полем конечной характеристики. Нас будут интересовать семейства X/S , общий слой которых X_η — поверхность типа $K3$, а база S — спектр одномерного регулярного локального кольца с общей точкой η . Тогда формальная группа Брауера общего слоя X_η определена и является одномерной формальной группой над полем $k(\eta)$. Строение этой группы (над алгебраическим замыканием поля $k(\eta)$) определяется одним натуральным числом — высотой [8]. Часто можно определить группу Брауера и для замкнутого слоя X_0 и доказать, что при специализации высота не убывает. Заведомо так обстоит дело, когда существует формальная группа Брауера схемы X/S как формальная группа над S . Условия, при которых такая ситуация имеет место, содержатся в работах Артина — Мазура [3] и Рейно [13]. Для удобства читателя мы приведем более элементарное изложение этого вопроса, следуя, с некоторыми упрощениями, идеям Шлезингера [17].

Пусть X — локально нетерова схема. Обозначим через $\text{Nil } \mathcal{O}_X$ категорию всех коммутативных квазипроективных \mathcal{O}_X -алгебр N , для которых существует такое натуральное число m , что $N^m = 0$. Категорию пучков множеств над X обозначим через $\widetilde{\text{Ens}} X$. Мы будем рассматривать функторы $F: \text{Nil } \mathcal{O}_X \rightarrow \widetilde{\text{Ens}} X$, обладающие следующим свойством «локальности»:

(а) Если $j: U \rightarrow X$ — открытое вложение, то

$$j_*(F(N) | U) = F(j_*(N | U)).$$

Каждому квазикогерентному \mathcal{O}_X -модулю M можно сопоставить функтор h_M , обладающий свойством (а):

$$h_M(N) = \widetilde{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(M, N),$$

где $\widetilde{\text{Hom}}$ — пучок гомоморфизмов.

Если M — квазикогерентный \mathcal{O}_X -модуль, то, полагая $M^2=0$, мы получим \mathcal{O}_X -алгебру и тем самым вложение $\text{Mod } \mathcal{O}_X \rightarrow \text{Nil } \mathcal{O}_X$ категории квазикогерентных \mathcal{O}_X -модулей в категорию $\text{Nil } \mathcal{O}_X$. Ограничение функтора F на $\text{Mod } \mathcal{O}_X$ будет обозначаться t_F . Пучок $t_F(M)$ можно снабдить структурой \mathcal{O}_X -модуля:

$$t_F(M) \oplus t_F(M) \xrightarrow{\sim} t_F(M \oplus M) \xrightarrow{t_F(\Sigma)} t_F(M),$$

$$t_F(M)(U) \xrightarrow{t_F(s)} t_F(M)(U), \quad s \in \mathcal{O}_X(U).$$

Если функтор F перестановочен с индуктивными пределами, то таким образом получается квазикогерентный \mathcal{O}_X -модуль. Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда X аффинно. Пусть $U=D(f)$, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Тогда

$$(t_F(M)(X))_f = \varinjlim (t_F(M)(X) \xrightarrow{f^n} t_F(M)(X)) =$$

$$= t_F(\varinjlim M \xrightarrow{f^n} M)(X) = t_F(j_*(M|U))(X) = t_F(M)(U).$$

Теперь квазикогерентность следует из [5, (1.4.1)].

Если $\varphi: Y \rightarrow X$ — морфизм, то, положив

$$(\varphi^*F)(N) = \varphi^*(F(\varphi_*N)),$$

мы получим из функтора F на X аналогичный функтор на Y .

Определение. Функтор $F: \text{Nil } \mathcal{O}_X \rightarrow \widetilde{\text{Eps}} X$ называется *формальным многообразием над X* , если он изоморфен h_P , где P — локально свободный \mathcal{O}_X -модуль конечного типа. Функтор $\text{Nil } \mathcal{O}_X \rightarrow \text{Ab } X$ в категорию пучков абелевых групп над X называется *формальной группой над X* , если он, как функтор в категорию $\widetilde{\text{Eps}} X$, является формальным многообразием.

Предложение 1. Функтор $F: \text{Nil } \mathcal{O}_X \rightarrow \widetilde{\text{Ab}} X$ тогда и только тогда является формальной группой, когда выполнено условие (а) и следующие условия:

- (б) F точен;
- (в) F перестановочен с индуктивными пределами;
- (г) $t_F(\mathcal{O}_X)$ — когерентный \mathcal{O}_X -модуль.

Доказательство является простым вырождением рассуждений Шлезингера [17]. Ввиду свойства (а) можно считать, что $X = \text{Spec } A$ аффинно. Рассмотрим канонический морфизм

$$t_F(A) \otimes M \rightarrow t_F(M). \quad (1)$$

Ввиду свойства (в) это изоморфизм для любых свободных модулей. Так как оба функтора в (1) точны справа, то, используя свободную резольвенту, получим изоморфизм для любого M . Так как функтор F по условию (б) точен, а $t_F(A)$ — когерентный пучок, то $t_F(A)$ — плоский, а значит, локально свободный пучок.

Обозначим A -модуль, соответствующий пучку $t_F(A)$, той же буквой и положим $P = \text{Hom}_A(t_F(A), A)$. Тогда морфизм (1) можно записать как

$$h_P(M) = \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow t_F(M). \quad (2)$$

Обозначим через J идеал аугментации симметрической алгебры $S(P)$. Тогда для $N \in \text{Nil } A$ гомоморфизм модулей $P \rightarrow N$ определяет гомоморфизм $J/J^s \rightarrow N$ для любого $s \gg 0$ и

$$h_P(N) = \lim_{\leftarrow} \text{Hom}_{\text{Alg}}(J/J^s, N).$$

Поэтому

$$\text{Hom}(h_P, F) = \lim_{\leftarrow s} F(J/J^s). \quad (3)$$

Обозначим через $\xi_0 \in t_F(P)$ образ единичного эндоморфизма модуля P при гомоморфизме (2). Так как F точен справа, то элемент $\xi_0 \in F(J/J^2)$ можно поднять до элемента $\xi \in \lim_{\leftarrow s} F(J/J^s)$. Согласно (3) можно счи-

тать, что $\xi \in \text{Hom}(h_P, F)$. Легко убедиться, что ξ — изоморфизм. Для этого, при помощи коротких точных последовательностей, надо свести утверждение к случаю $N^2 = 0$. Отсюда вытекает предложение.

Пусть $f: X \rightarrow S$ — морфизм локально нетеровых схем. Для формальной группы Φ над X определим ее высшие прямые образы как функторы на $\text{Nil } \mathcal{O}_s$:

$$(R^i f_* \Phi)(N) = R^i f_*(\Phi(f^* N)).$$

Предложение 2. Пусть морфизм $f: X \rightarrow S$ — собственный и плоский, а Φ — такая формальная группа на X , что для некоторого i и для всех $s \in S$

$$H^{i-1}(X_s, t_\Phi(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{X_s}) = H^{i+1}(X_s, t_\Phi(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{X_s}) = 0.$$

Тогда $R^i f_ \Phi$ — формальная группа над S .*

Доказательство. Убедимся сначала, что

$$R^{i-1} f_*(\Phi(f^* N)) = R^{i+1} f_*(\Phi(f^* N)) = 0. \quad (4)$$

Так как функтор f^* точен, то можно все свести к случаю $N^2 = 0$. При доказательстве предшествующего предложения мы видели, что канонический морфизм

$$\Phi(f^* N) \xrightarrow{\sim} t_\Phi(\mathcal{O}_X) \otimes f^* N, \quad N^2 = 0,$$

является изоморфизмом. Как известно, для любого когерентного пучка \mathcal{F} на X

$$(R^m f_* \mathcal{F})_s^\wedge \xrightarrow{\sim} \lim_{\leftarrow} H^m(X_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_s / \mathfrak{m}_s^n \mathcal{O}_s).$$

Поэтому достаточно рассмотреть лишь случай, когда схема S — артинова. Тогда все легко сводится к случаю $N = \mathcal{O}_s / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_s$, для которого утверждение содержится в условии.

