



Общероссийский математический портал

В. Н. Кокарев, О кривизне кэлеровых многообразий с нулевым тензором Риччи, *Матем. заметки*, 2019, том 105, выпуск 4, 537–544

DOI: 10.4213/mzm12002

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

26 января 2025 г., 01:54:47





О кривизне кэлеровых многообразий с нулевым тензором Риччи

В. Н. Кокарев

В работе исследуется поведение модуля тензора кривизны и голоморфной секционной кривизны на Риччи-плоских кэлеровых многообразиях.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: Риччи-плоское многообразие, тензор кривизны.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm12002>

1. Введение. В настоящей статье подробно доказываются результаты, анонсированные в [1].

Пусть M – кэлерово многообразие с кэлеровой метрикой g нулевой кривизны Риччи. Тогда метрику g называют *Риччи-плоской кэлеровой метрикой*, а многообразие M – *Риччи-плоским многообразием*. По теореме Яу [2] на компактном кэлеровом многообразии M с $c_1(M) = 0$ существует Риччи-плоская кэлерова метрика. Однако теорема Яу – теорема существования – не позволяет получить эту метрику в явном виде. Исследование же свойств таких метрик является важной задачей геометрии.

В работе изучается поведение секционной кривизны и модуля тензора кэлеровой кривизны. Полученные результаты применимы к Риччи-плоским кэлеровым метрикам на компактных и некомпактных многообразиях.

Используемый в статье метод – вычисление и оценка лапласиана от геометрических объектов, важных для изучаемого вопроса, – стандартный метод римановой геометрии [3], [4].

2. Основные соотношения. Пусть n – комплексная размерность многообразия M . Греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ будут принимать значения $1, 2, \dots, n$; индексы, обозначенные большими латинскими буквами A, B, \dots , будут принимать значения $1, 2, \dots, n, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$. Для функции f пусть

$$\Delta f = g^{\alpha\bar{\beta}} f_{,\alpha\bar{\beta}}, \quad \text{grad}^2 f = g^{\alpha\bar{\beta}} f_{,\alpha} f_{,\bar{\beta}},$$

где (\cdot, \cdot) означает ковариантное дифференцирование. Оператор Δ и grad^2 с точностью до коэффициента ($= 1/4$) совпадают с оператором Лапласа–Бельтрами и квадратом градиента римановой метрики, полученной из кэлеровой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00154а).

С помощью тензора кривизны $K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$ можно построить инварианты

$$|K|^2 = g^{\alpha\bar{\lambda}} g^{\mu\bar{\beta}} g^{\gamma\bar{\nu}} g^{\varepsilon\bar{\delta}} K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \overline{K_{\lambda\bar{\mu}\nu\bar{\varepsilon}}} = g^{\alpha\bar{\lambda}} g^{\mu\bar{\beta}} g^{\gamma\bar{\nu}} g^{\varepsilon\bar{\delta}} K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} K_{\lambda\bar{\mu}\nu\bar{\varepsilon}} = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}},$$

$$T_1 = K_{\dots\gamma\bar{\delta}}^{\alpha\bar{\beta}} K_{\dots\varepsilon\bar{\lambda}}^{\gamma\bar{\delta}} K_{\dots\alpha\bar{\beta}}^{\varepsilon\bar{\lambda}}$$

(сворачиваются пары индексов разных типов, стоящие на одном уровне),

$$T_2 = K_{\alpha\cdot\gamma\cdot}^{\cdot\beta\cdot\delta} K_{\delta\cdot\cdot\beta}^{\cdot\varepsilon\lambda\cdot} K_{\cdot\varepsilon\cdot\lambda}^{\alpha\cdot\gamma\cdot}$$

(сворачиваются пары индексов одного типа, стоящие на одном уровне).

Инвариант $|K|^2$, очевидно, вещественный.

