Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2022. Том 63, № 6

УДК 517.51+517.54

НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ ДЛЯ ВЕСА ЯКОБИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Р. Г. Насибуллин

Аннотация. Доказываются новые неравенства типа Харди для весовой функции Якоби. Полученные неравенства содержат дополнительные слагаемые с весовыми функциями, характерными для неравенств Пуанкаре — Фридрихса. Одна из констант в неравенстве является неулучшаемой. Рассматриваются применения полученных неравенств к расширению известных классов однолистных аналитических функций в односвязных областях. Получены условия однолистности в терминах оценки производной Шварца аналитической в единичном круге, во внешности единичного круга и в правой полуплоскости функции.

DOI 10.33048/smzh.2022.63.612

Ключевые слова: неравенство Харди, неравенство Пуанкаре — Фридрихса, дополнительное слагаемое, вес Якоби, аналитическая функция, однолистность, производная Шварца.

1. Введение

Статья посвящена неравенствам, связывающим функцию и ее производную в интегральном соотношении, а именно неравенствам типа Харди и Пуанкаре — Фридрихса. Классическое одномерное неравенство Харди (см., например, [1–5]) для абсолютно непрерывной функции $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ такой, что $u(0) = 0$, $u \not\equiv 0$ и $u' \in L^2(0, +\infty)$, выглядит следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} \frac{u(t)^2}{t^2}\, dt < 4 \int_0^{+\infty} u'(t)^2\, dt.$$

Константа 4 в этом неравенстве точная, хотя не существует экстремальной функции $u \not\equiv 0$, на которой достигается равенство. Данное неравенство можно рассматривать как вложение функционального пространства квадратично интегрируемых функций $L_2(0, +\infty)$ в себя, а точную константу — как норму соответствующего линейного оператора (см., например, [6–9]).

Широкое распространение также получили одномерные и многомерные весовые неравенства типа Харди [1–31]. В статьях [29, 31] получены условия на весовые функции, которые необходимы и достаточны для выполнения соответствующих неравенств. Кроме того, известны неравенства типа Харди с конкретными ядрами, например, имеющими логарифмические особенности [13, 24, 25]. Штрафной логарифмический множитель иногда может компенсировать любое «плохое» поведение границы области [13].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00115).

В. Левин в [26] получил ряд неравенств со степенными особенностями на конечном отрезке. Например, он установил точность константы 4 также в неравенстве

$$\int_0^1 \frac{u^2(t)}{t^2}\,dt < 4\int_0^1 u'^2(t)\,dt \tag{1}$$

для всех абсолютно непрерывных функций $u \not\equiv 0$ таких, что $u(0) = 0$ и $u' \in L^2(0,1)$.

Последнее неравенство интересно сравнить с другим результатом В. Левина из той же статьи [26] для другой весовой функции. Он доказал, что имеет место неравенство

$$\int_0^1 \frac{u^2(t)}{t^2(2-t)^2}\,dt < \int_0^1 u'^2(t)\,dt, \quad u(0) = 0,\ u \not\equiv 0,\ u' \in L^2(0,1). \tag{2}$$

Неравенство (2) является усилением (1), несмотря на то, что константа 4 в (1) оптимальна. Возможность усиления неравенства типа Харди без уменьшения точной константы является отличительной чертой неравенств этого вида.

Заметим, что, применяя (2) к двум функциям $u(t) = g(t-1)$ и $u(t) = g(1-t)$, несложно установить оценку

$$\int_{-1}^1 \frac{g^2(x)}{(1-x^2)^2}\,dx \le \int_{-1}^1 g'^2(x)\,dx, \quad g(-1) = g(1) = 0, \tag{3}$$

уже для весовой функции Якоби $(1-x^2)^{-s}$ при $s = 2$. В данной работе мы отходим от классического определения веса как интегрируемой функции и далее рассматриваем вес Якоби в случае $s \in [0,2]$.

Неравенство Пуанкаре — Фридрихса для того же класса абсолютно непрерывных функций u таких, что $u(-1) = u(1) = 0$ и $u' \in L^2(0,\infty)$, имеет следующий вид:

$$\int_{-1}^1 u^2(t)\,dt \le \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^1 u'^2(t)\,dt. \tag{4}$$

Постоянная $4/\pi^2$ является точной, причем равенство достигается для функции $u(t) = C\sin\frac{\pi t}{2}$ (см., например, [10, 26, 32]).

Интересный и красивый мостик между неравенствами Харди (1) и Пуанкаре — Фридрихса (4) нашли Ф. Г. Авхадиев и Вирс в [10]. Они показали, что для всех непрерывно дифференцируемых функций u таких, что $u(-1) = u(1) = 0$, справедливо точное неравенство

$$\frac{p^2-\nu^2q^2}{4}\int_{-1}^1 \frac{u^2(t)}{\delta(t)^{p+1}}\,dt + \frac{q^2\lambda^2}{4}\int_{-1}^1 \frac{u^2(t)}{\delta(t)^{p+1-q}}\,dt \le \int_{-1}^1 \frac{u'^2(t)}{\delta(t)^{p-1}}\,dt, \tag{5}$$

где $p > 0$, $q > 0$, $\nu \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, $\delta(t) = \max\{t-1; 1-t\} = 1-|t|$ — функция расстояния до границы области и константа λ является решением специального уравнения для функции Бесселя J_ν порядка ν, а именно, следующего уравнения типа Лэмба:

$$pJ_\nu(\lambda) + q\lambda J'_\nu(\lambda) = 0.$$

Константы $(p^2 - \nu^2 q^2)/4$ и $q^2\lambda^2/4$ в этом неравенстве точные. Отметим лишь, что при $\nu > 0$ существует экстремальная функция, на которой достигается равенство, а при $\nu = 0$ Ф. Г. Авхадиев и Вирс построили минимизирующую последовательность, через которую показали точность и недостижимость константы.

Цель статьи — получить аналогичный мостик между неравенствами (3) и (4). Будем исследовать неравенство вида

$$C_{p,q,\nu} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{u^2(t)}{(1-t^2)^{p+1}}\,dt + K_{p,q,\nu} \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{u^2(t)}{(1-t^2)^{p+1-q}}\,dt \le \int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{u'^2(t)}{(1-t^2)^{p-1}}\,dt, \qquad (6)$$

где $\rho \in (0,1]$, а через $C_{p,q,\nu}$ и $K_{p,q,\nu}$ в этом неравенстве обозначены точные константы.

Ясно, что справедливо аналогичное связи между конформным радиусом и функцией расстояния до границы области неравенство $\delta(t) \le 1 - t^2 \le 2\delta(t)$. Используя эту двустороннюю оценку, при $\nu \in [0, p/q]$ и $q \in (0, p+1]$ из (6) несложно получить неравенство Авхадиева — Вирса (5). Следовательно, учитывая точность констант в (5), получаем верхние оценки постоянных

$$C_{p,q,\nu} \le p^2 - \nu^2 q^2 \quad \text{и} \quad K_{p,q,\nu} \le q^2\lambda^2 2^{p-q-3}.$$

В данной статье будет показано, что точная константа $C_{p,q,\nu} = p^2 - \nu^2 q^2$.

