Известия вузов. Математика
2023, №4, с. 51–64

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. СИДОРОВ

ТРЕХМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

Аннотация. Для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа от трех переменных с вырождающейся параболической частью в прямоугольном параллелепипеде изучена начально-граничная задача. Установлен критерий единственности решения. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили обосновать сходимость построенного ряда в классе регулярных решений данного уравнения. Установлена устойчивость решения от граничной функции и правой части уравнения.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, трехмерная начально-граничная задача, единственность, ряд, малые знаменатели, существование, устойчивость.

УДК: 517.95

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-4-51-64

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t); \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - t^n(u_{xx} + u_{yy}) + bt^n u, & t > 0; \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} F_1(x, y, t), & t > 0; \\ F_2(x, y, t), & t < 0, \end{cases}$$

заданное в трехмерной области

$$Q = \{(x, y, t) |\, (x, y) \in D,\, t \in (-\alpha, \beta)\},$$

где

$$D = \{(x, y) |\, 0 < x < p,\, 0 < y < q\},$$

n, α, β, p, q — заданные положительные действительные числа, b — заданное любое действительное число, $F_i(x, y, t)$ $(i = 1, 2)$ — заданные функции, и поставим следующую задачу.

Поступила в редакцию 05.08.2022, после доработки 05.08.2022. Принята к публикации 21.12.2022.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-31-60016.

Начально-граничная задача. *Найти функцию $u(x,y,t)$, определенную в области Q и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y,t) \in C(\overline{Q}) \cap C^1_t(Q) \cap C^1_{x,y}(\overline{Q}) \cap C^2_{x,y}(Q_+) \cap C^2(Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv F(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = u(x,y,t)\big|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=0} = u(x,y,t)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{5}$$

$$u(x,y,t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $F(x,y,t)$ и $\psi(x,y)$ — заданные достаточно гладкие функции, $Q_- = Q \cap \{t<0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t>0\}$.

Отметим, что О.А. Ладыженская и Л. Ступялис [1], [2] в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле. Одна из этих задач следующая. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть объединение двух областей Ω_1 и Ω_2 и разделяющей их $(n-1)$-мерной поверхности Γ, так что $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Обозначим через S границу Ω, а через S_1 и S_2 — границы Ω_1 и Ω_2, $Q_T^{(k)} = \Omega_k \times [0,T]$, $k=1,2$. Ставится задача: найти функцию $u(x,t)$, в области $Q_T^{(1)}$ удовлетворяющую параболическому уравнению

$$u_t + L_1 u = f_1(x,t),$$

в области $Q_T^{(2)}$ — гиперболическому уравнению

$$u_{tt} + L_2 u = f_2(x,t),$$

— начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega_1;$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_3(x), \quad x \in \Omega_2,$$

на границе S — первому граничному условию

$$u\Big|_S = \psi(x,t), \quad t \in [0,T],$$

а на границе раздела Γ — условиям сопряжения

$$u^{(1)}\Big|_\Gamma - u^{(2)}\Big|_\Gamma = \psi_1(x,t),$$

$$b^{(1)}(x,t)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial N}\Big|_\Gamma - b^{(2)}(x,t)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial N}\Big|_\Gamma = \psi_2(x,t), \quad t \in [0,T];$$

здесь $u(x,t) = u^{(1)}(x,t)$ для $x \in \Omega_1$, $t \ge 0$ и $u(x,t) = u^{(2)}(x,t)$ для $x \in \Omega_2$, $t \ge 0$, $b^{(k)}(x,t) \ge \beta > 0$, $k=1,2$, — известные функции,

$$L_k u \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a^{(k)}_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + a^{(k)}_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^{(k)}(x,t), \quad k=1,2,$$

где $a^{(k)}_{ij}(x,t)$, $a^{(k)}_i(x,t)$, $a^{(k)}(x,t)$, $f_k(x,t)$, $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$, $\psi(x,t)$, $\psi_k(x,t)$ — заданные известные функции.

В отличие от указанных выше статей в данной работе в задаче условия сопряжения заданы не по пространственной переменной, а по временной переменной, т. е. на плоскости $t=0$.