Используя симметрии, антисимметрии тензора кривизны и правило суммирования $a_\alpha b^\alpha = a^{\bar{\alpha}} b_{\bar{\alpha}}$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{T_1} &= K_{\dots\bar{\gamma}\delta}^{\bar{\alpha}\beta} K_{\dots\bar{\varepsilon}\lambda}^{\bar{\gamma}\delta} K_{\dots\bar{\alpha}\beta}^{\bar{\varepsilon}\lambda} = K_{\dots\delta\bar{\gamma}}^{\beta\bar{\alpha}} K_{\dots\lambda\bar{\varepsilon}}^{\delta\bar{\gamma}} K_{\dots\beta\bar{\alpha}}^{\lambda\bar{\varepsilon}} = T_1, \\ \overline{T_2} &= K_{\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}\cdot}^{\bar{\beta}\cdot\delta} K_{\delta\cdot\cdot\beta}^{\bar{\varepsilon}\lambda\cdot} K_{\cdot\varepsilon\cdot\lambda}^{\bar{\alpha}\cdot\gamma\cdot} = K_{\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}\cdot}^{\bar{\beta}\cdot\delta} K_{\delta\varepsilon\lambda\beta} K_{\bar{\alpha}\varepsilon\gamma\lambda} \\ &= K_{\bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}\cdot}^{\bar{\beta}\cdot\delta} K_{\lambda\bar{\beta}\delta\varepsilon} K_{\bar{\alpha}\varepsilon\gamma\lambda} = K_{\cdot\beta\cdot\delta}^{\alpha\cdot\gamma\cdot} K_{\lambda\cdot\cdot\varepsilon}^{\cdot\beta\delta\cdot} K_{\alpha\cdot\gamma\cdot}^{\cdot\varepsilon\lambda\cdot} = T_2. \end{aligned}$$

Следовательно, T_1, T_2 тоже вещественные.

Обозначим $|K| = \sqrt{|K|^2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Для Риччи-плоской кэлеровой метрики при $|K|^2 \neq 0$ выполнено неравенство*

$$\Delta(|K|^2) \geq -6|K|^3 + \frac{(\text{grad } |K|^2)^2}{2|K|^2}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для кэлеровой метрики g локально существует вещественная функция w такая, что $g_{\alpha\bar{\beta}} = \partial^2 w / (\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta)$. Для удобства обозначаем

$$w_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \quad w_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = \frac{\partial^3 w}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta \partial z^\gamma}, \quad \dots$$

и т.д. Эти величины, за исключением первой, вообще говоря, не являются координатами тензоров.

Для координат тензора кривизны $K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$ имеет место формула

$$K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = w_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} - g^{\bar{\varepsilon}\tau} w_{\bar{\varepsilon}\alpha\gamma} w_{\tau\bar{\beta}\bar{\delta}}$$

[5; гл. 9, § 5, (28)]. Отсюда следует симметрия $K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$ по первому, третьему индексам α, γ и по второму, четвертому индексам $\bar{\beta}, \bar{\delta}$.

С учетом $\Gamma_{\gamma\alpha}^\pi = w_{\gamma\alpha\bar{\nu}} g^{\bar{\nu}\pi}$, $\partial g^{\alpha\bar{\beta}} / \partial z^\lambda = -\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g^{\bar{\beta}\mu}$ вычислим ковариантную производную тензора кривизны:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\lambda} &= w_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}\lambda} - w_{\alpha\gamma\lambda\bar{\varepsilon}} w_{\bar{\beta}\bar{\delta}\tau} g^{\bar{\varepsilon}\tau} - w_{\alpha\gamma\bar{\varepsilon}} w_{\bar{\beta}\bar{\delta}\tau\lambda} g^{\bar{\varepsilon}\tau} + w_{\alpha\gamma\bar{\varepsilon}} w_{\bar{\beta}\bar{\delta}\tau} w_{\mu\bar{\nu}\lambda} g^{\bar{\nu}\tau} g^{\bar{\varepsilon}\mu} \\ &\quad - (w_{\pi\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} - w_{\pi\gamma\bar{\varepsilon}} w_{\bar{\beta}\bar{\delta}\tau} g^{\bar{\varepsilon}\tau}) \Gamma_{\alpha\lambda}^\pi - (w_{\alpha\bar{\beta}\pi\bar{\delta}} - w_{\alpha\pi\bar{\varepsilon}} w_{\bar{\beta}\bar{\delta}\tau} g^{\bar{\varepsilon}\tau}) w_{\gamma\lambda\bar{\nu}} g^{\bar{\nu}\pi}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем симметричность по α, λ . Следовательно,

$$K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\lambda} = K_{\lambda\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\alpha} = K_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\delta},\gamma} \quad (2)$$