Впервые неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми были получены В. Г. Мазьёй [2], и множество работ (см., например, [10, 14–20]) по этой теме последовало после статьи [14]. Актуальность и популярность неравенств типа Харди связана с их широким применением в математике и математической физике. В данной работе рассмотрим применения неравенств Харди для весов Якоби для получения, точнее сказать, расширения, классов однолистных аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций. Геометрическая теория функций, в частности тематика достаточных условий однолистности голоморфных, гармонических или бигармонических функций, очень богата результатами и оригинальными методами доказательства [32–39]. Поэтому лишь упомянем некоторые подходы, которые будем использовать в данной статье.

Пусть $f(z)$ является голоморфной функцией в единичном круге $\mathbb{D}$ за исключением конечного или счетного множества полюсов. Такую функцию называют *мероморфной*. Будем рассматривать способ получения достаточных условий однолистности, основанный на оценке производной Шварца или, как еще часто называют, шварциана функции $f(z)$:

$$S_f(z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

На первый взгляд, достаточно сложно понять, как связаны неравенства Харди для абсолютно непрерывных функций с достаточными условиями однолистности аналитических функций, при этом через оценку модуля производной Шварца. Оказывается, существует связь (см. подробнее [32–36]) однолистности функции f с неколеблемостью решения дифференциального уравнения

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $P(z)$ — некоторая аналитическая функция, а $Q(z)$ находится из соотношения $2Q(z) - P'(z) - P^2(z)/2 = S_f(z)$. Именно эта связь с неколеблемостью решения дифференциального уравнения позволяет объединить два разных объекта: неравенства Харди и достаточные условия однолистности.

Например, в [33] (см. также [34]) приведена следующая теорема, полученная этим методом.

Теорема A. *Мероморфная в* $\mathbb{D}$ *функция* $f(z)$ *однолистна в* $\mathbb{D}$, *если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров* n, a_k *и* μ_k, $k = \overline{1, n}$, *выполняется неравенство*

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k A(\mu_k)}{(1 - |z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причем $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$, $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq 2$, *постоянные В. В. Покорного имеют вид*

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0 \leq \mu \leq 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2. \end{cases}$$

В [37] показано, что при $\mu \in [1, 2]$ в постоянных В. В. Покорного $A(\mu)$ вместо $2^{3-\mu}$ можно взять $2(3-\mu)$. В разд. 4 применим следствия из неравенства (6) для расширения класса однолистных аналитических в круге функций, приведенного в теореме A. А именно, покажем, что при $\mu \in [1, 2]$ постоянную $2^{3-\mu}$ в $A(\mu)$ можно заменить на $P_{2-\mu}$, где

$$P_q = \begin{cases} 1 & \text{при } q = 0, \\ \lambda_q & \text{при } q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & \text{при } q \in (q_0, 1], \\ 2 & \text{при } q = 1 \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ и константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения типа Лэмба:

$$-q^2\lambda^2 J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Данная статья устроена следующим образом. В разд. 2 приведены известные и доказаны новые вспомогательные утверждения. Для простоты изложения отдельные участки доказательства основных результатов вынесены и приведены в виде лемм. В разд. 3 получены непосредственно основные результаты, приведены наиболее интересные следствия и рассмотрены некоторые примеры. В разд. 4 описаны подробнее известные результаты из теории однолистных функций. Приведен новый (точнее расширенный) класс однолистных мероморфных функций в круге. Также рассмотрены функции, мероморфные во внешности единичного круга, в произвольной односвязной области и в правой полуплоскости.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть p, q и ν — произвольные положительные числа, отображение $z : [0, 1] \to [0, 1]$ непрерывно дифференцируемо и $z(0) = 0$, $z(1) = 1$. Через J_ν обозначим функцию Бесселя порядка ν, определенную следующим образом:

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k + 1 + \nu)}.$$

В этом разделе рассмотрим некоторые известные свойства и докажем новые необходимые ниже свойства функции $y(t) = z(t)^{p/2} J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})$, где положительная константа λ не превосходит первый положительный корень j_ν функции Бесселя J_ν, при этом λ такая, что $p - q\lambda J_n'(\lambda)/J_\nu(\lambda) \geq K$ для некоторого неотрицательного K.

Лемма 1. *Для функции $y(t)$ при $t \in (0,1]$ справедливы равенства*

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{z'(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}\right),$$

$$\frac{y''(t)}{y(t)} = \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}\right) + \frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + 4(p-1)\frac{y'(t)z(t)}{y(t)z'(t)}\right).$$

Доказательство. Первое равенство легко следует из того, что

$$y'(t) = \frac{z'(t)}{2}(pz(t)^{\frac{p-2}{2}} J_\nu(\lambda z(t)^{q/2}) + q\lambda z(t)^{\frac{p+q-2}{2}} J_\nu'(\lambda z(t)^{q/2})).$$

Для доказательства второго равенства воспользуемся следующим дифференциальным уравнением для функции Бесселя J_ν порядка ν:

$$z^2 J_\nu''(z) + zJ_\nu'(z) + (z^2 - \nu)J_\nu(z) = 0.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\begin{aligned}
y''(t) - &\frac{z''(t)y'(t)}{z'(t)} \\
&= \frac{z'(t)^2}{4}\left(p(p-2)z(t)^{\frac{p-4}{2}} J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}) + \frac{z'(t)^2}{4} pq\lambda z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\right) \\
&+ \frac{z'(t)^2}{4}(q\lambda(p+q-2)z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}) + q^2\lambda^2 z(t)^{\frac{p+2q-4}{2}} J_\nu''(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})) \\
&= \frac{z'(t)^2}{4}(p(p-2)z(t)^{\frac{p-4}{2}} J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}) + q\lambda(2p-2)z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})) \\
&\quad + \frac{z'(t)^2}{4} q^2 z(t)^{\frac{p-4}{2}} (\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}) + \lambda^2 z(t)^q J_\nu''(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})) \\
&= \frac{z'(t)^2}{4}(p(p-2)z(t)^{\frac{p-4}{2}} J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}) + q\lambda(2p-2)z(t)^{\frac{p+q-4}{2}} J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})) \\
&\qquad - \frac{z'(t)^2}{4} q^2 z(t)^{\frac{p-4}{2}} (\lambda^2 z(t)^q - \nu^2) J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{y''(t)}{y(t)} &= \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right) \\
&+ \frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(p^2 - 2p + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + q\lambda(2p-2)z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right) \\
&= \frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)
\end{aligned}$$

$$
+\frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(-p^2+q^2\nu^2-\frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}+2(p-1)\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)\right)
$$

$$
=\frac{z''(t)}{2z(t)}\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)+\frac{z'(t)^2}{4z(t)^2}\left(-p^2+q^2\nu^2-\frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}+4(p-1)\frac{y'(t)z(t)}{y(t)z'(t)}\right),
$$

что доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть* $\rho\in[0,1]$, $p\in(0,+\infty)$ *и* $q\in(0,+\infty)$, *а также* $\nu\geq 0$ *и* $t\in[0,\rho]$. *Если* $z:[0,1]\to[0,1]$ *является непрерывно дифференцируемой, возрастающей и вогнутой функцией, кроме того, удовлетворяет граничным условиям* $z(0)=1$ *и* $z(1)=1$, *то функция* $h(t)=z(t)\frac{y'(t)}{y(t)}$ *убывающая. При этом*

$$
\inf_{t\in[0,\rho]}h(t)=z(\rho)\frac{y(\rho)}{y(\rho)},\qquad \sup_{t\in[0,1]}h(t)=\lim_{t\to0}h(t).
$$

Доказательство. Для доказательства убывания функции проверим, что $h'(t)\leq 0$ при $t\in(0,\rho]$. Непосредственными вычислениями получим

$$
h'(t)=z'(t)\frac{y'(t)}{y(t)}+z(t)\frac{y''(x)}{y(t)}-z(t)\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2=\frac{z'(t)^2}{2z(t)}\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)
$$

$$
-\frac{z'(t)^2}{4z(t)}\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)^2+\frac{z''(t)}{2}\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)
$$

$$
+\frac{z'(t)^2}{4z(t)}\left(-p^2+q^2\nu^2-\frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}}+2(p-1)\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)\right)
$$

$$
=\frac{q^2z'(t)^2}{4z(t)}\left(\nu^2-\lambda^2z^q(t)-\lambda^2z^q(t)\left(\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)^2\right)+\frac{z''(t)}{2}\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right).
$$

Докажем, что два слагаемых в последнем равенстве отрицательны. Для этого рассмотрим функцию (из второго слагаемого)

$$
v(t)=p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})},
$$

производная которой

$$
v'(t)=\frac{q^2z'(t)}{2z(t)}\left(\nu^2-\lambda^2z^q(t)-\lambda^2z^q(t)\left(\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)^2\right)
$$

по знаку совпадает со знаком первого слагаемого и, как покажем ниже, отрицательна. Следовательно, используя определение постоянной λ, получим

$$
p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\geq\inf_{t\in(0,1)}p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}=p+q\lambda\frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}\geq K,
$$

и так как $z''(t)\leq 0$ при $t\in[0,1]$, то

$$
A:=\frac{z''(t)}{2}\left(p+q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}\right)\leq 0.
$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\nu=0$. Имеем

$$
h'(t)=-\frac{q^2z'(t)^2}{4z(t)}\left(\lambda^2z^q(t)+\lambda^2z^q(t)\left(\frac{J'_0(\lambda z(t)^{q/2})}{J_0(\lambda z(t)^{q/2})}\right)^2\right)+A\leq 0.
$$

Случай 2: $\nu > 0$. Ясно, что

$$B := \nu^2 - \lambda^2 z^q(t) - \lambda^2 z^q(t)\left(\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}\right)^2$$

$$= \nu^2\left(1 - \frac{\lambda^2 z^q(t)}{\nu^2} - \frac{\lambda^2 z^q(t)}{\nu^2}\left(\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}\right)^2\right).$$

Пусть теперь $w = \lambda z(t)^{q/2} \in (0, j_n)$. Используя соотношения (см. [40, с. 17])

$$J'_\nu(w) = \frac{J_{\nu-1}(w) - J_{\nu+1}(w)}{2}, \quad J_\nu(z) = \frac{w(J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(w))}{2\nu},$$

имеем

$$B = \nu^2\left(1 - \left(\frac{J_{\nu-1}(w) - J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(w)}\right)^2 - \frac{w^2}{\nu^2}\right)$$

$$= \nu^2\left(\frac{4J_{\nu+1}(w)}{J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(z)} - \frac{4J^2_{\nu+1}(w)}{(J_{\nu-1}(w) + J_{\nu+1}(w))^2} - \frac{w^2}{\nu^2}\right)$$

$$= \nu^2\left(\frac{w^2}{\nu(\nu+1)}\frac{J_\nu(w) + J_{\nu+2}(z)}{J_\nu(w)} - \frac{w^2}{\nu^2}\frac{J^2_{\nu+1}(w)}{J^2_\nu(z)} - \frac{w^2}{\nu^2}\right)$$

$$= w^2\left(\frac{2\nu}{w}\frac{J_{\nu+1}(w)}{J_\nu(w)} - \frac{J^2_{\nu+1}(w)}{J^2_\nu(w)} - 1\right) = w^2\left(-1 + \frac{J_{\nu+1}(w)J_{\nu-1}(w)}{J^2_\nu(w)}\right).$$

Известно, что для функции Бесселя справедливо следующее равенство (см. [40, с. 152]):

$$w^2\big(J^2_{\nu-1}(z) - J_{\nu-2}(z)J_\nu(w)\big) = 4\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+2n)J^2_{\nu+2n}(w).$$

Поэтому

$$B = \frac{w^2}{J^2_\nu(w)}\big(J_{\nu+1}(z)J_{\nu-1}(w) - J^2_\nu(w)\big) = -\frac{4}{wJ^2_\nu(z)}\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+2n+1)J^2_{\nu+2n+1}(w) \le 0.$$

Следовательно, $h'(t) = A + B \le 0$.

Таким образом, функция $h(t)$ убывающая на всем отрезке и, как следствие, супремум достигается в левом конце промежутка $[0,\rho]$, а инфимум — в правом. $\square$

Если положим $z(t) = t(2-t)$, то в условиях леммы 2 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Функция* $h(t) = z(t)\frac{y'(t)}{y(t)}$ *убывает и принимает только положительные значения.*

Доказательство. Имеет место равенство

$$z(t)\frac{y'(t)}{y(t)} = (1-t)\left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}}\frac{J'_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})}\right).$$

Следовательно,

$$\inf_{z\in[0,\rho]} z(t)\frac{y'(t)}{y(t)} = z(\rho)\frac{y'(\rho)}{y(\rho)} \ge z(1)\frac{y'(1)}{y(1)} \ge 0. \quad \square$$

Замечание 1. В [19, 20] авторы использовали аналогичный подход для доказательства убывания соответствующей функции. При $z(t) = t$ и $\rho = 1$ получим утверждение из [19].

3. Основные результаты

Данный раздел посвящен неравенствам для двух видов весовых функций: для веса Якоби и веса, являющегося степенью функции $z(t) = t(2-t)$. Обратим внимание на то, что в оценках для веса Якоби стоит знак строгого неравенства — это является существенным фактом при дальнейшем применении этих неравенств для расширения классов однолистных аналитических функций. Также приведем наиболее интересные, на наш взгляд, следствия, рассмотрим некоторые частные случаи в виде примеров и сравним полученные оценки с известными неравенствами. В конце некоторых пунктов в виде замечаний дадим возможное направление обобщения полученных результатов.

Неравенства на отрезке $[0,\rho]$. В этом пункте рассмотрим неравенства с дополнительными слагаемыми для абсолютно непрерывной функции $u : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ такой, что $u(0) = 0$. Полученные утверждения будем использовать для доказательства неравенств для веса Якоби.