Из (4) следует, что функтор $F = R^i f_* \Phi$ точен, т. е. условие (б) предложения 1. Остальные условия проверяются просто. Из предложения 1 вытекает, что $R^i f_* \Phi$ — формальная группа.

Пусть $h: T \rightarrow S$ — замкнутое вложение. Тогда условия предложения 2 для $f_T: X \times_S T \rightarrow T$ выполнены и легко проверить, что

$$h^*(R^i f_* \Phi) = (R^i f_T)_*(h_1^* \Phi),$$

где h_1 есть проекция $X \times_s T \rightarrow X$. Отсюда следует, что

$$(R^i f_* \Phi) | T = R^i f_{T*} (\Phi | X \times_s T), \quad (5)$$

т. е. функтор $R^i f_* \Phi$ перестановочен, в естественном смысле, с ограничением на замкнутую подсхему.

Мы будем рассматривать случай, когда $\Phi = \hat{G}_m$, так что $t_{\Phi}(\mathcal{O}_X) = \hat{G}_a$. Схема X/S будет иметь относительную размерность 2 и для ее слоев X_s будет выполняться условие $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$. Тогда, согласно предложению 2, функтор $R^2 f_* \hat{G}_m$ является формальной группой. Он называется формальной группой Брауера и обозначается через $\hat{B}r(X/S)$. Легко проверить, что если $F = \hat{B}r(X/S)$, то $t_F(\mathcal{O}_S) = R^2 f_* \hat{G}_a$.

Возвращаясь к случаю, когда S есть спектр одномерного регулярного локального кольца и общий слой схемы X/S — поверхность типа КЗ, мы видим, что если формальная группа $\hat{B}r(X/S)$ существует, то она одномерна. Предложение 2 и соотношение (5) дают

Предложение 3. Пусть S — спектр одномерного регулярного локального кольца и X/S — схема, общий слой которой является поверхностью типа КЗ. Если для замкнутого слоя X_0 $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$, то формальная группа Брауера $\hat{B}r(X/S)$ существует, одномерна и ее высота не уменьшается при переходе от общего к замкнутому слою.

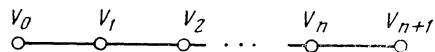
§ 2. Стандартные вырождения

Семейство X/S , где S — спектр одномерного регулярного локального кольца с общей точкой η , а X_η — поверхность типа КЗ, по определению имеет стандартное вырождение, если выполняется одно из условий:

А. X/S гладко, т. е. замкнутый слой X_0 является гладкой поверхностью типа КЗ.

В случаях В и С пусть слой X_0 приводим, $X_0 = \bigcup V_\alpha$ — разложение на неприводимые компоненты и $\Pi(X_0)$ — полиэдр этого покрытия. Предполагается, что компоненты V_i — кратности 1 и имеют нормальные пересечения.

В. Полиэдр $\Pi(X_0)$ имеет вид



При этом V_0 и V_{n+1} — гладкие рациональные поверхности, а V_α , $\alpha = 1, \dots, n$, — линейчатые поверхности над эллиптической кривой C , $V_\alpha \cap V_{\alpha+1}$ является сечением V_α при $\alpha = 1, \dots, n$ и $V_{\alpha+1}$ при $\alpha = 0, \dots, n-1$.

С. $\Pi(X_0)$ изоморфен триангуляции сферы S^2 . Компоненты V_i — рациональные поверхности, $V_\alpha \cap V_\beta$ — рациональные кривые.

Эта терминология оправдывается тем, что, как показал В. С. Куликов [7], над полем C любое семейство поверхностей типа КЗ обладает перестройкой, вырождение которой — стандартного типа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X/S — семейство поверхностей типа КЗ, имеющее вырождение стандартного типа. Тогда формальная группа $\hat{B}r(X/S)$ существует. Группа $\hat{B}r(X_0)$ изоморфна в случае В формальной группе,

соответствующей эллиптической кривой C , а в случае C — мультипликативной группе.

Случай А очевиден ввиду предложения 2. В случаях В и С условие $H^1(X_0, \mathcal{O}) = 0$ предложения 2 проверяется, исходя из спектральной последовательности покрытия $X_0 = \bigcup V_\alpha$. Мы пропускаем эту проверку, так как она аналогична, но проще нижеследующих рассуждений. Таким образом, формальная группа $\widehat{\text{Br}}(X/S)$ существует. Найдем группу $\widehat{\text{Br}}(X_0)$. По определению,

$$\widehat{\text{Br}}(X_0)(N) = H^2(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*), \quad N \in \text{Nil } \mathbf{k}.$$

Для вычисления группы в правой части воспользуемся спектральной последовательностью покрытия $X_0 = \bigcup_0^{n+1} V_\alpha$. Положим

$$V^{i1} = \prod_{\alpha_1 < \dots < \alpha_i} V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_i} = \prod_{\alpha_1 < \dots < \alpha_i} V_{\alpha_1, \dots, \alpha_i}.$$

Тогда

$$E_1^{ij} = H^j(V^{i1}, (1 + \mathcal{O}_{V^{i1}} \otimes N)^*) \Rightarrow H^{i+j}(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*).$$

В случаях В и С $H^2(V_\alpha, \mathcal{O}_{V_\alpha}) = 0$. Поэтому член E_1 имеет вид

$$\begin{aligned} & \oplus H^1(V_\alpha, (1 + \mathcal{O}_{V_\alpha} \otimes N)^*) \xrightarrow{d^1} \oplus H^1(V_{\alpha\beta}, (1 + \mathcal{O}_{V_{\alpha\beta}} \otimes N)^*) \oplus \\ & \oplus H^0(V_\alpha, (1 + \mathcal{O}_{V_\alpha} \otimes N)^*) \rightarrow \oplus H^0(V_{\alpha\beta}, (1 + \mathcal{O}_{V_{\alpha\beta}} \otimes N)^*) \rightarrow \\ & \rightarrow \oplus H^0(V_{\alpha\beta\gamma}, (1 + \mathcal{O}_{V_{\alpha\beta\gamma}} \otimes N)^*). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай В. Тогда $V_{\alpha\beta\gamma} = \emptyset$. Очевидно, остающийся гомоморфизм в нижней строчке эпиморфен. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} H^1(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*) &= \text{Ker } d^1, \\ H^2(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*) &= \text{Coker } d^1. \end{aligned}$$

Пусть вообще $V \rightarrow C$ — линейчатая поверхность и $D \subset V$ — сечение. Тогда $H^1(V, (1 + \mathcal{O}_V \otimes N)^*) \rightarrow H^1(D, (1 + \mathcal{O}_D \otimes N)^*)$ — изоморфизм. Чтобы в этом убедиться, надо воспользоваться тем, что оба функтора точны — это дает возможность свести рассмотрение к случаю $N = \mathbf{k}$, в котором утверждение очевидно. Аналогично,

$$H^1(V_0, (1 + \mathcal{O}_{V_0} \otimes N)^*) = H^1(V_{n+1}, (1 + \mathcal{O}_{V_{n+1}} \otimes N)^*) = 0,$$

так как V_0 и V_{n+1} — рациональные поверхности. Отсюда вытекает, что d^1 — инъективный гомоморфизм с коядром $H^1(C, (1 + \mathcal{O}_C \otimes N)^*)$. Это и дает утверждение теоремы в случае В.