Так как $K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\mu}} = \overline{K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\mu}} = \overline{K_{\beta\bar{\alpha}\delta\bar{\gamma},\mu}}$, то имеется симметрия по $\bar{\beta}, \bar{\delta}, \bar{\mu}$:

$$K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\mu}} = K_{\alpha\bar{\mu}\gamma\bar{\delta},\bar{\beta}} = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\mu},\bar{\delta}}. \tag{3}$$

Далее, вычисляя $\Delta(|K|^2) = g^{\lambda\bar{\varepsilon}}(K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}})_{,\lambda\bar{\varepsilon}}$, получаем

$$\Delta(|K|^2) = g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\lambda\bar{\varepsilon}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} + g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta,\lambda\bar{\varepsilon}} + K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},A}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},A}. \tag{4}$$

Для первого слагаемого в правой части (4) с учетом (2), (3) и того, что координаты тензора Риччи $K_{\alpha\bar{\delta}} = K_{\gamma\bar{\omega}} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\lambda\bar{\varepsilon}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} &= g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\delta},\gamma\bar{\varepsilon}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \\ &= g^{\lambda\bar{\varepsilon}} (K_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\delta},\bar{\varepsilon}\gamma} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\omega} \cdot K_{\omega\bar{\beta}\lambda\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\nu}} \cdot K_{\alpha\bar{\nu}\lambda\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\lambda} \cdot K_{\alpha\bar{\beta}\omega\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\delta}} \cdot K_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\nu}})K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \\ &= g^{\lambda\bar{\varepsilon}} (K_{\alpha\bar{\varepsilon}\lambda\bar{\delta},\bar{\beta}\gamma} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\omega} \cdot K_{\omega\bar{\beta}\lambda\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\nu}} \cdot K_{\alpha\bar{\nu}\lambda\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}\omega\lambda} \cdot K_{\alpha\bar{\beta}}^{\cdot\cdot\bar{\omega}} \cdot \bar{\delta} + K_{\gamma\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\nu}} \cdot K_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\nu}})K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \\ &= K_{\alpha\bar{\delta},\bar{\beta}\gamma}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\cdot}\cdot\alpha}^{\cdot\lambda\omega} \cdot K_{\omega\cdot\lambda}^{\cdot\beta\cdot\delta} K_{\cdot\beta\cdot\delta}^{\alpha\cdot\gamma} + K_{\gamma\bar{\cdot}\cdot\bar{\beta}}^{\cdot\lambda\bar{\nu}} \cdot K_{\alpha\bar{\nu}\lambda\bar{\delta}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \\ &\quad + K_{\gamma\bar{\omega}}K_{\alpha\bar{\beta}}^{\cdot\cdot\bar{\omega}} \cdot K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} + K_{\gamma\bar{\cdot}\cdot\bar{\delta}}^{\cdot\lambda\bar{\nu}} \cdot K_{\alpha\bar{\beta}\lambda\bar{\nu}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \\ &= -2T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Аналогично, для второго слагаемого в правой части (4) получаем