Теорема 1. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $p > 0$, $q > 0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а функция u абсолютно непрерывная и такая, что $u(0) = 0$ и $u'(\cdot)z(\cdot)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}} \in L_1(0,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1}}\,dt + q^2\lambda_0^2 \int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1-q}}\,dt$$

$$+ \left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right) \int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z^p(t)}\,dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ и константа λ_0 находится как решение следующей экстремальной задачи:

$$\sup\left\{\lambda : p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\right\}.$$

Константа $p^2 - q^2\nu^2$ наилучшая из возможных.

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in (0, j_\nu)$, где j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν порядка ν. Используя метод интегрирование по частям, получим

$$A := \int_0^\rho \frac{1}{z(t)^{p-1}} \left(y'(t) - u(t)\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt - \int_0^\rho \frac{y'(t)}{y(t)}\frac{du^2(t)}{z(t)^{p-1}} + \int_0^\rho \frac{f^2(t)}{z(t)^{p-1}}\frac{y'^2(t)}{y^2(t)}\,dt$$

$$= \int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt - \lim_{t\to\rho}\frac{y'(t)}{y(t)}\frac{u^2(t)}{z(t)^{p-1}} + \lim_{t\to 0}\frac{y'(t)}{y(t)}\frac{u^2(x)}{z(t)^{p-1}}$$

$$+ \int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p-1}} \left(\frac{y''(t)}{y(t)} - (p-1)\frac{z'(t)}{z(t)}\frac{y'(t)}{y(t)}\right) dt.$$

Очевидно, что $A = 0$, если $u(t) = y(t) = z(t)^{p/2} J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})$.

Для функции Бесселя порядка ν и ее производной J_ν' известны асимптотические поведения вблизи нуля:

$$J_\nu(t) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \text{ при } t \to 0 \quad \text{и} \quad J_\nu'(t) \to \frac{1}{2\Gamma(\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu-1} \text{ при } t \to 0,$$

которые легко получить, используя разложение функции Бесселя в ряд. Здесь через Γ обозначена гамма-функция Эйлера. Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} z(t) \frac{y'(t)}{y(t)} = \lim_{t\to 0} (1-t) \left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})} \right) = p + \nu q.$$

Применяя неравенство Гёльдера и представление абсолютно непрерывной функции $u(t) = \int_0^t u'(x)\,dx$, имеем

$$u^2(t) \le \left(\int_0^t |u'(x)|\,dx \right)^2 \le \int_0^t z(x)^{p-1}\,dx \int_0^t \frac{|u'(x)|^2}{z(x)^{p-1}}\,dx \le \frac{z(t)^p}{p} \int_0^t \frac{|u'(x)|^2}{z(x)^{p-1}}\,dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to 0} \frac{u^2(t)}{z(t)^{p-1}} \frac{y'(t)}{y(t)} = 0.$$

Используя положительность функции $z(t)y'(t)/y(t)$ при $t \in [0,\rho]$ (см. следствие 1), можно считать, что

$$\lim_{t\to \rho} \frac{y'(t)}{y(t)} \frac{u^2(t)}{z(t)^{p-1}} \ge 0,$$

далее пренебрегаем этим членом.

Принимая во внимание лемму 1, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{y''(t)}{y(t)} - (p-1)\frac{z'(t)}{z(t)}\frac{y'(t)}{y(t)} \\
&\qquad = \frac{z''(t)}{2z(t)} \left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})} \right) - \frac{z'(t)^2}{4z(t)^2} \left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} \right) \\
&\qquad = -\frac{1}{z(t)} \left(p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(t)^{q/2})} \right) - \frac{1-z(t)}{z(t)^2} \left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} \right) \\
&= -\frac{1}{z(t)^2} \left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} \right) - \frac{1}{z(t)} \left(-p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + p + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})} \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt \ge \int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1}} \Bigg(& p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} \\
& + z(t) \left(p - p^2 + q^2\nu^2 - \frac{q^2\lambda^2}{z(t)^{-q}} + q\lambda z(t)^{\frac{q}{2}} \frac{J_\nu'(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})}{J_\nu(\lambda z(t)^{\frac{q}{2}})} \right) \Bigg)\,dt.
\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$h_\lambda(x) := p - p^2 + q^2\nu^2 - q^2\lambda^2 z(x)^q + q\lambda z(x)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu(\lambda z(x)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(x)^{q/2})},$$

которая по лемме 2 убывающая, при этом

$$\inf_{x\in[0,\rho]} h_\lambda(x) = h_\lambda(\rho) > h_\lambda(1) = \left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}\right).$$

Теперь константу λ_0 будем искать как решение следующей экстремальной задачи:

$$\sup\{\lambda : h_\lambda(1) \geq 0\},$$

т. е. λ_0 — это наибольшее положительное число, для которого $h_\lambda(1)$ неотрицателен. Такой выбор λ_0 позволит считать, что второй интеграл положителен. Кроме того, имеем

$$\frac{y'(\rho)}{y(\rho)} = \frac{(1-\rho)}{z(\rho)}\left(p + q\lambda z(\rho)^{\frac{q}{2}} \frac{J'_\nu(\lambda z(\rho)^{q/2})}{J_\nu(\lambda z(\rho)^{q/2})}\right) \geq \frac{(1-\rho)}{z(\rho)}(h_\lambda(1) + p^2 - q^2\nu^2 + q^2\lambda^2) \geq 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt \geq \int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1}}\left(p^2 - q^2\nu^2 + \frac{q^2\lambda_0^2}{z(t)^{-q}}\right)dt + h_\lambda(1)\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z^p(t)}\,dt.$$

Используя известное (см., например, [40]) равенство для функции Бесселя

$$zJ'_\nu(z) = -\nu J_\nu(z) + zJ_{\nu-1}(z),$$

получим константу $h_\lambda(1) = \left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)$ из утверждения теоремы.

Точность константы $p - \nu^2 q^2$ при $p \in (0,1]$ и $q \in (0, p+1]$ следует из сравнения неравенства теоремы 1 с неравенством Авхадиева — Вирса (5). Действительно, из теоремы 1 несложно получить следующую оценку:

$$\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{t^{p-1}}\,dt \geq \frac{p^2 - q^2\nu^2}{4}\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{t^{p+1}}\,dt + \frac{q^2\lambda_0^2}{2^{2-q}}\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{t^{p+1-q}}dt$$
$$+ \frac{1}{2}\left(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{t^p}\,dt$$

с точной константой $(p^2 - q^2\nu^2)/4$, т. е. если в нашем неравенстве константа будет больше чем $p^2 - q^2\nu^2$, то получим противоречие с неулучшаемым неравенством Авхадиева — Вирса. □

Замечание 2. Можно выбирать λ_0 как максимальное число, для которого $h_\lambda(\rho) \geq 0$. При этом константы уже будут зависеть от величины ρ, что характерно для неравенств Пуанкаре — Фридрихса.