В случае С верхняя строчка исчезает и спектральная последовательность вырождается в последовательность

$$\bigoplus_{\alpha} \widehat{G}_m(N) \rightarrow \bigoplus_{\alpha\beta} \widehat{G}_m(N) \rightarrow \bigoplus_{\alpha\beta\gamma} \widehat{G}_m(N).$$

Это симплициальный комплекс некоторой триангуляции сферы S^2 , тензорно умноженный на $\widehat{G}_m(N)$. Поэтому его вторая группа когомологий изоморфна $\widehat{G}_m(N)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть X/S — семейство поверхностей типа КЗ над полем характеристики $p > 0$, имеющее стандартное вырождение. Если высота общего слоя X_η (т. е. формальной группы $\widehat{B\Gamma}(X_\eta)$) больше 2, то семейство не вырождается.

Действительно, если бы оно вырождалось, т. е. имел бы место случай В или С, то, согласно теореме 1, высота слоя X_0 была бы не больше 2. Ввиду предложения 3 это противоречит тому, что высота слоя X_η больше 2 по предположению.

§ 3. Вырождения двойных плоскостей

Мы будем рассматривать теперь случай, когда общий слой семейства X/S — двойная плоскость типа КЗ. В этом случае он задается уравнением $z^2 = f(x, y)$, где f — многочлен степени 6. При этом мы будем предполагать, что характеристика p основного поля отлична от 2 и 3. Нашей целью является составление некоторого списка поверхностей, так что для всякого семейства двойных плоскостей типа КЗ существует перестройка, замкнутый слой которой принадлежит к нашему списку.

В проективном пространстве \mathbb{P} плоских кривых степени 6 рассмотрим естественное действие группы $G = \text{PGL}(2)$ и множество \mathfrak{F}_{ss} точек, полустабильных относительно этого действия. Из того, что фактор \mathfrak{F}_{ss}/G является проективным многообразием, легко следует, что за искомый список можно принять совокупность всех двойных плоскостей с полустабильной кривой ветвления (соответствующее рассуждение приведено, например, в работе Мамфорда [10]). Однако этот список можно несколько сократить. Именно, легко проверить, что можно ограничиться теми полустабильными кривыми, G -орбита которых замкнута в множестве \mathfrak{F}_{ss} . Действительно, пусть $Y \rightarrow S$ — семейство полустабильных кривых с общим слоем Y_η и замкнутым слоем Y_0 , y_η и y_0 — соответствующие точки в \mathfrak{F}_{ss} . Предположим, что орбита Gy_0 не замкнута в \mathfrak{F}_{ss} , и пусть $g_t(y_0)$ — однопараметрическое семейство точек, в замыкании которого лежит точка z_0 из замыкания орбиты Gy_0 . Мы можем предполагать, что базой этого семейства является схема S' , изоморфная S . Выбрав изоморфизм φ этих схем, рассмотрим семейство, соответствующее $g_t y_{\varphi(t)}$. Очевидно, что оно является перестройкой исходного семейства, а его замкнутый слой соответствует точке z_0 .

Перечисление всех полустабильных кривых степени 6, орбиты которых замкнуты в \mathfrak{F}_{ss} , получается без особенного труда при помощи классического приема теории инвариантов: «треугольника Гильберта» (см., напр., [9]). Эта работа была проделана многими авторами (Рид, Хорикава, Тодоров, Шаа). Мы приведем ответ (см., напр., [18, теор. 2.4]).

А. Изолированные особые точки кратности 2 или кратности 3, но распадающиеся на особые точки кратности ≤ 2 после одного σ -процесса. Если кривая C степени 6, $f=0$, имеет такую особую точку, то двойная плоскость $X: z^2 = f$ имеет двойную рациональную особую точку. Соответствие между типами особых точек дается следующей ниже таблицей.

Таким образом, если поверхность X принадлежит к этому типу, то ее неособая минимальная модель является поверхностью типа КЗ.

В. Две изолированные тройные точки, остающиеся тройными после одного σ -процесса (случай одной такой

Точка на C	Точка на X
Неособая	Неособая
Двойная с разделенными касательными	A_1
Острие	A_n
Тройная с тремя разделенными касательными	D_4
Тройная с двумя касательными, из которых одна — двойная	D_n
Тройная с одной тройной касательной, после одного σ -процесса распадающаяся на точки кратности ≤ 2	E_6, E_7, E_8

точки дает незамкнутую орбиту). Если особые точки находятся в начале координат и в бесконечно удаленной точке на оси x , то уравнение кривой имеет вид $x^3 + \alpha xy^4 + \beta y^6 = 0$, а двойной плоскости — $z^2 = x^3 + \alpha xy^4 + \beta y^6$, причем $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$. Отображение $(x, y, z) \rightarrow z$ определяет на этой поверхности пучок эллиптических кривых. Полагая $z = z_1 y^3$, $x = x_1 y^2$, получаем неособую поверхность $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — эллиптическая кривая $z_1^2 = x_1^3 + \alpha x_1 + \beta$. Отображение $(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_1 y_1^2, y_1, z_1 y_1^3)$ не является морфизмом в бесконечно удаленных точках слоев, расположенных на $y = 0$ и $y = \infty$. После σ -процессов в этих точках мы получаем гладкую поверхность \bar{X} и ее морфизм $f: \bar{X} \rightarrow X$, причем слои \bar{X} над точками $y = 0$ и $y = \infty$ имеют вид $C + L$, где $L \simeq \mathbf{P}^1$, а морфизм f стягивает кривые C в точки.

С. Единственная двукратная компонента, трансверсально пересекающая другие. Уравнения кривой степени 6 могут иметь следующий вид:

$C_1: f = g^2$, где $g = 0$ — гладкая кубика.

$C_2: f = h^2 k$, где h и k — трансверсально пересекающиеся коники, причем коника $h = 0$ гладкая.

$C_3: f = l_0^2 l_1 l_2 l_3 l_4$, где $l_i = 0$ — различные прямые, причем прямые $l_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, проходят через одну точку, не лежащую на прямой $l_0 = 0$.

Соответствующие поверхности $z^2 = f$ не нормальны. В случае C_1 поверхность X приводима и состоит из двух рациональных компонент, пересекающихся по эллиптической кривой. В случае C_2 нормализация \bar{X} поверхности X гладка или имеет простейшую двойную точку и морфизм $v: \bar{X} \rightarrow X$ отображает эллиптическую кривую $C \subset \bar{X}$ на прямую $L \subset X$ как двулистное накрытие с 4 точками ветвления, а вне C является изоморфизмом.