В работах Н.Ю. Капустина [3], [4] методами функционального анализа доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми в пространстве L_2 для уравнения параболо-гиперболического типа в плоской смешанной области, параболическая часть есть прямоугольник, а гиперболическая часть представляет собой характеристический треугольник с основанием на линии вырождения. В аналогичной области в статье Н.Ю. Капустина, Е.И. Моисеева [5] методом спектрального анализа изучены задачи для параболо-гиперболических уравнений и соответствующие одномерные спектральные задачи.

Начально-граничные задачи (локальные, нелокальные) для однородного и неоднородного уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области впервые были изучены в работах К.Б. Сабитова, С.Н. Сидорова ([6], [7], с. 56–94; [8]–[11]).

Отметим так же наши работы [12], где для для трех классов одномерного параболо-гиперболического уравнения с правой частью $F(x,t)$: уравнения смешанного типа с вырождающейся гиперболической частью, для уравнения смешанного типа с вырождающейся параболической частью и для уравнения смешанного типа со степенным вырождением изучена начально-граничная задача в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$ с ненулевыми условиями на границе $u(0,t) = h_1(t)$, $u(l,t) = h_2(t)$, $u(x,-\alpha) = \varphi(x)$.

Задача (2)–(6) для уравнения (1) без вырождающейся параболической части, т. е. при $n = 0$, изучена в работе [13].

Отметим также работы С.А. Алдашева [14]–[17], в которых для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений в смешанной цилиндрической области методом разделения переменных изучены краевые задачи, которые распадаются соответственно на две самостоятельные краевые задачи для уравнений параболического и гиперболического типов. В работе [14] решение задачи Дирихле для гиперболического уравнения построено в виде суммы ряда, сходимость которого не обоснована из-за наличия малых знаменателей. В работе [16] изучена краевая задача для гиперболо-параболического уравнения, которая распадается на две начально-гранинчые задачи соответственно для уравнений параболического и гиперболического типов. В основной теореме 1 приводится условие $\cos\mu_{s,n}\alpha' \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$, где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функции Бесселя первого рода $J_n(z)$, α' — некоторое заданное число, но в самой работе при доказательстве этой теоремы это условие нигде не возникает.

Необходимость исследования задачи (2)–(6) для неоднородного уравнения (1) возникает в связи с изучением обратных задач для уравнения (1) по отысканию сомножителей правой части $F_i(x,y,t) = f_i(x,y)g_i(t)$, $i = 1, 2$, либо зависящих от (x,y), либо зависящих от t. В одномерном случае обратные задачи по поиску неизвестных правых частей исследованы в работах [18]–[21].

Используя идею работы [13], установлен критерий единственности решения задачи (2)–(6). Решение задачи построено в явной форме в виде суммы ортогонального двумерного ряда. При обосновании сходимости ряда впервые возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов, затрудняющая сходимость построенного ряда. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения. Установлена устойчивость решения по граничной функции $\psi(x,y)$ и правой части уравнения.

2. Критерий единственности решения задачи

Пусть существует решение $u(x,y,t)$ задачи (2) — (6), $F_1(x,y,t) \in C(D) \cap L(D)$ при $0 < t < \beta$ и $F_2(x,y,t) \in C(D) \cap L(D)$ при $-\alpha < t < 0$. Следуя [13], рассмотрим функции

$$u_{mn}(t) = \iint\limits_D u(x,y,t) v_{mn}(x,y)\,dxdy, \quad m,\, n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где

$$v_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q} \tag{8}$$

— полная ортонормированная система собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике D с нулевыми граничными условиями Дирихле. Отметим также, что система функций (8) полна, ортонормированна и образует базис в пространстве $L_2(D)$.

Дифференцируя равенство (7) по t при $t > 0$ один раз, а при $t < 0$ два раза, учитывая уравнение (1), получим

$$u'_{mn}(t) = \iint\limits_D u_t(x,y,t) v_{mn}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_\varepsilon} \Big[t^n(u_{xx} + u_{yy} - bu) + F_1(x,y,t)\Big] v_{mn}(x,y)\,dxdy =$$

$$= t^n \iint\limits_D u_{xx} v_{mn}(x,y)\,dxdy + t^n \iint\limits_D u_{yy} v_{mn}(x,y)\,dxdy - bt^n u_{mn}(t) + \iint\limits_D F_1(x,y,t) v_{mn}(x,y)\,dxdy,$$

$$u''_{mn}(t) = \iint\limits_D u_{tt}(x,y,t) v_{mn}(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D \Big[u_{xx} + u_{yy} - bu + F_2(x,y,t)\Big] v_{mn}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D u_{xx} v_{mn}(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D u_{yy} v_{mn}(x,y)\,dxdy - bu_{mn}(t) + \iint\limits_D F_2(x,y,t) v_{mn}(x,y)\,dxdy.$$