При $h_\lambda(1) = 0$ из теоремы 1 получим

Следствие 2. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а функция u абсолютно непрерывная и такая, что $u(0) = 0$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1}}\,dt + q^2\lambda_0^2\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1-q}}\,dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ и константа λ_0 находится как решение следующего уравнения:

$$(p - p^2 + q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2)J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0.$$

Если в неравенстве теоремы 1 перейдем к пределу при $\lambda \to 0$, то получим

Следствие 3. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $p > 0, q > 0$ и $\nu \in [0, p/q]$, а функция u абсолютно непрерывная и такая, что $u(0) = 0$. Тогда*

$$\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{p-1}}\,dt \geq (p^2 - q^2\nu^2)\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p+1}}\,dt + (p - p^2 + q^2\nu^2 + q\nu)\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{p}}\,dt.$$

При $h_\lambda(1) = 0$, $p = 1$, $q = \frac{1}{\nu}$ теорема 1 дает

Следствие 4. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ и $\nu = 1/q$, а функция u абсолютно непрерывная и такая, что $u(0) = 0$ и $u' \in L_2(0,\rho)$. Тогда*

$$\int_0^\rho u'^2(t)\,dt \geq q^2\lambda_0^2\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{2-q}}\,dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ и константа λ_0 находится как решение следующего уравнения:

$$-q^2\lambda^2 J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0.$$

Если $p = \nu$ и $q = 1$, то из следствия 2 имеем

Следствие 5. *Пусть $\rho \in (0,1)$ и $\nu > 0$, а функция u абсолютно непрерывная и такая, что $u(0) = 0$ и $z^{(1-\nu)/2}u' \in L_2(0,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_0^\rho \frac{u'^2(t)}{z(t)^{\nu-1}}\,dt \geq \frac{\lambda_0 J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\int_0^\rho \frac{u^2(t)}{z(t)^{\nu}}\,dt,$$

где $z(t) = t(2-t)$ и константа λ_0 находится как решение следующего уравнения:

$$-q^2\lambda^2 J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0.$$

Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 1. Пусть $p = 1$ и $\nu = 0$. Тогда из следствия 2 при $\rho \to 1$ получим следующее известное неравенство с точной константой:

$$\int_0^1 u'^2(t)\,dt > \int_0^1 \frac{u^2(t)}{t^2(2-t)^2}\,dt.$$

Пример 2. Пусть $p = 1$, $\nu = 1$ и $q = 1$. Тогда из следствия 2 при $\rho \to 1$ получим следующее известное неравенство с точной константой:

$$\int_0^1 u'^2(t)\,dt \geq 2\int_0^1 \frac{u^2(t)}{t(2-t)}\,dt.$$

Неравенства для веса Якоби. Получим неравенства для веса Якоби. Будем рассматривать случай $p = 1$.

Теорема 2. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $q \in (0,2]$ и $\nu \in [0,1/q]$, а функция g абсолютно непрерывная и такая, что $g(-\rho) = g(\rho) = 0$ и $g' \in L_2(-\rho,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt > (1-q^2\nu^2)\int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^2}\,dt + q^2\lambda_0^2 \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\,dt + \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{1-t^2}\,dt,$$

где константа λ_0 находится как решение следующей экстремальной задачи:

$$\sup\left\{\lambda : q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\right\}.$$

Постоянная $1 - q^2\nu^2$ наилучшая из возможных.

Доказательство. При $p = 1$ как следствие теоремы 1 имеем

$$\int_{0}^{\rho} u'^2(t)\,dt \geq (1-q^2\nu^2)\int_{0}^{\rho} \frac{u^2(t)}{z(t)^2}\,dx + q^2\lambda_0^2 \int_{0}^{\rho} \frac{u^2(t)}{z(t)^{2-q}}\,dt + \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{0}^{\rho} \frac{u^2(t)}{z(t)}\,dt.$$

Применяя это неравенство к двум функциям $u(t) = g(t-\rho)$ и $u(t) = g(\rho - t)$, соответственно получим

$$\int_{-\rho}^{0} g'^2(x)\,dx \geq (1-q^2\nu^2)\int_{-\rho}^{0} \frac{g^2(x)}{z(x+\rho)^2}\,dx + q^2\lambda_0^2 \int_{-\rho}^{0} \frac{g^2(x)}{z(x+\rho)^{2-q}}\,dx + \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{-\rho}^{0} \frac{g^2(x)}{z(x+\rho)}\,dx,$$

$$\int_{0}^{\rho} g'^2(x)\,dx \geq (1-q^2\nu^2)\int_{0}^{\rho} \frac{g^2(t)}{z(\rho-x)^2}\,dx + q^2\lambda_0^2 \int_{0}^{\rho} \frac{g^2(x)}{z(\rho-x)^{2-q}}\,dx + \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0 \frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{0}^{\rho} \frac{g^2(x)}{z(\rho-x)}\,dx.$$

Несложно показать, что если $\rho \in (0,1)$ и $x \in [-\rho, 0]$, то

$$z(x+\rho) = (x+\rho)(2-\rho-x) < 1 - x^2,$$

и что если $\rho \in (0,1)$ и $x \in [0,\rho]$, то

$$z(\rho - x) = (\rho - x)(2 - \rho + x) < 1 - x^2.$$

Следовательно,

$$\int_{-\rho}^{0} g'^2(x)\,dx > (1-q^2\nu^2)\int_{-\rho}^{0} \frac{g^2(x)}{(1-x^2)^2}\,dt + q^2\lambda_0^2\int_{-\rho}^{0}\frac{g^2(x)}{(1-x^2)^{2-q}}\,dx + \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{-\rho}^{0}\frac{g^2(x)}{1-x^2}\,dx,$$

$$\int_{0}^{\rho} g'^2(x)\,dx > (1-q^2\nu^2)\int_{0}^{\rho} \frac{g^2(x)}{(1-x^2)^2}\,dx + q^2\lambda_0^2\int_{0}^{\rho}\frac{g^2(x)}{(1-x^2)^{2-q}}\,dx + \left(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda_0^2 + q\lambda_0\frac{J_{\nu-1}(\lambda_0)}{J_\nu(\lambda_0)}\right)\int_{0}^{\rho}\frac{g^2(x)}{1-x^2}\,dx.$$

Суммируя последние два неравенства, получим утверждения теоремы. Точность константы $1-q^2\nu^2$ обосновывается точно так же, как и в теореме 1. $\square$

Замечание 3. Теорему 2 можно обобщить на случай $p\in(0,1]$.