В случае C_3 нормализация $\bar{X} \rightarrow X$ устроена так же, но не является гладкой, а задается уравнением $z^2 = l_1 l_2 l_3 l_4$. Она имеет изолированную особую точку в точке пересечения прямых $l_i = 0$. При разрешении особенностей, точно так же, как и в случае В, возникает эллиптическая кривая, стягивающаяся в особую точку. Таким образом, разрешение особенностей имеет вид $f: \bar{X} \rightarrow X$, где \bar{X} — неминимальная модель эллиптической поверхности $\mathbf{P}^1 \times C$, f является изоморфизмом вне двух непере-

секающихся эллиптических кривых C и $C' \subset X$, C он стягивает в точку, а C' отображает на прямую как двулистное накрытие с 4 точками ветвления.

D. Двукратная компонента, не трансверсально пересекающаяся с двумя компонентами.

$D_1: f = gh^2$, где g и h — коники, имеющие две точки касания, причем h — гладкая.

$D_2: f = l_1^2 l_2^2 l_3^2$, где $l_i = 0$ — три прямые, не проходящие через одну точку.

E. Трехкратная компонента. $f = g^3$, где $g = 0$ — гладкая коника.

Вырождения типа E исследовал Хорикава в работе [6]. Он показал, что они могут быть сведены к вырождениям, аналогичным A—D. Именно, для любого семейства двойных плоскостей степени 6, вырожденный слой которого имеет тип E, существует перестройка, вырожденный слой которой является сильно эллиптической поверхностью, полустабильной в смысле классификации эллиптических поверхностей типа K3 или получающийся из такой поверхности стягиванием рациональной кривой с квадратом -2 в простейшую двойную точку. Это значит, что уравнение поверхности записывается в виде $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$, где a — многочлен степени 8, b — 12, причем ни в одной точке a и b не обращаются одновременно в 0 с кратностями >4 и >6 .

Другое доказательство теоремы Хорикавы предложил Шаа [18]. Оба доказательства, формально говоря, предполагают, что основное поле есть поле комплексных чисел. Однако это предположение почти не используется. Для удобства читателя мы приведем ниже упрощенный вариант доказательства Хорикавы—Шаа, годный для случая характеристики >11 . Для случая характеристики >3 мы отсылаем читателя к исходному доказательству Хорикавы.

Сильно эллиптическая поверхность X типа K3 задается уравнением $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены степени ≤ 8 и ≤ 12 (сечения $\mathcal{O}(8)$ и $\mathcal{O}(12)$ на \mathbf{P}^1). Поэтому такие поверхности параметризуются точками взвешенного проективного пространства \mathfrak{P} , в котором координаты многочлена $a(t)$ имеют вес 4, а $b(t)$ — 6. На пространстве \mathfrak{P} действует группа $\text{PGL}(1) = \text{Aut}(\mathbf{P}^1)$, где \mathbf{P}^1 — база расслоения.

Теорема Хорикавы дает нам право заменить в нашем списке тип вырождения E полустабильными вырождениями эллиптических поверхностей типа K3, причем, как и в случае двойных плоскостей, мы можем ограничиться только такими вырождениями, орбиты которых замкнуты во множестве полустабильных. Получающиеся вырождения разбиваются на 4 типа:

A'. Поверхность X имеет только рациональные двойные точки и является вейерштрассовой моделью эллиптической поверхности типа K3.

B'. Поверхность X имеет 2 изолированные тройные точки. В этом случае $a = \alpha c^4$, $b = \beta c^6$, где $c(t)$ — многочлен степени 2 без кратных корней, $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$. Разрешение особенностей поверхности X имеет такой же вид, как и в случае B вырождения двойных плоскостей.

C'. Поверхность X имеет кривую особых точек, прообраз которой при нормализации гладок. В этом

случае $a=3c^2$, $b=-2c^3$, где $c(t)$ — многочлен степени 4 без кратных корней. Разрешение особенностей имеет такой же вид, как в случае C_2 вырождения двойных плоскостей.

D' . Поверхность X имеет кривую особых точек, прообраз которой при нормализации не гладок. Формулы те же, что и в случае C' , но многочлен $c(t)$ имеет один корень кратности 2 и два — простых.

§ 4. Теорема Хорикавы

Обозначим через S^n пространство однородных многочленов от 3-х переменных x , y и z над полем \mathbf{k} характеристики p , через $Q \in S^2$ — невырожденную квадратичную форму и через $G = \text{SO}(Q)$ — ее группу автоморфизмов с определителем 1. Очевидно, что G действует в S^n и QS^{n-2} является при этом инвариантным подпространством.

ЛЕММА. При $p > 2n$ пространство QS^{n-2} обладает G -инвариантным дополнением в S^n .

Доказательство. Положим $Q = xy - z^2$ и установим изоморфизм коники $Q=0$ с \mathbf{P}^1 формулами $x=u^2$, $y=v^2$, $z=uv$. При этом изоморфизме G отождествляется с образом $\text{SL}(2)$ при его стандартном действии на u и v . Рассмотрим в $\text{SL}(2)$ картановскую подгруппу $u \rightarrow \lambda u$, $v \rightarrow \lambda^{-1}v$ и соответствующую борелевскую подгруппу B , сохраняющую u с точностью до множителя. Тогда B сохраняет прямую $\mathbf{k}x^n$ в S^n и подпространство L , натянутое на Bx^n , совпадает с линейной оболочкой $g_\lambda x^n$, где $g_\lambda(u) = u + \lambda v$, $g_\lambda(v) = v$. Очевидно, что L G -инвариантно и $\dim L \leq 2n+1$. С другой стороны, $\dim S^n/QS^{n-2} = 2n+1$, поэтому мы докажем, что L является G -инвариантным дополнением для QS^{n-2} , если покажем, что $\dim L = 2n+1$, $L \cap QS^{n-2} = 0$. Для этого рассмотрим оператор ρ ограничения на Q и докажем, что $\dim \rho L = 2n+1$. Действительно, при указанном изоморфизме коники и \mathbf{P}^1 $\rho x = u^2$, $\rho x^n = u^{2n}$ и $\rho g_\lambda(x^n) = (u + \lambda v)^{2n}$. Ввиду условия $p > 2n$, все биномиальные коэффициенты в разложении $(u + \lambda v)^{2n}$ отличны от 0, а поэтому подпространство, натянутое на все формы $(u + \lambda v)^{2n}$, имеет размерность $2n+1$.