В интегралах, содержащих производные u_{xx} и u_{yy}, интегрируя по частям два раза с учетом граничных условий (4) и (5), получим дифференциальные уравнения

$$u'_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 t^n u_{mn}(t) = \Phi_{1mn}(t), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$u''_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = \Phi_{2mn}(t), \quad t < 0; \tag{10}$$

здесь

$$\lambda_{mn}^2 = b + \pi^2 \left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right], \tag{11}$$

$$\Phi_{imn}(t) = \iint\limits_D F_i(x,y,t) v_{mn}(x,y)\,dxdy, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

В дальнейшем в (11) будем считать, что $b = \mu^2 \geq 0$ ($\mu \geq 0$), так как если $b < 0$, то, начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$, правая часть (11) принимает только положительные значения, т. е. знак коэффициента b не влияет на полученные результаты.

Дифференциальные уравнения (9) и (10) имеют общие решения

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t^{n+1}/(n+1)} + \displaystyle\int\limits_0^t \Phi_{1mn}(s) e^{-\lambda_{mn}^2 \left(t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1)\right)}\,ds, & t > 0; \\ c_{mn} \cos\lambda_{mn} t + d_k \sin\lambda_{mn} t - \dfrac{1}{\lambda_{mn}} \displaystyle\int\limits_t^0 \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right]\,ds, & t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

Функции (13) удовлетворяют условиям сопряжения

$$u_{mn}(0+0) = u_{mn}(0-0), \quad u'_{mn}(0+0) = u'_{mn}(0-0), \quad m,\, n \in \mathbb{N},$$

только тогда, когда

$$a_{mn} = c_{mn}, \quad d_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}} \Phi_{1mn}(0+0).$$

В силу последних равенств функции $u_{mn}(t)$ принимают вид

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} a_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t^{n+1}/(n+1)} + \int\limits_0^t \Phi_{1mn}(s) e^{-\lambda_{mn}^2 \left(t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1)\right)}\, ds, & t > 0; \\ a_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \dfrac{\Phi_{1mn}(0+0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_k t - \dfrac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right]\, ds, & t < 0. \end{cases}$$

Для нахождения постоянных a_{mn} в этой формуле воспользуемся граничным условием (6) и формулой (7):

$$u_{mn}(-\alpha) = \iint\limits_D u(x,y,-\alpha) v_{mn}(x,y)\, dxdy = \iint\limits_D \psi(x,y) v_{mn}(x,y)\, dxdy = \psi_{mn}. \tag{14}$$

Тогда имеем

$$a_{mn} \cos \lambda_{mn} \alpha = \psi_{mn} + \frac{\Phi_{1mn}(0+0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_{mn} \alpha - \frac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_{-\alpha}^0 \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right]\, ds = w_{mn}. \tag{15}$$

Из равенства (15) при условии, что при всех m, $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{mn}(\alpha) = \cos \lambda_{mn} \alpha \neq 0, \tag{16}$$

находим

$$a_{mn} = \frac{w_{mn}}{\Delta_{mn}(\alpha)}.$$

Отсюда для функций $u_{mn}(t)$ получаем окончательный вид

$$u_{mn}(t) = \begin{cases} \dfrac{w_{mn}}{\cos \lambda_{mn} \alpha} e^{-\lambda_{mn}^2 t^{n+1}/(n+1)} + \int\limits_0^t \Phi_{1mn}(s) e^{-\lambda_{mn}^2 \left(t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1)\right)}\, ds, & t > 0; \\ \dfrac{w_{mn}}{\cos \lambda_{mn} \alpha} \cos \lambda_{mn} t + \dfrac{\Phi_{1mn}(0+0)}{\lambda_{mn}} \sin \lambda_k t - \dfrac{1}{\lambda_{mn}} \int\limits_t^0 \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right]\, ds, & t < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Пусть $F_i(x,y,t) \equiv 0$, $i = 1,2$, $\psi(x,y) \equiv 0$ и выполнены условия (16), т. е. $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ при всех m, $n \in \mathbb{N}$. Тогда все $\psi_{mn} \equiv 0$, $\Phi_{imn}(t) \equiv 0$ и в силу (17) и (7) следует, что при всех m, $n \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [-\alpha, \beta]$