Из теоремы 2 несложно получить

Следствие 6. *Пусть $\rho\in(0,1)$, $q>0$ и $\nu\in[0,1/q]$, а функция g является абсолютно непрерывной такой, что $g(-\rho)=g(\rho)=0$ и $g'\in L_2(-\rho,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt > (1-\nu^2q^2)\int_{-\rho}^{\rho}\frac{g^2(t)}{(1-t^2)^2}\,dt + q^2\lambda_0^2\int_{-\rho}^{\rho}\frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\,dt,$$

где константа λ_0 находится как решение уравнения

$$(q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2)J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0, \quad \lambda\in(0,j_\nu). \tag{7}$$

Следствие 7. *Пусть $\rho\in(0,1)$, $q>0$ и $\nu=1/q$, а функция g абсолютно непрерывная и такая, что $g(-\rho)=g(\rho)=0$ и $g'\in L_2(-\rho,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt > \lambda_q\int_{-\rho}^{\rho}\frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\,dt,$$

где $\lambda_q=q^2\lambda_0^2$, а константа λ_0 находится как решение уравнения

$$-q^2\lambda^2J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0, \quad \lambda\in(0,j_\nu). \tag{8}$$

Сравнение констант. При обосновании достаточных условий однолистности Ф. Г. Авхадиев использовал следующее неравенство для любой абсолютно непрерывной функции:

$$C(q)\int_{-\rho}^{\rho}\frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\,dt < \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt, \quad g(-\rho)=g(\rho)=0,$$

где

$$C(q)=\begin{cases}2^{4-3q}\pi^{2(q-1)}, & q\in[1,2],\\ 2^q, & q\in[0,1].\end{cases}$$

Покажем, что $\lambda_q > C(q)$ при $q\in(0,q_0]$, где q_0 — некоторое положительное число. Для этого в уравнении (8) подставим $\lambda=\frac{2^{q/2}}{q}$. Такое значение можно взять, так как при $\nu=1/q$ имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{2^{q/2}}{q}\le\sqrt{\nu(\nu+2)}<j_\nu,$$

в которой первое неравенство легко проверяется. Подробнее о втором неравенстве см. в [10].

При таком выборе λ получим, что уравнение

$$-2^qJ_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)+2^{q/2}J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)=0$$

имеет решение $q_0\approx 0.5487159937198$ $\left(\approx\frac{\pi^2}{18}\right)$. Следовательно, используя убывания функции $-q^2\lambda^2+q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}$, имеем

$$-2^qJ_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)+2^{q/2}J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)>0$$

при $q\in(0,q_0)$. Таким образом, $\lambda_q>2^q$ при $q\in(0,q_0)$ и $\lambda_{q_0}=2^{q_0}$. Известно, что постоянная Покорного $C(0)=1$ точная, а мы показали, что

$$\lambda_q\ge C(q)$$

при любом $q\in(0,q_0]$. Следовательно, $\lambda_q\to 1$ при $q\to 0$.

Пусть теперь $q\in[q_0,1)$ и $\alpha\in(0,q_0)$. Тогда неравенство Гёльдера и известное неравенство

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho}\frac{g^2(t)}{1-t^2}\,dt<\frac{1}{2}\int\limits_{-\rho}^{\rho}g'^2(t)\,dt$$

дают

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho}\frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\,dt\le\int\limits_{-\rho}^{\rho}\left(\frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-\alpha}}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}}\left(\frac{g^2(t)}{1-t^2}\right)^{\frac{q-\alpha}{1-\alpha}}dt<\lambda_\alpha^{-\frac{1-q}{1-\alpha}}2^{-\frac{q-\alpha}{1-\alpha}}\int\limits_{-\rho}^{\rho}g'^2(t)\,dt,$$

где λ_α — константа неравенства следствия 7 при $\alpha\in(0,q_0)$. Ясно, что $\left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}}2^q$ $>2^q$ при любом фиксированном $q\in[q_0,1)$ и для любого $\alpha\in(0,q_0)$. Непонятно, как найти конкретное $\alpha_0\in(0,q_0)$, для которого постоянная $\left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}}2^q$ будет наибольшей. Если $q\to 1$, то константа в нашем неравенстве будет равна двум.

Замечание 4. Аналогичные рассуждения показывают, что $q^2\lambda_q^2$ больше постоянной Ямашито $(1+q)/2$. А именно, если положим $\lambda_0=\frac{1}{q}\sqrt{\frac{1+q}{2}}$, то получим, что при любом $q\in(0,1]$

$$-q^2\lambda_0^2J_{1/q}(\lambda_0)+q\lambda J_{1/q-1}(\lambda_0)>0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть $\rho \in (0,1)$, $q > 0$ и $\nu = 1/q$, а функция g абсолютно непрерывная и такая, что $g(-\rho) = g(\rho) = 0$ и $g \in L_2(-\rho,\rho)$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$P_q \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)|}{(1-t^2)^{2-q}}\,dt < \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt,$$

где постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & \text{при } q = 0, \\ \lambda_q & \text{при } q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & \text{при } q \in (q_0, 1], \\ 2 & \text{при } q = 1 \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения:

$$-q^2\lambda^2 J_\nu(\lambda) + q\lambda J_{\nu-1}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right) + 2^{q/2} J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right) = 0.$$

Здесь j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 3. Пусть $\nu = 3$ и $q = 1/3$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$-\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{3}\frac{J_2(\lambda)}{J_3(\lambda)} = 0.$$

Численное решение дает $\lambda_0 = 3.51832$, т. е. $\frac{\lambda_0^2}{9} = 1.3754$. Следовательно,

$$1.3754 \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{5/3}}\,dt \le \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt.$$

В соответствующем неравенстве Ф. Г. Авхадиева $C(1/3) = 1.2599$.

Пример 4. Пусть $\nu = 4$ и $q = 1/4$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$-\lambda^2 J_4(\lambda) + 4\lambda J_3(\lambda) = 0.$$

Численное решение дает $\lambda_0 = 4.61256$, т. е. $\frac{\lambda_0^2}{16} = 1.32973$. Следовательно,

$$1.32973 \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{7/4}}\,dt \le \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\,dt.$$

В соответствующем неравенстве Ф. Г. Авхадиева $C(1/4) = 1.18921$.

4. Условия однолистности Нехари — Покорного

В данном разделе укажем достаточные условия однолистности в терминах оценки модуля производной Шварца функции f, мероморфной в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а также получим достаточные условия однолистности в односвязных областях, отличных от круга.

Напомним, что *производная Шварца* или *шварциан* функции $f(z)$ определяется следующим образом:

$$S_f(z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Будем использовать связь однолистности функции f с неколеблемостью решения следующего дифференциального уравнения:

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $P(z)$ — некоторая аналитическая функция, а $Q(z)$ находится из соотношения

$$2Q(z) - P'(z) - P^2(z)/2 = S_f(z).$$

Связь неколеблемости дифференциального уравнения с однолистностью. Функция f однолистна, если из $f(z_1) = f(z_2)$ вытекает, что $z_1 = z_2$. Как отмечено выше, будем использовать подход доказательства однолистности функции f, связанный с неколеблемостью решения уравнения вида

$$w'' + \frac{1}{2}S_f(z)w = 0,$$

т. е. рассмотрим случай $P(z) = 0$. Например, следующая теорема Нехари получена с использованием такого подхода.

Теорема B. *Мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$, если*

$$|S_f(z)| < 2S(|z|), \quad |z| < 1,$$

причем мажоранта $S(r)$ является непрерывной неотрицательной функцией и удовлетворяет условиям

(1) $S(r)(1-r^2)^2$ *не возрастает по r при $0 < r < 1$,*

(2) *дифференциальное уравнение $y'' + S(|t|)y = 0$ при $-1 < t < 1$ имеет решение $y_0(t) > 0$.*

Доказательство этой теоремы содержит ряд идей и полезных формул. Приведем с пояснениями отдельные фрагменты доказательства (ср. с [32, 34]), которые необходимы для понимания наших дальнейших выкладок и рассуждений.