В частности, если $n \leq 6$, то лемма применима при $p > 11$, чем и объясняется это ограничение на характеристику, которое мы дальше накладываем.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы Хорикавы. Пусть $S = \text{Spec } \Lambda$, где Λ — локальное кольцо с максимальным идеалом (π) . Применяя 3 раза предшествующую лемму, мы видим, что любой многочлен степени 6 от 3-х переменных может быть однозначно представлен в виде $F = \alpha Q^3 + F_2 Q^2 + F_4 Q + F_6$, где $F_i \in S^i$, и содержится в G -инвариантном дополнении к QS^{i-2} , построенном в лемме. Так как коэффициенты F принадлежат Λ и $F(x, y, z) \equiv Q^3 \pmod{\pi}$, то $\alpha \equiv 1 \pmod{\pi}$ и мы можем считать, что $\alpha = 1$, а все F_i делятся на π . Обычным преобразованием $Q \rightarrow Q - \frac{1}{3}F_2$ можно уничтожить коэффициент при Q^2 . При этом Q не изменится $\pmod{\pi}$ и, произведя линейное преобразование, тождественное $\pmod{\pi}$, мы можем привести Q к прежнему виду. Теперь мы имеем $F = Q^3 + F_4 Q + F_6$, где F_4 и F_6 делятся на π . После некоторого подъема базы мы всегда можем считать, что $F_4 = \pi^{4k} A$, $F_6 = \pi^{6k} B$, где или A или B не делятся на π . Таким образом, уравнение двойной плос-

кости имеет вид

$$\omega^2 = Q^3 + \pi^{4k}QA + \pi^{6k}B.$$

Разделим обе части на π^{6k} и положим

$$\omega = \pi^{3k}v, \quad Q = \pi^{2k}u. \quad (1)$$

Тогда уравнения нашей поверхности приобретут вид:

$$v^2 = u^3 + Au + B. \quad (2)$$

При $\pi = 0$ мы получаем отсюда $Q = 0$ и

$$v^2 = u^3 + au + b, \quad (3)$$

где a и b — ограничения многочленов A и B на конику $Q = 0$. Так как эта коника изоморфна \mathbf{P}^1 , то таким образом мы получаем эллиптическую поверхность, в которой a и b являются многочленами степеней ≤ 8 и ≤ 12 , один из которых не равен 0.

Докажем, что существует такое преобразование $g \in G(K)$, где K — поле частных Λ , что для многочлена $g \cdot F$ мы получим в (3) полустабильную эллиптическую поверхность. Для этого запишем F в виде $Q^3 + AQ + B$, где $A \in L$, $B \in M$ лежат в соответствующих G -инвариантных подпространствах. Действие группы G рассматривается нами в кратно-проективном пространстве \mathbf{P} , соответствующем G -модулю $L \oplus M$, где L имеет вес 4, а M — 6. Рассмотрим, с другой стороны, совокупность поверхностей вида (3), которая задается точками (a, b) в кратно-проективном пространстве \mathbf{P}' . В \mathbf{P}' действует группа $PL(1)$, гомоморфным образом которой является группа G . Гомоморфизм ρ ограничения на конику $Q = 0$ определяет изоморфизм пространств \mathbf{P} и \mathbf{P}' , перестановочный с действием $PL(1)$ и G . Ввиду стандартного аргумента, которым мы уже пользовались выше, существует преобразование $g' \in PL(1)(K)$, которое переводит наше семейство эллиптических поверхностей в семейство полустабильным вырождением слоя. При помощи установленного изоморфизма мы получаем, что соответствующее преобразование $g \in G(K)$ обладает нужным свойством.

Чтобы закончить доказательство теоремы, нам остается убедиться, что формулы (2) описывают семейство проективных плоскостей, замкнутый слой которого изоморфен поверхности с уравнением (3). Для этого рассмотрим вторую карту, в которой определены координаты $\xi = \frac{u}{v}$, $\eta = \frac{1}{v}$ и которая вместе с картой (2) определяет проективное многообразие над S . В новой карте

$$\eta = \xi^3 + A\xi\eta^2 + B\eta^3, \quad \eta Q = \pi^{2k}\xi. \quad (4)$$

Замкнутый слой $\pi = 0$ распадается на две компоненты: $X_0 = X_1 \cup X_2$, где X_1 задается уравнением $Q = 0$, а X_2 : $\eta = 0$. Очевидно, что $X_2 \simeq \mathbf{P}^2$.

Из (4) мы видим, что $\eta\varphi = \xi^3$, где $\varphi = 1 - A\xi\eta - B\eta^2$ — обратимый элемент. Отсюда $\xi^3 Q = \pi^{2k}\xi\varphi$, т. е. $\xi^2 Q = \pi^{2k}\varphi$. Мы видим, что наше многообразие не нормально и нормализация его задается уравнениями

$$\zeta\xi = \pi^k, \quad \zeta^2\varphi = Q. \quad (5)$$

Пусть X_0' , X_1' и X_2' — прообразы замкнутого слоя X_0 и его компонент X_1 и X_2 . Теперь дивизор Вейля X_2' не является локально главным, но $X_2'' = kX_2'$ — локально главный и задается в карте (5) уравнением $\xi = 0$.

Так как на X_2' $\varphi=1$, то X_2' — двулистное накрытие плоскости с кривой ветвления степени 2, т. е. квадрика. Покажем, что эту квадрику можно стянуть в точку. Пусть Y — коника $X_1' \cap X_2' \subset X_2'$. Очевидно, что ограничение дивизора X_2'' (или соответствующего пучка) на X_2' есть отрицательная кратность коники Y . Отсюда следует, что если H — очень обильный дивизор, для которого $H \cdot X_2'$ кратно Y , то существуют такие $a > 0$, $b > 0$, что $aH + bX_2''$ при ограничении на X_2' дает дивизор, эквивалентный 0. Тем самым линейная система $|aH + bX_2''|$ стягивает X_2' в точку. Остается выяснить, что при этом происходит с X_1' . В карте (2) X_1' отображается изоморфно. В карте (4) коника $Y = X_1' \cap X_2'$ стягивается в точку. Легко видеть, что на X_1' $(Y^2) = -2$, так как на X_2' $(Y^2) = 2$. Умножив $aH + bX_2''$ на достаточно большое число, мы обеспечим, что точка, в которую стягивается Y , нормальна. Так как $(Y^2) = -2$, то эта точка является простейшей двойной точкой. На основании теоремы Тьюриной — Брискорна — Артина [2] (в нашем случае — простейшего частного случая этой теоремы) существует перестройка нашего семейства, в которой эта точка разрешается.

§ 5. Вырождения поверхностей типа $K3$ степени 2 и высоты, большей 2

ТЕОРЕМА 2. Пусть X/S — семейство, определенное над полем характеристики $p=2, 3$, общий слой которого — поверхность типа $K3$ степени 2. Существует перестройка X'/S' этого семейства, для которого группа $\widehat{B\Gamma}(X'/S')$ определена, причем либо семейство X'/S' невырождено, либо группа $\widehat{B\Gamma}(X_0')$ замкнутого слоя имеет высоту ≤ 2 .

Поверхность типа $K3$ степени 2 является или сильно эллиптической поверхностью (т. е. задается уравнением $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$, где $\deg a(t) \leq 8$, $\deg b(t) \leq 12$) или двойной плоскостью (т. е. задается уравнением $z^2 = f(x, y)$, где f — многочлен степени 6).

Согласно § 3 семейство X/S имеет перестройку, вырожденный слой которой принадлежит к одному из типов $A, A'; B, B'; C_1, C_2, C_3, C'; D_1, D_2, D'$. Мы их рассмотрим по порядку.

A и A' . В этом случае все слои имеют только рациональные двойные точки. Согласно теореме Брискорна — Тьюриной — Артина [2], семейство имеет перестройку, все слои которой гладкие, т. е. само семейство гладко.