$$\iint\limits_D u(x,y,t) v_{mn}(x,y)\, dxdy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (8) в $L_2(D)$ имеем $u(x,y,t) = 0$ почти всюду в $\overline{D}$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. По условию (2) функция $u(x,y,t)$ непрерывна на $\overline{D}$, поэтому $u(x,y,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некотором $m = m_0$ или $n = n_0$ имеем $\Delta_{m_0 n}(\alpha) = 0$ или $\Delta_{m n_0}(\alpha) = 0$. Допустим, что $\Delta_{m n_0}(\alpha) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(6) (где $\psi(x,y) \equiv 0$, $F_i(x,y,t) \equiv 0$, $i = 1,2$) имеет ненулевое решение

$$u_{mn_0}(x,y,t) = u_{mn_0}(t)v_{mn_0}(x,y),$$
$$u_{mn_0}(t) = \begin{cases} C_{mn_0}e^{-\lambda^2_{mn_0}t^{n+1}/(n+1)}, & t \geq 0; \\ C_{mn_0}\cos\lambda_{mn_0}t, & t \leq 0, \end{cases}$$

$C_{mn_0} \neq 0$ — произвольная постоянная.

Из формулы (16) видно, что $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ относительно α только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{\pi(1+2k)}{2\lambda_{mn}}, \quad k,\, m,\, n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, установлен следующий критерий единственности решения задачи (2)–(6).

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)–(6), *то оно единственно только тогда, когда при всех m и n выполнены условия $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$.*

3. Существование решения задачи

При соблюдении условий $\Delta_{mn}(\alpha) \neq 0$ решение задачи (2)–(6) формально определяется рядом Фурье по системе функций (8):

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x,y), \tag{18}$$

где коэффициенты находятся по формуле (17). Поскольку $\Delta_{mn}(\alpha)$ является знаменателем коэффициентов ряда (18) и как показано выше, что уравнение $\Delta_{mn}(\alpha) = 0$ имеет счетное множество нулей, то возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в плоском случае ([6]; [7], с. 61–66). В связи с чем для обоснования сходимости ряда (18) в классе функций (2) необходимо установить оценку об отделенности от нуля $\Delta_{mn}(\alpha)$.

В дальнейшем для простоты исследований положим, что $b = 0$. С учетом этого представим выражение $\Delta_{mn}(\alpha)$ в виде

$$\Delta_{mn}(\nu) = \cos(\pi N\nu), \quad N = \max\{m,n\}, \tag{19}$$

где

$$\nu = \frac{\alpha}{pq}\sqrt{\left(\frac{q\,m}{N}\right)^2 + \left(\frac{p\,n}{N}\right)^2}.$$

Поскольку ν — зависит от n и m, то каковы должны быть данные задачи α, p и q, чтобы ν принимала только рациональные или только иррациональные алгебраические значения. Пусть отношение q/p является рациональным. В этом случае, не теряя общности, можно считать, что p и q — целые числа и они взаимно простые. Тогда ν можно переписать в виде

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{q}\sqrt{1+\left(\dfrac{q\,m}{p\,n}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{q}\nu_+ & \text{при} \quad n > m; \\ \dfrac{\alpha}{q}\sqrt{1+\left(\dfrac{q}{p}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{q}\nu_0 & \text{при} \quad n = m; \\ \dfrac{\alpha}{q}\sqrt{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{m}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{q}\nu_- & \text{при} \quad n < m. \end{cases}$$

В силу теоремы 310 ([22], с. 308) квадратные корни ν_+ и ν_- принимают рациональные значения только тогда, когда

$$m = (a^2 - b^2)p, \quad n = 2abq \quad \text{для} \quad \nu_+,$$

$$n = (a^2 - b^2)q, \quad m = 2abp \quad \text{для} \quad \nu_-,$$

где $a > b > 0$, $(a, b) = 1$, а из натуральных чисел a и b одно из них четно, а другое нечетно. Корень ν_0 принимает рациональные значения только тогда, когда

$$q = (a^2 - b^2), \quad p = 2ab.$$

Из этих утверждений следует, что существуют счетные множества значений n, m, p и q, при которых корни ν_+, ν_- и ν_0 принимают только рациональные значения. Если указанные условия нарушены, то корни ν_+, ν_- и ν_0 являются алгебраическими числами степени 2. Следовательно, если отношение α/q является рациональным числом, то ν при условиях для n, m, p и q принимает рациональные значения, а при нарушении этих условий — иррациональные алгебраические значения.