$$\begin{aligned} g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta,\lambda\bar{\varepsilon}} &= g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\lambda,\delta\bar{\varepsilon}} \\ &= g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta} (K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\lambda,\bar{\varepsilon}\delta} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\nu}} \cdot K_{\bar{\nu}\beta\bar{\gamma}\lambda} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\omega} \cdot K_{\bar{\alpha}\omega\bar{\gamma}\lambda} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\gamma}} \cdot K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\nu}\lambda} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\lambda} \cdot K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\omega}) \\ &= g^{\lambda\bar{\varepsilon}} K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta} (K_{\bar{\varepsilon}\beta\bar{\gamma}\lambda,\bar{\alpha}\delta} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\nu}} \cdot K_{\bar{\nu}\beta\bar{\gamma}\lambda} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\omega} \cdot K_{\bar{\alpha}\omega\bar{\gamma}\lambda} + K_{\delta\bar{\varepsilon}}^{\cdot\cdot\bar{\gamma}} \cdot K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\nu}\lambda} + K_{\delta\bar{\varepsilon}\omega\lambda}K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}^{\cdot\cdot\bar{\omega}}) \\ &= K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\beta\bar{\gamma},\bar{\alpha}\delta} + K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\delta\bar{\varepsilon}\bar{\nu}\bar{\alpha}}K_{\cdot\beta\bar{\gamma}}^{\cdot\cdot\bar{\varepsilon}} + K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\delta\bar{\varepsilon}\omega\beta}K_{\bar{\alpha}}^{\cdot\cdot\bar{\omega}} \cdot \bar{\gamma} \\ &\quad + K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\delta\bar{\varepsilon}\bar{\nu}\bar{\gamma}}K_{\bar{\alpha}\beta}^{\cdot\cdot\bar{\nu}\bar{\varepsilon}} + K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\delta\bar{\omega}}K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}^{\cdot\cdot\bar{\omega}} \\ &= -2T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta(|K|^2) = -4T_1 + 2T_2 + K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},A}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},A}. \tag{5}$$

Далее, используя $K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = -K_{\bar{\beta}\alpha\gamma\bar{\delta}} = -K_{\alpha\bar{\beta}\delta\bar{\gamma}}$ и переставляя α с ω , β с ν , γ с ρ , δ с ε , получаем

$$\begin{aligned} \text{grad}^2(|K|^2) &= g^{\mu\bar{\lambda}}(|K|^2)_{,\mu}(|K|^2)_{,\bar{\lambda}} \\ &= g^{\mu\bar{\lambda}}(K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\mu}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} + K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}_{,\mu})(K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}K^{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}} + K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}}K^{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}}_{,\bar{\lambda}}) \\ &= (K^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta,\bar{\lambda}}K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta} + K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\lambda}})(K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}K^{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}} + K^{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon}}K_{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}) \\ &= 2K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\lambda}}2K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}K^{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}} = 4K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}}K^{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\lambda}}K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}. \end{aligned}$$

Введем тензор A с координатами

$$A_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta\bar{\lambda}\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}} = K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta,\bar{\lambda}}K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon}} - K_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}K_{\omega\bar{\nu}\rho\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\lambda}\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon}} A^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\lambda}\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon}} \\ &= (K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K_{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon}} - K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} K_{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}) (K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon}} - K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} K^{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}) \\ &= 2|K|^2 K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} - 2K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} K_{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon}} K^{\bar{\omega}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\varepsilon},\bar{\lambda}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} = \frac{1}{|K|^2} \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \text{grad}^2(|K|^2) \right). \quad (6)$$

Так как

$$\begin{aligned} K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} &= K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\lambda} K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\lambda}, \\ K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta},\bar{\lambda}} &= K_{\beta\bar{\alpha}\delta\bar{\gamma},\bar{\lambda}} K^{\beta\bar{\alpha}\delta\bar{\gamma},\bar{\lambda}} = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\lambda}} K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},\bar{\lambda}}, \end{aligned}$$

то (6) можно переписать в виде

$$K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},A} K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta},A} = \frac{1}{|K|^2} \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \text{grad}^2(|K|^2) \right).$$

Подставляя в (5), получаем

$$\Delta(|K|^2) = -4T_1 + 2T_2 + \frac{1}{|K|^2} \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \text{grad}^2(|K|^2) \right). \quad (7)$$