В случаях $B, B', C_1, C_2, C_3, C', D_1, D_2$ и D' мы покажем, что выполнены условия теоремы 1, т. е. $\widehat{B\Gamma}(X/S)$ задается одномерной формальной группой над S . Кроме того, мы проверим, что для замкнутого слоя X_0 формальная группа $\widehat{B\Gamma}(X_0)$ имеет высоту ≤ 2 . Отсюда следует, что этот случай не может встретиться, если высота формальной группы $\widehat{B\Gamma}(X_n)$ больше 2.

Проверим, что выполнены условия теоремы 1, т. е. что $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}^2) = 0$ для любого слоя X_s семейства X . Это есть общее свойство сильно эллиптических поверхностей и двойных плоскостей. Сильно эллиптическую поверхность мы зададим уравнением

$$y^2 = x^3 + A(t_0 : t_1)x + B(t_0 : t_1), \quad (1)$$

где A — форма степени 8, а B — 12. При этом мы придадим переменным

t_0 и t_1 вес 1, переменной x — 4, а y — 6, рассматривая соотношение во взвешенно проективном пространстве соответствующего типа. Уравнение (1) является множеством нулей сечения пучка $\mathcal{O}(12)$ в этом пространстве. Аналогично, уравнение двойной плоскости мы запишем в виде $z^2 = F(x : y : u)$ и интерпретируем его как множество нулей сечения пучка $\mathcal{O}(6)$ во взвешенно-проективном пространстве, определим вес x , y и u равным 1, а z — 2. Если X — наша поверхность, а \mathbf{P} — то взвешенно-проективное пространство, в котором она содержится, то из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

(где $n=12$ или 6) и из соотношений $H^i(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n))=0$ при $i=1$ и 2 (см. [4], р. 8) следует, что $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$.

Теперь остается вычислить группу $\widehat{\text{Bt}}(X_0)$ для всех поверхностей X , имеющих тип $B, B', C_1, C_2, C_3, C_1', D_1, D_2$ или D' .

В B и B' . Разрешение особенностей имеет вид $f: \bar{X} \rightarrow X$, где \bar{X} — поверхность $C \times \mathbf{P}^1$ с двумя раздутыми точками, а f сжимает две непересекающиеся эллиптические кривые C_1 и C_2 в точки x_1 и x_2 . Обозначим через \mathcal{F}_X пучок $(1 + \mathcal{O}_X \otimes N)^*$, где N — некоторая нильпотентная алгебра. Для вычисления групп $H^2(X, \mathcal{F}_X)$ воспользуемся спектральной последовательностью

$$E_2^{i,j} = H^j(X, R^i f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}) \Rightarrow H^{i+j}(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}). \quad (2)$$

$R^2 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = 0$, так как размерность слоев морфизма $f \leq 1$, а пучок $\mathcal{F}_{\bar{X}}$ «почти когерентен», т. е. имеет фильтрацию с когерентными факторами и даже более того, факторами, изоморфными $\mathcal{O}_{\bar{X}}$.

$R^0 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = \mathcal{F}_X$, так как слои полны и связны, а $R^1 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}$ сосредоточен в точках x_1 и x_2 .

Докажем, что для каждой из точек $x = x_i$, $i=1, 2$, слой пучка $R^1 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}$ изоморфен $\hat{C}(N)$, где $C = C_i$. Нам надо доказать, что гомоморфизм ограничения

$$(R^1 f_* (1 + \mathcal{O}_{\bar{X}} \otimes N)^*)_x \rightarrow H^1(C, (1 + \mathcal{O}_C \otimes N)^*) \quad (3)$$

является изоморфизмом. Пользуясь короткими точными последовательностями, это утверждение легко редуцируется к случаю $N=k$, когда гомоморфизм (3) имеет вид

$$(R^1 f_* \mathcal{O}_{\bar{X}})_x \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Воспользуемся соотношением

$$(R^1 f_* \mathcal{O}_{\bar{X}})_x^{\wedge} \simeq \lim_{\leftarrow} H^1(C, \mathcal{O}_{\bar{X}}/m_x^n) = \lim_{\leftarrow} H^1(C, \mathcal{O}_{\bar{X}}/I^n),$$

где I — пучок идеалов, определяющий C . Мы докажем, что $H^1(C, I^n/I^{n+1})=0$, откуда легко вытекает наше утверждение. Заметим для этого, что I/I^2 определяет конормальное расслоение на C , а I^n/I^{n+1} — его n -ю степень. Так как $(C^2) = -1$, то эти расслоения положительны, а так как C — эллиптическая кривая, то $H^1(C, I^n/I^{n+1})=0$.

Таким образом, второй член спектральной последовательности (2) задается диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & & 0 \\ & \widehat{\text{Pic}}(N)^2 & & 0 & & 0 \\ H^0(X, \mathcal{F}_X) & & H^1(X, \mathcal{F}_X) & & H^2(X, \mathcal{F}_X) & \end{array}$$

и дифференциал d_2 сводится к $d: H^0(X, \widehat{\text{Pic}}_C(N)^2) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}_X)$.

Из структуры пучка \mathcal{F}_X и из того, что $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, следует, что $H^1(X, \mathcal{F}_X) = 0$. Точно так же, из того, что $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$, следует, что $H^2(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = 0$. Наконец,

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = \widehat{\text{Pic}}(N).$$

Таким образом,

$$\text{Ker } d = \widehat{\text{Pic}}(N), \quad \text{Coker } d = 0.$$

Иными словами, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \widehat{\text{Pic}}_C(N) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}_C(N)^2 \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}_X) \rightarrow 0,$$

из которой следует, что $H^2(X, \mathcal{F}_X) = \widehat{\text{Pic}}(N)$.

C_1 — это частный случай ситуации, разобранный в § 2.

C_2 и C_2' приводят к разрешению особенностей $f: \bar{X} \rightarrow X$, где \bar{X} — рациональная поверхность, $\bar{X} \supset C$ — эллиптическая кривая, $f(C) = L$ — рациональная кривая, f определяет двулистное накрытие $C \rightarrow L$ с 4 точками ветвления, а $f: \bar{X} \rightarrow X$ является изоморфизмом. В этом случае слои морфизма f нульмерны и поэтому $R^1 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = R^2 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = 0$.

Второй член спектральной последовательности имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ H^0(X, \mathcal{G}) & H^1(X, \mathcal{G}) & H^2(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

где $\mathcal{G} = R^0 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}$.

Так как поверхность \bar{X} рациональна, то $H^2(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = H^1(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = 0$. Привлекая спектральную последовательность, мы выводим отсюда, что и $H^2(X, \mathcal{G}) = H^1(X, \mathcal{G}) = 0$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Пучок \mathcal{H} сосредоточен на L . Докажем, что его ограничение на L получается из аналогичной точной последовательности:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{H}|_L \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $\mathcal{G}_L = R^0 f_* \mathcal{F}_C$. Рассуждая, как и в предшествующем случае, мы сводим это утверждение к случаю $\bar{N} = \mathbf{k}$, когда оно равносильно тому, что кондуктор накрытия $\bar{X} \rightarrow X$ совпадает с пучком идеалов, определяющих L . Это очевидно, так как локально X определяется уравнением $z^2 = x^2 y$, где $x = 0$ — уравнение L , а $\mathbf{k}[\bar{X}] = \mathbf{k}[X] + \mathbf{k}[X] \frac{z}{x}$.