Лемма 1. *Если $\nu = s/t$ является произвольным рациональным числом, где s, $t \in \mathbb{N}$, $(s, t) = 1$, t — нечетное число, то существует положительная постоянная C_0 такая, что при всех $N \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{mn}(\nu)| \geq C_0 > 0. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\nu = s \in \mathbb{N}$. Тогда из равенства (19) имеем

$$\Delta_{mn}(\nu) = \cos(\pi N p) = (-1)^{pN}.$$

Отсюда следует

$$|\Delta_{mn}(\nu)| = C_0 = 1 > 0. \tag{21}$$

Пусть теперь $\nu = s/t$, $(s, t) = 1$. Разделив Ns на t с остатком: $Ns = kt + r$, k, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leqslant r < t$, имеем

$$\Delta(k) = \cos\frac{\pi N s}{t} = \cos\left(\pi k + \frac{r\pi}{t}\right) = (-1)^k \cos\frac{\pi r}{t}. \tag{22}$$

Если $r = 0$, то получим оценку (21). Пусть $r > 0$, тогда $1 \leqslant r \leqslant t - 1$, $q \geqslant 2$, и справедливо неравенство

$$\frac{\pi}{t} \leqslant \frac{\pi r}{t} \leqslant \frac{(t-1)\pi}{t} = \pi - \frac{\pi}{t}.$$

Если $r/t \neq 1/2$ при $r \in [1, t-1] \cap \mathbb{N}$ и $t \geqslant 2$, то

$$\cos\frac{\pi r}{t} \neq 0. \tag{23}$$

Действительно, если при некотором $r = r_0 \in [1, t-1] \cap \mathbb{N}$ неравенство (23) нарушается, т. е.

$$\cos\frac{\pi r_0}{t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi r_0}{t} = \frac{\pi}{2} + \pi m \Leftrightarrow \frac{r_0}{t} = \frac{1}{2} + m, \ m \in \mathbb{N}_0.$$

Поскольку $r_0 < t$, то последнее равенство возможно лишь при $m = 0$, следовательно, получаем $t = 2r_0$, что противоречит условию, значит, неравенство (23) является верным. Тогда из (22) и (23) следует справедливость оценки (20). □

Лемма 2. *Пусть ν — иррациональное алгебраическое число степени 2. Тогда существует положительная постоянная C_0 такая, что при всех $N \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|\Delta_{mn}(\nu)| > \frac{C_0}{N}.$$

Доказательство. Соотношение (19) представим в виде

$$|\Delta_{mn}(\nu)| = |\cos(\pi N\nu)| = \left|\sin\left(\pi N\nu + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\pi N\nu + \frac{\pi}{2} - \pi m\right)\right| =$$

$$= \left|\sin\left[\pi N\left(\nu - \frac{2m-1}{2N}\right)\right]\right| = \left|\sin\left[\frac{\pi N}{2}\left(2\nu - \frac{l}{N}\right)\right]\right|,$$

где $l = 2m-1$, m, $l \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$.

Отметим, что для всякого $N \in \mathbb{N}$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left|2\nu - \frac{l}{N}\right| < \frac{1}{N}. \tag{24}$$

Для этого достаточно принять за

$$l = \begin{cases} [2\nu N], & \text{если } [2\nu N] \text{ нечетное;} \\ [\nu N] + 1, & \text{если } [2\nu N] \text{ четное,} \end{cases}$$

где $[\nu N]$ — целая часть иррационального числа $2\nu N$.

Число l возьмем таким, чтобы в силу (24) выполнялось неравенство

$$\left|\frac{\pi N}{2}\left(2\nu - \frac{l}{N}\right)\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Если 2ν является иррациональным алгебраическим числом степени два, т. е. является квадратическим иррациональным числом, то в силу теоремы Лиувилля ([23], с. 60) существует положительное число δ, зависящее от ν, такое, что при любых целых l и k, $k > 0$, выполняется неравенство

$$\left|2\nu - \frac{l}{N}\right| > \frac{\delta}{N^2}. \tag{25}$$

Множество значений ν при любых значениях n и m ограничено, т. е.

$$\frac{\alpha}{T} < \nu < \frac{\alpha}{pq}\sqrt{p^2+q^2}, \quad T = \max\{p, q\}.$$

Тогда на основании ([7], с. 66) можно показать, что множество значений δ ограничено, при этом $\delta > \delta_0 > 0$, где δ_0 не зависит от N, т. е. n и m.