Теперь оценим $|T_1|$ через $|K|$. Следуя замечанию Бессе [6; гл. 2, § С], рассмотрим тензор кривизны как поле симметрических эндоморфизмов $\wedge^{1,1}M$. Они задаются симметричной матрицей \mathcal{A} с элементами $\mathcal{A}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} = K_{\dots\gamma\bar{\delta}}^{\alpha\bar{\beta}}$, где $\mathbf{a} = (\alpha\bar{\beta})$, $\mathbf{b} = (\gamma\bar{\delta})$. Тогда

$$|K|^2 = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = K_{\dots\gamma\bar{\delta}}^{\alpha\bar{\beta}} K^{\gamma\bar{\delta}}_{\dots\alpha\bar{\beta}} = \mathcal{A}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \mathcal{A}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \text{Sp } \mathcal{A}^2.$$

Аналогично, $T_1 = \text{Sp } \mathcal{A}^3$. Отсюда легко получаем

$$|T_1| \leq |K|^3. \quad (8)$$

Чтобы оценить $|T_2|$, рассмотрим поле эндоморфизмов $\wedge^{2,0}M$ с матрицей

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}}) = (K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^{\beta\bar{\delta}\alpha\bar{\gamma}}), \quad \text{где } \mathbf{a} = (\beta\bar{\delta}), \quad \mathbf{b} = (\alpha\bar{\gamma}).$$

Тогда $T_2 = \text{Sp } \mathcal{B}^3$. При этом

$$\text{Sp } \mathcal{B}^2 = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^{\beta\bar{\delta}\alpha\bar{\gamma}} K_{\beta\bar{\delta}\alpha\bar{\gamma}}^{\alpha\bar{\gamma}\beta\bar{\delta}} = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} K^{\beta\bar{\delta}\alpha\bar{\gamma}} = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = |K|^2.$$

Отсюда получаем

$$|T_2| \leq |K|^3. \quad (9)$$

Из (7)–(9) с учетом $|A|^2 \geq 0$ получаем (1). Теорема 1 доказана.

Неравенство, аналогичное (1), с невычисленными явно коэффициентами и содержащее ковариантную производную тензора кривизны, имеется в [7; с. 334].

Получим еще одну оценку. Пусть $K_\sigma(x)$ – голоморфная секционная кривизна в точке $x \in M$ в направлении голоморфной 2-плоскости σ , т.е. 2-плоскости, инвариантной относительно комплексной структуры J . Обозначим

$$H(x) = \max_{\sigma=J(\sigma)} |K_\sigma(x)|,$$

где максимум берется по всем голоморфным 2-плоскостям в касательном пространстве $T_x M$.

Всякая форма типа $(1, 1)$ из $\wedge^{1,1} M$ является J -инвариантной относительно комплексной структуры J . Так как имеется отождествление с помощью метрики g расслоений TM и TM^* (подъем и опускание индексов), то всякой форме типа $(1, 1)$ из $\wedge^{1,1} M$ соответствует бивектор, определяющий J -инвариантную 2-плоскость σ . Значит, значение квадратичной формы с матрицей A можно отождествить с голоморфной секционной кривизной в направлении σ . Из экстремальных свойств квадратичной формы получаем

$$H(x) = \max_{\alpha} |\lambda_{\alpha}(x)|,$$

где $\lambda_{\alpha}(x)$ – собственные значения матрицы A в точке x .

Так как $|K|^2 = \text{Sp} A^2$ и α принимает n^2 значений, то

$$\frac{|K|^2}{n^2} \leq H^2 \leq |K|^2. \quad (10)$$

3. Следствия из основных соотношений.

ТЕОРЕМА 2. *Многообразие Калаби–Яу является комплексным тором тогда и только тогда, когда для его метрики Калаби–Яу выполнено $T_1 = T_2 = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на многообразии Калаби–Яу (M, g) метрика g является Риччи-плоской. Если $T_1 = T_2 = 0$, то из (5) получаем

$$\Delta(|K|^2) = K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}, A} K^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}, A} \geq 0.$$

Отсюда в силу компактности многообразия M получаем, что функция $|K|^2$ является константой, следовательно, все ковариантные производные $K_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}, A} = 0$. Значит, M – локально симметрическое пространство, тогда его универсальная накрывающая является симметрическим пространством [6; теорема 10.72]. Риманово симметрическое пространство однородно [6; предложение 7.65]. Однородное Риччи-плоское многообразие является плоским [6; теорема 7.61]. Значит, M имеет плоскую метрику и по [8], [9] является комплексным тором. Теорема доказана.