Из точной последовательности (4) и из того, что $H^1(X, \mathcal{G}) = H^2(X, \mathcal{G}) = 0$, получаем, что $H^1(\bar{X}, \mathcal{H}) \simeq H^2(\bar{X}, \mathcal{F}_X)$. С другой стороны, $H^1(L, \mathcal{F}_L) = H^2(L, \mathcal{F}_L) = 0$, так как кривая L рациональна и из точной делению, $H^1(L, \mathcal{G}_L) \simeq H^1(C, \mathcal{F}_C)$. Соединяя эти равенства, видим, что последовательности (5) следует, что $H^1(L, \mathcal{G}_L) \simeq H^1(L, \mathcal{H}|_L)$. По опре-

$$H^2(X, \mathcal{F}_X) \simeq H^1(X, \mathcal{H}) \simeq H^1(C, \mathcal{F}_C) = \widehat{\text{Pic}}_C(N).$$

Таким образом,

$$\widehat{\text{Br}}_X(N) = \widehat{\text{Pic}}_C(N).$$

C_3 приводит к разрешению особенностей $f: \tilde{X} \rightarrow X$, \tilde{X} гладко и бирационально изоморфно $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — эллиптическая кривая, $\tilde{X} \supset C$, C' — две не пересекающиеся эллиптические кривые, $f(C) = x$, $f(C') = L$ — рациональная кривая, $f: C' \rightarrow L$ — накрытие степени 2 с 4 точками ветвления и $f: \tilde{X} - C - C' \rightarrow X - x - L$ — изоморфизм.

Положим $R^0 f_* \mathcal{F}_{\tilde{X}} = \mathcal{G}$. Второй член спектральной последовательности будет иметь вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N) & 0 & 0 \\ H^0(X, \mathcal{G}) & H^1(X, \mathcal{G}) & H^2(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

и дифференциал d_2 сводится к гомоморфизму $d: \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N) \rightarrow H^2(X, \mathcal{G})$. Аналогично предшествующему случаю, мы имеем точные последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{H}|_L \rightarrow 0,$$

где \mathcal{H} сосредоточен на L и $\mathcal{G}_L = R^0 f_* \mathcal{F}_{C'}$. Как и раньше,

$$H^1(X, \mathcal{H}) = \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N).$$

Кроме того,

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = \widehat{\text{Pic}}_C(N), \quad H^2(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = 0.$$

Докажем, что $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Для этого рассмотрим нормализацию $v: X^v \rightarrow X$. Очевидно, что $\mathcal{G} = R^0 v_* \mathcal{F}_{X^v}$ и

$$H^1(X, \mathcal{G}) \simeq H^1(X^v, \mathcal{F}_{X^v}) \simeq \widehat{\text{Pic}} X^v(N).$$

Но $\widehat{\text{Pic}} X^v = 0$, так как X^v задается уравнением $z^2 = l_1 l_2 l_3 l_4$, а мы проверили, что для таких поверхностей $H^1(X^v, \mathcal{O}_{X^v}) = 0$. Спектральная последовательность показывает теперь, что, ввиду равенства $H^1(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = 0$, гомоморфизм $d = 0$. Ввиду равенства $H^2(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = 0$ отсюда точно так же следует, что и $H^2(X, \mathcal{G}) = 0$. Тогда из точной последовательности (6) вытекает, что $H^2(X, \mathcal{F}_X) \simeq H^1(X, \mathcal{H}) \simeq \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N)$, т. е. $\widehat{\text{B}}\Gamma(X) = \widehat{\text{Pic}}(C')$.

D_1, D_2 и D' . В этих случаях так же можно было бы вычислить группу $\widehat{\text{B}}\Gamma(X)$ для вырожденного слоя и показать, что она имеет даже точно высоту 1. Но еще проще вычислить инвариант Хассе поверхности X и доказать, что он $\neq 0$. Инвариант Хассе $\lambda(X)$ определяется тем, что $\lambda(X) = \alpha^p$, если $C\omega = \alpha\omega$, где ω — базис одномерного пространства $H^0(X, \Omega_X^2)$, а C — оператор Картье. Для двойной плоскости, задаваемой уравнением $z^2 = f(x, y)$, где f — многочлен степени 6, $\omega = z^{-1} dx \wedge dy$. Из равенства

$$\omega = z^{p-1}/z^p \cdot dx \wedge dy = f(x, y)^{\frac{p-1}{2}}/z^p \cdot dx \wedge dy$$

и из определения оператора C легко выводится, что (если степень f равна 6) $\lambda(X)$ есть коэффициент при $x^{p-1}y^{p-1}$ в $f(x, y)^{\frac{p-1}{2}}$. Если записать f в

однородной форме как $F(x_0 : x_1 : x_2)$, то $\lambda(X)$ будет равно коэффициенту при $x_0^{p-1}x_1^{p-1}x_2^{p-1}$ в $F^{\frac{p-1}{2}}$.

В случае D_1 можно положить $h = x_0x_2 + x_1^2$, $g = x_0x_2 + ax_1^2 = h + (a-1)x_1^2$ при $a \neq 1$. Тогда

$$F^{\frac{p-1}{2}} = h^{p-1}(h + (a-1)x_1^2)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Члены, содержащие h во втором сомножителе, дадут выражение, делящееся на h^p , которое не может содержать нужного нам члена. Поэтому такой член может содержаться только в

$$(a-1)^{(p-1)/2} h^{p-1} x_1^{p-1} = (x_0x_2 + x_1^2)^{p-1} x_1^{p-1} \cdot (a-1)^{(p-1)/2}.$$

Опять члены, содержащие x_1 из первого сомножителя, будут делиться на x_1^p и не могут содержать нужного члена. В результате мы получаем,

что $\lambda(X) = (a-1)^{\frac{p-1}{2}} \neq 0$, так как $a \neq 1$.

В случае D_2 можно взять прямые l_i за оси координат и тогда мы получим

$$F^{\frac{p-1}{2}} = x_0^{p-1}x_1^{p-1}x_2^{p-1},$$

т. е. $\lambda(X) = 1$.

В случае D' вычисление аналогично. Надо только воспользоваться выражением инварианта Хассе для эллиптической поверхности. Это вычисление приведено в [15]. Теорема доказана.

Аналогично § 2 получаем

Следствие. Пусть X/S — семейство поверхностей типа КЗ степени 2 над полем характеристики $p > 3$. Если общий слой семейства имеет высоту > 2 , то семейство не вырождается.

Тем самым другим образом доказан основной результат заметки [16].

§ 6. Суперсингулярные поверхности

Поверхность типа КЗ называется суперсингулярной, если все ее двумерные циклы алгебраичны, т. е. ее число Пикара ρ равно 22. Такие поверхности существуют, конечно, только над полями характеристики $p > 0$. Как показал Артин [1], суперсингулярная поверхность X типа КЗ имеет бесконечную высоту, т. е. ее группа $\widehat{\text{Br}}(X)$ унипотентна. (В работе [1] Артин называет суперсингулярной поверхность бесконечной высоты, но нам, по чисто техническим причинам, удобнее пользоваться другой терминологией.)

ТЕОРЕМА 3. Семейство X/S поверхностей типа КЗ, определенное над полем характеристики $p > 3$, общий слой которого суперсингулярен, не вырождается.