Тогда выражение для $\Delta_{mn}(\nu)$ примет вид

$$|\Delta_{mn}(\nu)| = |\cos \pi N\nu| = \left|\sin\frac{\pi N}{2}\left(2\nu - \frac{l}{N}\right)\right|. \tag{26}$$

На основании (26) в силу (25) будем иметь оценку

$$|\Delta_{mn}(\nu)| = |\cos \pi N\nu| = \left|\sin\frac{\pi N}{2}\left(2\nu - \frac{l}{N}\right)\right| > N\left|2\nu - \frac{l}{N}\right| > \frac{\delta_0}{N},$$

из которой следует справедливость леммы 2. □

Лемма 3. *Если число ν является алгебраическим числом степени 1 или 2, то при всех $N \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:*

$$|u_{mn}(t)| \le M_1\Big(N|\psi_{mn}| + \|\Phi_{1mn}\|_C + \|\Phi_{2mn}\|_C\Big), \ \ t \in [-\alpha, \beta],$$

$$|u'_{mn}(t)| \le M_2\Big(N^2|\psi_{mn}| + N\|\Phi_{1mn}\|_C + N\|\Phi_{2mn}\|_C\Big), \ \ t \in [-\alpha, \beta],$$

$$|u''_{mn}(t)| \le M_3\Big(N^3|\psi_{mn}| + N^2\|\Phi_{1mn}\|_C + N^2\|\Phi_{2mn}\|_C\Big), \ \ t \in [-\alpha, 0],$$

где

$$\|\Phi_{1mn}\|_C = \max_{0\le t\le\beta} |\Phi_{1mn}(t)|, \quad \|\Phi_{2mn}\|_C = \max_{-\alpha\le t\le 0} |\Phi_{2mn}(t)|,$$

M_i *— здесь и далее положительные постоянные.*

Доказательство. Предварительно оценим из формулы (15) выражение

$$|w_{mn}| \le |\psi_{mn}| + \frac{|\Phi_{1mn}(0+0)|}{\lambda_{mn}} |\sin\lambda_{mn}\alpha + \frac{1}{\lambda_{mn}} \left| \int\limits_{-\alpha}^{0} \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(s+\alpha)\right] ds \right| \le$$

$$\le \widetilde{M}_1 \Big(|\psi_{mn}| + N^{-1}\|\Phi_{1mn}\|_C + N^{-1}\|\Phi_{2mn}\|_C \Big); \tag{27}$$

здесь и далее $\widetilde{M}_i$ — положительные постоянные, зависящие от p, q, b, α и β.

Из формулы (17) при $t \ge 0$ с учетом леммы 2 и оценки (27) при $t \in [0,\beta]$ оценим

$$|u_{mn}(t)| \le \frac{|w_{mn}|}{|\Delta_{mn}(\alpha)|} e^{-\lambda_{mn}^2 t^{n+1}/(n+1)} + \left| \int\limits_0^t \Phi_{1mn}(s) e^{-\lambda_{mn}^2 \left(t^{n+1}/(n+1) - s^{n+1}/(n+1)\right)} ds \right| \le$$

$$\le \widetilde{M}_2 \Big(N|\psi_{mn}| + \|\Phi_{1mn}\|_C + \|\Phi_{2mn}\|_C \Big) + \frac{1}{\lambda_{mn}^2} \max_{0\le t\le\beta} |\Phi_{1mn}(t)| \le$$

$$\le \widetilde{M}_2 \Big(N|\psi_{mn}| + \|\Phi_{1mn}\|_C + \|\Phi_{2mn}\|_C \Big). \tag{28}$$

Аналогично получим оценку для $u'_{mn}(t)$ при $t \in [0,\beta]$:

$$|u'_{mn}(t)| \le \frac{|w_{mn}|}{|\Delta_{mn}\alpha|} \lambda_{mn}^2 e^{-\lambda_{mn}^2 t^{n+1}/(n+1)} + |\Phi_{1mn}(t)| \le$$

$$\le \widetilde{M}_3 \Big(N^2|\psi_{mn}| + N\|\Phi_{1mn}\|_C + N\|\Phi_{2mn}\|_C \Big). \tag{29}$$