Теперь применим теорему 1 для изучения поведения кривизн на Риччи-плоских кэлеровых многообразиях. Пусть M – Риччи-плоское кэлерово многообразие (не обязательно компактное). Пусть в некоторой области $D \subset M$ для функции f выполняется неравенство

$$\Delta f \leq -6f^{3/2} + \frac{\text{grad}^2 f}{2f}. \quad (11)$$

Вычитая почленно из неравенства (11) неравенство (1), получаем

$$\Delta(f - |K|^2) \leq -6(f^{3/2} - |K|^3) + \frac{\text{grad}^2 f}{2f} - \frac{\text{grad}^2 |K|^2}{2|K|^2}.$$

Значит, функция $f - |K|^2$ не может в области D достигать положительного минимума. Действительно, в точке минимума $\text{grad}(f - |K|^2) = 0$; следовательно, $\text{grad} f = \text{grad} |K|^2$ и $\text{grad}^2 f = \text{grad}^2 |K|^2$. Тогда из $f > |K|^2$, $f^{3/2} - |K|^3 > 0$ получаем, что в точке положительного минимума $\Delta(f - |K|^2) < 0$. Противоречие с тем, что в точке минимума $\Delta(f - |K|^2) \geq 0$.

Теперь построим функции для сравнения.

Пусть $O \in M$, $r(x)$ – расстояние от точки O до точки x . Если x^i – вещественные координаты в окрестности точки x , то сужение $r_{,ij}$ на сферу с центром O будет второй квадратичной формой этой сферы. Из [10; п. 11.8] следует, что форма $r_{,ij}(x)$ положительно определенная, если шар $B(O, \delta)$ с центром в точке O радиуса $\delta = r(x)$ является строго локально выпуклым. В этом случае значение оператора Лапласа–Бельтрами от $r(x)$ будет положительным, значит, $\Delta r(x) > 0$.

Пусть $y(t)$ – решение дифференциального неравенства

$$y'' \leq -24y^{3/2} + \frac{y'^2}{2y}, \quad (12)$$

для $t \geq 0$, которое удовлетворяет условиям

$$y(0) = c_0 > 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(t) \leq 0. \quad (13)$$

Тогда для функции $f(x) = y(r(x))$ получаем

$$\text{grad}^2 f = g^{\alpha\bar{\beta}} f_{,\alpha} f_{,\bar{\beta}} = g^{\alpha\bar{\beta}} y'_{,r,\alpha} y'_{,r,\bar{\beta}} = \frac{1}{4} y'^2.$$

Поэтому

$$\Delta f = \frac{1}{4} y'' + y' \Delta r \leq \frac{1}{4} y'' \leq -6f^{3/2} + \frac{\text{grad}^2 f}{2f}$$

при условии, что рассматриваемая точка лежит в строго локально выпуклом шаре $B(O, \delta)$. Из [10; гл. 11, теорема 13] следует, что шар $B(O, \delta)$ будет строго локально выпуклым при $\delta \leq (\pi/2)(\max_{x,\sigma} K(\sigma))^{-1/2}$, если $\max_{x,\sigma} K(\sigma) > 0$ и при любом δ в противном случае. Здесь $K(\sigma)$ – секционная кривизна в точке x в двумерном направлении $\sigma \in T_x M$, максимум берется по всем точкам $x \in B(O, \delta)$ и всем двумерным плоскостям σ (не обязательно голоморфным).

Построенная функция f в точке O , вообще говоря, не будет иметь класс C^2 . Поэтому неравенство (11) для нее нужно рассматривать в обобщенном смысле, как в работе [11].