Фрагменты доказательства теоремы. Доказательство будем вести от противного. Пусть $a \in (0,1)$ и $\rho \in (0,1)$, и предположим, что $f(z)$ однолистна в круге $|z| < a$, но

$$f(z_1) = f(z_2), \quad |z_1| = |z_2| = a, \quad z_1 \neq z_2.$$

Тогда преобразование

$$z = z(t) = e^{i\gamma}\frac{t + ir_0}{1 - ir_0 t}, \quad |t| < 1,$$

переводит единичный круг на себя, а точки z_1 и z_2 — в точки $t_1 = -\rho$ и $t_2 = \rho$, лежащие на вещественном диаметре, где $z_0 = r_0 e^{i(\gamma+\pi/2)}$, $0 < r_0 < a$, является средней точкой дуги окружности, проходящей через z_1, z_2 и ортогональной к окружности $\mathbb{D}$.

Рассмотрим функцию $g(t) = f[z(t)]$, $|t| < 1$. Ясно, что $g(-\rho) = g(\rho)$, при этом

$$|S_g(t)| = |S_f(z)z'^2(t)| \le 2\frac{S(|z|)(1-|z|^2)^2}{(1-t^2)^2} \le 2S(|t|), \quad -\rho \le t \le \rho.$$

Существует функция w_0, удовлетворяющая дифференциальному уравнению второго порядка

$$w_0'' + \frac{1}{2}S_g(t)w_0 = 0$$

и равенствам $w_0(\rho) = w_0(\rho) = 0$. Можно показать, что для такой функции w также справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} |w_0'(t)|^2\,dt \le \int\limits_{-\rho}^{\rho} S(|t|)w_0(t)|^2\,dt, \quad w_0(-\rho) = w_0(\rho) = 0. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу условия (2) для любой вещественной непрерывно дифференцируемой функции $u(t) \not\equiv 0$, $t \in [-\rho, \rho]$, такой, что

$$u(-\rho) = u(\rho) = 0,$$

будем иметь

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \left(u'(t) - \frac{y_0'(t)}{y_0(t)}\right)^2 dt > 0.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} u'^2(t)\,dt > \int\limits_{-\rho}^{\rho} -\frac{y_0''(t)}{y_0(t)}u^2(t)\,dt \ge \int\limits_{-\rho}^{\rho} S(|t|)u^2(t)\,dt,$$

что противоречит неравенству (9).

Замечание 5. При нахождении конкретных мажорант $S(r)$ можно пользоваться следующим условием, которое равносильно условию (2) теоремы B (см. подробнее [34, § 6; 35]): Прошу дать ссылку на раздел, а не на страницу!!!

(2′) для любой непрерывно дифференцируемой на $(-1, 1)$ функции $u \not\equiv 0$ такой, что $u(-\rho) = u(\rho) = 0$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} u'^2(t)\,dt > \int\limits_{-\rho}^{\rho} S(|t|)u^2(t)\,dt, \quad 0 < \rho < 1.$$

Расширение известных классов. Приведем примеры приложений некоторых полученных в данной статье неравенств для расширения известных классов однолистных мероморфных функций. Для этого рассмотрим функцию

$$S(r) = \frac{1}{(1-r^2)^2}\bigl(1 - \nu^2q^2 + q^2\lambda_0^2(1-r^2)^q\bigr),$$

где константа λ_0 определяется как корень уравнения (7).

Ясно, что функция $(1-r^2)S(r)$ является невозрастающей функцией при $r \in (0, 1)$. Поэтому, используя следствие 6, замечание 5 и теорему B, получим класс однолистных функций, условие вхождения в который приведено в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $q \in (0,2]$, $\nu \in [0,1/q]$. Тогда мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$, если*

$$|S_f(z)| < \frac{2(1-\nu^2 q^2)}{(1-|z|^2)^2} + \frac{2q^2\lambda_0^2}{(1-|z|^2)^{2-q}}, \quad |z| < 1,$$

где постоянная λ_0 является решением уравнения

$$\sup\left\{\lambda : q^2\nu^2 - q\nu - q^2\lambda^2 + q\lambda\frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} \geq 0\right\}.$$

Аналогичным образом, используя следствие 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Если $q \in (0,2]$, f — мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция и*

$$|S_f(z)| \leq \frac{2q^2\lambda_0^2}{(1-|z|^2)^{2-q}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

то функция f однолистна в круге $\mathbb{D}$.

При $q \to 0$, получим известное достаточное условие (см. [34, 37])

Следствие 8. *Если функция f мероморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и*

$$|S_f(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \quad z \in D,$$

то функция f однолистна в круге $\mathbb{D}$.

Получим аналог теоремы A. Для этого будем использовать неравенство теоремы 3:

$$P_q \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{2-q}}\, dt < \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\, dt.$$

Умножая обе стороны этого неравенства при $q = 2-\mu_k$ на положительные числа a_k, $k = \overline{1,n}$, такие, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$, имеем

$$a_k P_{2-\mu_k} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{\mu_k}}\, dt < a_k \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\, dt.$$

Суммируя, получим

$$\sum_{k=1}^{n} P_{2-\mu_k} a_k \int_{-\rho}^{\rho} \frac{g^2(t)}{(1-t^2)^{\mu_k}}\, dt < \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t)\, dt.$$

Используя предыдущие рассуждения для мажоранты

$$S(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{2-\mu_k} a_k}{(1-r^2)^{\mu_k}},$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ однолистна в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров n, a_k и μ_k, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$|S_f(z)|\le\sum_{k=1}^{n}\frac{b_kA(\mu_k)}{(1-|z|^2)^{\mu_k}},\quad z\in\mathbb{D},$$

причем $b_k=\frac{2P_{2-\mu_k}}{A(\mu_k)}a_k$, $a_1+a_2+\dots+a_n\le 1$, $0\le\mu_1\le\mu_2\le\dots\le\mu_n\le 2$, постоянные Покорного имеют вид

$$A(\mu)=\begin{cases}2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0\le\mu\le 1,\\ 2^{3-\mu}, & 1\le\mu\le 2,\end{cases}$$

постоянная

$$P_q=\begin{cases}1 & \text{при } q=0,\\ \lambda_q & \text{при } q\in(0,q_0),\\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}}2^q & \text{при } q\in(q_0,1],\\ 2 & \text{при } q=1\end{cases}$$

для любого $\alpha\in(0,q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения:

$$-q^2\lambda^2J_\nu(\lambda)+q\lambda J_{\nu-1}(\lambda)=0,\quad \lambda\in(0,j_\nu),$$

а $q_0\approx\frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^qJ_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)+2^{q/2}J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)=0.$$

Обратим внимание на то, что в отличие от теоремы А коэффициенты b_k, стоящие перед постоянными Покорного, могут быть больше 1.