Чтобы свести это утверждение к теореме, достаточно доказать, что суперсингулярная поверхность X типа КЗ имеет степень 2. Это означает, что ее решетка Пикара $S(X)$ представляет 2. Все возможные типы решетки Пикара для суперсингулярных поверхностей типа КЗ перечислены в работе [14]. Из приведенного там списка видно, что решетка $S(X)$

либо представляет решетку U , соответствующую квадратичной форме $2x_1x_2$, в этом случае $S(X)$ очевидно представляет 2, а поверхность X является эллиптической, либо представляет решетку $H_p \oplus U(p)$, где H_p — четная решетка ранга 4 и дискриминанта $-p^2$, а $U(p)$ соответствует квадратичной форме $2px_1x_2$. В последнем случае нам достаточно проверить, что H_p представляет все целые числа по модулю p . Это очевидно, так как ранг H_p по модулю p равен 2, а форма ранга 2 над полем \mathbb{F}_p представляет все элементы из \mathbb{F}_p^* .

Как известно, из теоремы 3 вытекает, что для отображения периодов суперсингулярных поверхностей типа $K3$, введенного Огасом [11], имеет место аналог теоремы Торелли и что каждая точка пространства периодов соответствует некоторой поверхности.

В заключение приведем одно применение теоремы 2, связывающее понятие суперсингулярности с высотой поверхности типа $K3$. В работе [1] Артин доказал, что из унипотентности группы $\widehat{\text{Br}}(X)$ вытекает суперсингулярность поверхности X , если предположить, что X эллиптика. Он обратил внимание на естественный вопрос о том, верно ли это утверждение в общем случае. Мы можем ответить на него для случая поверхностей степени 2 (и, конечно, характеристика $p > 3$).

ТЕОРЕМА 4. *Если высота поверхности X типа $K3$ степени 2, определенной над полем характеристики $p > 3$, бесконечна, то поверхность X суперсингулярна.*

Мы воспользуемся двумя результатами Артина, доказанными в [1]. Во-первых, уже сформулированным утверждением, что эллиптическая поверхность типа X бесконечной высоты суперсингулярна, во-вторых, тем, что для гладкого семейства X/S поверхностей типа $K3$ бесконечной высоты со связной базой S число Пикара слоя постоянно. В частности, если один из слоев суперсингулярен, то это верно для всех.

Пусть X_0 — поверхность типа $K3$ степени 2 и бесконечной высоты. Если X_0 эллиптика, то она суперсингулярна ввиду цитированного выше результата. Таким образом, можно предполагать, что X_0 — двойная плоскость. Если она имеет особые точки (двойные рациональные), то она тоже эллиптика. Действительно, в этом случае среди кривых, получающихся при разрешении особых точек, существует кривая C с $(C^2) = -2$. С другой стороны, если D — прообраз прямой на плоскости, которую X_0 двулистно накрывает, то $(D^2) = 2$, $(C \cdot D) = 0$. Поэтому решетка Пикара поверхности X_0 представляет квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_2^2$, а значит, представляет 0. Отсюда следует, что поверхность X_0 эллиптическая [12].

Окончательно, мы можем считать, что X_0 — гладкая двойная плоскость. Рассмотрим, как и в § 3, проективное пространство \mathbb{P} кривых степени 6 и в нем аффинное открытое множество U , соответствующее гладким кривым. Пусть $x_0 \in U$ — точка, соответствующая поверхности X_0 . Так как U аффинно, то фактор $\Sigma = U/\text{PGL}(2)$ тоже аффинен. Обозначим через y_0 образ x_0 в Σ . Условие того, что высота поверхности $\geq h$, выделяет как в \mathbb{P} , так и в Σ , замкнутое подмногообразие коразмерности 1. Так как высота уже бесконечна, если она больше 10, а $\dim \Sigma = 19$, то через x_0 проходит гладкая замкнутая кривая D , все точки которой соответствуют поверхностям бесконечной высоты, а образ ее в Σ одномерен. Применим теперь теорему 3. Из нее следует, что у кривой D существует такое накрытие, являющееся открытием множества в полной кривой C ,

что прообраз естественного семейства, определенного на D (ввиду вложения $D \subset \mathbb{F}$), является на C невырождающимся семейством поверхностей степени 2. Если слой, расположенный хоть над одной точкой $c \in C$, является эллиптической поверхностью (в частности, особой двойной плоскостью), то, ввиду цитированных выше результатов Артина, поверхность X_0 суперсингулярна. Если же все эти слои являются гладкими двойными плоскостями, то определен морфизм $C \rightarrow \Sigma$, образ которого содержит образ D . Так как C полна, а Σ аффинно, то этот образ должен быть точкой, что противоречит тому, что образ D одномерен. Это противоречие доказывает теорему.

Литература

1. Artin M. Supersingular K3 surfaces.— Ann. Sci. l'Ecole normale superieure, 1974, 4-e ser., t. 7, fasc. 4, p. 543—567.
2. Artin M. Algebraic construction of Brieskorn's resolutions.— J. of Algebra, 1974, v. 29, № 2, p. 330—348.
3. Artin M., Mazur B. Formal groups, arising from algebraic varieties.— Ann. Sci. l'Ecole normale superieure, 1977, 4-e ser., t. 10, fasc. 1, p. 87—131.
4. Dolgachev I. Weighted Projective Varieties. Preprint, 1978.
5. Grothendieck A. (en collaboration avec J. Diendonné). Elements de geometrie algebrique. I.— Inst. des Hautes Et Sc. Publ. Math., 1960, № 4.
6. Horikawa E. Surjectivity of the Period Map of K3 Surfaces of Degree 2.— Math. Ann., 1977, V. 228, N. 2, p. 113—146.
7. Куликов В. С. Вырождения K3 поверхностей.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, № 5, с. 1008—1042.
8. Манин Ю. И. Теория коммутативных формальных групп над полями конечной характеристики.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 6, с. 3—90.
9. Mumford D. Geometric invariant theory. Berlin, 1965.
10. Mumford D. Stability of projective varieties.— l'Enseignement Mathematique, 1977, II-e ser., t. XXIII, fasc. 1—2, p. 39—110.
11. Ogus A. Supersingular K3 crystals. Paris: Asterisque, 1979, № 64, p. 3—86.
12. Пятецкий-Шапиро и Шафаревич И. Р. Аналог теоремы Торелли для алгебраических поверхностей типа K3.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971, т. 35, № 3, с. 530—572.
13. Raynaud M. «p-torsion» du schéma de Picard. Paris: Asterisque, 1979, 63, № 2, p. 87—148.
14. Рудаков А. Н. и Шафаревич И. Р. Суперсингулярные поверхности типа K3 над полями характеристики 2.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 4, с. 843—869.
15. Рудаков А. Н. и Шафаревич И. Р. О вырождении поверхностей типа K3 над полями конечной характеристики.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 3, с. 646—661.
16. Рудаков А. Н. и Шафаревич И. Р. О вырождении поверхностей типа K3.— Докл. АН СССР, 1981, т. 259, № 5, с. 1050—1052.
17. Schlessinger M. Functors on Artin Rings.— Trans. Amer. Math. Soc., 1968, v. 130, p. 205—222.
18. Shah J. A complete moduli space for K3 surfaces of degree 2.— Ann. Math., 1980, v. 112, p. 480—510.

Поступила в редакцию
3.VIII.1981