Оценим $K(\sigma)$ через $H(x)$. Из [5; примечание 23] получаем

$$K(\sigma) = \frac{1}{32} [3Q(X + JY) + 3Q(X - JY) - Q(X + Y) - Q(X - Y) - 4Q(X) - 4Q(Y)],$$

где X, Y – ортонормированный базис 2-плоскости σ , $Q(Z) = K_{\sigma(Z, JZ)} |Z|^4$, $\sigma(Z, JZ)$ – голоморфная 2-плоскость, натянутая на векторы Z, JZ . Тогда

$$K(\sigma) \leq \frac{1}{32} [3H(x)|X + JY|^4 + 3H(x)|X - JY|^4 + H(x)|X + Y|^4 + H(x)|X - Y|^4 + 4H(x)|X|^4 + 4H(x)|Y|^4].$$

Так как базис X, Y ортонормированный, то $|X + Y| = |X - Y| = \sqrt{2}$. Максимум в правой части последнего неравенства достигается при $|X + JY| = |X - JY| = \sqrt{2}$. Поэтому

$$\max_{x, \sigma} K(\sigma) \leq \frac{5}{4} \max_x H(x).$$

Если O – точка локального максимума функции $|K|$, а $c_0 > |K|^2(O)$, то из (10) радиус шара $B(O, \delta)$ может быть любым числом, не превосходящим $2\pi/(5c_0^{1/2})$.

Наиболее простой функцией, удовлетворяющей (12) является

$$y(t) = c_0 - c_1 t^2, \quad c_1 \geq 12c_0^{3/2}.$$

Наилучшей же функцией будет решение дифференциального уравнения

$$y'' = -24y^{3/2} + \frac{y'^2}{2y}$$

для $0 \leq t \leq 2\pi/5c_0^{1/2}$ с начальными условиями

$$y(0) = c_0 > 0, \quad y'(0) = 0.$$

Легко проверить, что здесь $y'(t) < 0$ при $t > 0$.

Таким образом, функция $|K|^2$ в шаре $B(O, \delta)$, $\delta \leq 2\pi/(5c_0^{1/2})$ не может убывать быстрее функции $f(x) = y(r(x))$, где $y(t)$ – решение неравенства (12). То есть функция $|K|^2$ не может иметь больших “всплесков”.

Для функции $H(x)$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Не существует такого шара $B(O, \delta)$ с центром в точке $O \in M$ радиуса $\delta \leq 2\pi/(5\sqrt{H(O)})$, что для всех внутренних точек $x \in B(O, \delta)$ выполняется $H^2(x) < f(x)$, а для всех граничных точек $y \in \partial B(O, \delta)$*

$$f(O) - H^2(O) \leq f(y) - n^2 H^2(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если такой шар найдется, то он будет строго локально выпуклым. Тогда из (10) получаем

$$f(O) - |K|^2(O) \leq f(y) - |K|^2(y).$$

Значит, функция $f - |K|^2$ достигает положительного минимума внутри шара $B(O, \delta)$, что противоречит предыдущим утверждениям.

Таким образом, функция $H(x)$ также не может иметь слишком больших “всплесков”.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Кокарев, “О кривизне Риччи-плоских кэлеровых многообразий”, *Международная научная конференция “Современная геометрия и ее приложения”*, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2017, 73–75.
- [2] S. T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.

- [3] E. Calabi, “Improper affine hyperspheres of convex type and generalization of a theorem by K. Jörgens”, *Michigan Math. J.*, **5** (1958), 105–126.
- [4] R. S. Hamilton, “Three manifolds with positive Ricci curvature”, *J. Differential Geom.*, **17**:2 (1982), 255–306.
- [5] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 2, Наука, М., 1981.
- [6] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Т. I, II, Мир, М., 1990.
- [7] S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, “On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth”, *Invent. Math.*, **97**:2 (1989), 313–349.
- [8] L. Bieberbach, “Über die Bewegungsgruppen des Euklidischen Räume”, *Math. Ann.*, **70**:3 (1911), 297–336.
- [9] L. Bieberbach, “Über die Bewegungsgruppen des Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich”, *Math. Ann.*, **72**:3 (1912), 400–412.
- [10] Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967.
- [11] E. Calabi, “An extension of E. Hopf’s maximum principle with an application to Riemannian geometry”, *Duke Math. J.*, **25** (1958), 45–56.

В. Н. Кокарев

Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
E-mail: ko1949@yandex.ru

Поступило

19.03.2018

После доработки

11.07.2018

Принято к публикации

27.06.2018