Случай других односвязных областей. На основании предыдущих теорем можно получить достаточные условия однолистности также для односвязных областей, отличных от круга. Пусть $F(\zeta)$ — мероморфная в односвязной области $\mathfrak{D}$ функция и $\varphi(\zeta)$ — функция, однолистно отображающая область $\mathfrak{D}$ на единичный круг $\mathbb{D}$. Тогда функции F и $f(z)=F^{-1}(\varphi(z))$ будут однолистными и неоднолистными одновременно. Известно следующее равенство:

$$S_f(z)=\varphi'^{-2}(\zeta)(S_F(\zeta)-S_\varphi(\zeta)),\quad \zeta\in\mathfrak{D},$$

которое принимает более простой вид в случае, когда φ является дробно-линейным отображением, т. е. $S_\varphi(\zeta)\equiv 0$. Следовательно, достаточное условие теоремы 6 перепишется в виде

$$|S_F(\zeta)-S_\varphi(\zeta)|\le\sum_{k=1}^{n}b_kA(\mu_k)\frac{|\varphi'(\zeta)|^2}{(1-|\varphi(\zeta)|^2)^{\mu_k}},\quad z\in\mathfrak{D}.$$

В этом пункте положим, что постоянная λ_0 является решением уравнения

$$(q^2\nu^2-q\nu-q^2\lambda^2)J_\nu(\lambda)+q\lambda J_{\nu-1}(\lambda)=0.$$

Если $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\zeta}$ и $\varphi(\zeta)=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$, то, например, соответственно получим следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $q \in (0,2]$ и $\nu \in [0,1/q]$. Тогда мероморфная во внешности единичного круга $\mathbb{D}^- = \{z \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$ функция $F(\zeta)$ однолистна в $\mathbb{D}^-$, если*

$$|S_f(z)| < 2(1-\nu^2q^2)\frac{|\zeta|^{-4}}{(1-|\zeta|^{-2})^2} + 2q^2\lambda_0^2\frac{|\zeta|^{-4}}{(1-|\zeta|^{-2})^{2-q}}, \quad |z| < 1.$$

Теорема 8. *Пусть $q \in (0,2]$ и $\nu \in [0,1/q]$. Тогда мероморфная в правой полуплоскости $H_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta = \xi > 0\}$ функция $F(\zeta)$ однолистна в H_+, если*

$$|S_F(\zeta)| < \frac{1-\nu^2q^2}{4\xi^2} + 2^{2(q-1)}q^2\lambda_0^2\frac{|\zeta+1|^{2q}}{\xi^{2-q}}, \quad \zeta \in H_+.$$

Благодарность. Автор благодарит профессора Ф. Г. Авхадиева за ценные советы по улучшению этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1973.
2. *Maz'ya V. G.* Sobolev spaces. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1985.
3. *Kufner A., Persson L. E.* Weighted inequalities of Hardy type. New Jersey; London; Singapore; Hong Kong: World Sci., 2003.
4. *Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T.* The analysis and geometry of Hardy's inequality. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2015.
5. *Ruzhansky M., Suragan D.* Hardy inequalities on homogeneous groups. Basel: Birkhäuser, 2019.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
7. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Интегральные операторы Харди — Стеклова // Современные проблемы математики. М.: МИАН, 2016. Т. 22. С. 3–185.
8. *Persson L. E., Stepanov V. D.* Weighted integral inequalities with the geometric mean operator // J. Inequal. Appl. 2002. V. 7, N 5. P. 727–746.
9. *Bandaliyev R. A., Serbetci A., Hasanov S. G.* On Hardy inequality in variable Lebesgue spaces with mixed norm // Indian J. Pure Appl. Math. 2018. V. 49. P. 765–782.
10. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2011. V. 18, N 4. P. 723–736.
11. *Авхадиев Ф. Г.* Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 4 // Изв. АН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 5. С. 3–26.
12. *Авхадиев Ф. Г.* Интегральные неравенства Харди и Реллиха в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 2. С. 18–44.
13. *Авхадиев Ф. Г.* Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 8–18.
14. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequalities revisited // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1998. V. 25, N 1–2. P. 217–237.
15. *Filippas S., Maz'ya V. G., Tertikas A.* On a question of Brezis and Marcus // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2006. V. 25, N 4. P. 491–501.
16. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal. 2002. V. 189. P. 539–548.
17. *Matskewich T., Sobolevskii P. E.* The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for onvex domains in R^n // Nonlinear Anal. 1997. V. 28, N 9. P. 1601–1610.
18. *Marcus M., Mitzel V. J., Pinchover Y.* On the best constant for Hardy's inequality in R^n // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350, N 8. P. 3237–3255.
19. *Макаров Р. В., Насибуллин Р. Г.* Неравенства Харди с дополнительными слагаемыми и уравнения типа Лэмба // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1377–1397.
20. *Makarov R. V. Nasibullin R. G.* Hardy type inequalities and parametric Lamb equation // Indagat. Math. 2020. V. 31, N 4. P. 632–649.
21. *Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К.* Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа // Уфим. мат. журн. 2019. Т. 11, № 2. С. 3–18.

22. *Авхадиев Ф. Г.* Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 12. С. 3–28.
23. *Fernández J. L., Rodríguez J. M.* The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann urfaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica. 1990. V. 15. P. 165–183.
24. *Дубинский Ю. А.* Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях // Теория функций и дифференциальные уравнения: Сб. статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2010. Т. 269. С. 112–132.
25. *Del Pino M., Dolbeault J., Filippas S., Tertikas A.* A logarithmic Hardy inequality // J. Funct. Anal. 2010. V. 259. P. 2045–2072.
26. *Levin V.* Notes on inequalities. II. On a class of integral inequalities // Rec. Math. 1938. V. 4. P. 309–325.
27. *Beesack P. R.* Hardy's inequality and its extensions // Pacific J. Math. 1961. V. 11, N 1. P. 39–61.
28. *Tomaselli G.* A class of inequalities // Boll. Un. Mat. Ital. 1969. V. 2. P. 622–631.
29. *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Stud. Math. 1972. V. 44, N 1. P. 31–38.
30. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 1. P. 89–101.
31. *Persson L.-E., Shambilova G. E., Stepanov V. D.,* Weighted Hardy type inequalities for supremum operators on the cones f monotone functions // J. Inequal. Appl. 2016. V. 2016. P. 237.
32. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 5, N 6. P. 545–551.
33. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 25. С. 3–121. (Итоги науки и техники).
34. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 4. С. 3–60.
35. *Nehari Z.* Some criteria of univalence // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 700–704.
36. *Yamashita S.* Inequalities for the Schwarzian derivative // Indiana Univ. Math. J. 1979. V. 28, N 1. P. 131–135.
37. *Aharonov D., Elias U.* Univalence criteria depending on parameters // Anal. Math. Phys. 2014. V. 4. P. 23–34.
38. *Nasibullin R.* Avkhadiev–Backer type p-valent conditions for biharmonic functions // Anal. Math. Physics. 2021. V. 11, N 80. DOI 10./007/s13324-021-00505-4.
39. *Граф С. Ю.* Теоремы типа Нехари и равномерная локальная однолистность гармонических отображений // Изв. вузов. Математика. 2019. № 12. С. 57–70.
40. *Watson G. N* A threatise on the theory of the Bessel Functions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1966.

Поступила в редакцию 22 февраля 2022 г.
После доработки 21 апреля 2022 г.
Принята к публикации 15 июня 2022 г.

Насибуллин Рамиль Гайсаевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
`NasibullinRamil@gmail.com`