Теперь на основании формулы (17) оценим выражение $u_{mn}(t)$ при $t \le 0$. Используя лемму 2 и оценку (27), получаем

$$|u_{mn}(t)| \le \widetilde{M}_4 \left(\frac{|w_{mn}|}{|\Delta_{mn}(\alpha)|} + \frac{|\Phi_{1mn}(0+0)|}{\lambda_{mn}} \right) + \frac{1}{\lambda_{mn}} \left| \int\limits_t^0 \Phi_{2mn}(s) \sin\left[\lambda_{mn}(t-s)\right] ds \right| \le$$

$$\le \widetilde{M}_5 \Big(N|\psi_{mn}| + \|\Phi_{1mn}\|_C + \|\Phi_{2mn}\|_C \Big); \tag{30}$$

$$|u'_{mn}(t)| \le \widetilde{M}_6 \left(\frac{|w_{mn}|}{|\Delta_{mn}(\alpha)|} \lambda_{mn} + |\Phi_{1mn}(0+0)| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\Phi_{1mn}(t)| \right) \le$$

$$\le \widetilde{M}_7 \Big(N^2|\psi_{mn}| + N\|\Phi_{1mn}\|_C + N\|\Phi_{2mn}\|_C \Big). \tag{31}$$

Из неравенств (28) и (30) получаем первую оценку леммы, а из (29) и (31) — вторую оценку.

Поскольку $u''_{mn}(t) = -\lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) + \Phi_{2mn}(t)$, то на основании оценки (30) получим третью оценку леммы. □

Пусть выполнены условия леммы 3. Ряды (18) и ряды из производных этого ряда, найденные выше, в силу леммы 3 при любых $(x,y,t) \in \overline{Q}$ мажорируются числовым рядом

$$M_4 \sum_{N=1}^{+\infty} N^3|\psi_{mn}| + N^2\|\Phi_{1mn}\|_C + N^2\|\Phi_{2mn}\|_C. \tag{32}$$

Лемма 4. *Пусть* $\psi(x,y) \in C^{5+h_1}(\overline{D})$, $0 < h_1 < 1$,

$$\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi_{xxxx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi_{xx}(p,y) = \psi_{xxxx}(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le q,$$

$$\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi_{yyyy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = \psi_{yyyy}(x,q) = 0 \quad 0 \le x \le p,$$

$F_1(x,y,t) \in C(\overline{Q}_+) \cap C^{4+h_2}_{xy}(\overline{D}_+)$, $0 < h_2 < 1$,

$$F_1(0,y,t) = F_{1xx}(0,y,t) = F_{1xxxx}(0,y,t) = F_1(p,y,t) = F_{1xx}(p,y,t) = F_{1xxxx}(p,y,t) = 0,$$
$$0 \le y \le q, \quad 0 \le t \le \beta,$$
$$F_1(x,0,t) = F_{1yy}(x,0,t) = F_{1yyyy}(x,0,t) = F_1(x,q,t) = F_{1yy}(x,q,t) = F_{1yyyy}(x,q,t) = 0,$$
$$0 \le x \le q, \quad -\alpha \le t \le 0,$$

$F_2(x,y,t) \in C(\overline{Q}_-) \cap C^{4+h_3}_{xy}(\overline{D}_-)$, $\varepsilon < h_3 < 1$,

$$F_2(0,y,t) = F_{2xx}(0,y,t) = F_{2xxxx}(0,y,t) = F_2(p,y,t) = F_{2xx}(p,y,t) = F_{2xxxx}(p,y,t) = 0,$$
$$0 \le y \le q, \quad 0 \le t \le \beta,$$
$$F_2(x,0,t) = F_{2yy}(x,0,t) = F_{2yyyy}(x,0,t) = F_2(x,q,t) = F_{2yy}(x,q,t) = F_{2yyyy}(x,q,t) = 0,$$
$$0 \le x \le q, \quad -\alpha \le t \le 0.$$

Тогда справедливы оценки

$$|\psi_{mn}| \le \frac{C_{12}}{N^{5+h_1}}, \quad |\Phi_{1mn}(t)| < \frac{C_{13}}{N^{4+h_2}}, \quad |\Phi_{2mn}(t)| < \frac{C_{14}}{N^{4+h_3}}.$$

Доказательство. Для обоснования оценок леммы достаточно интегрировать по частям в интегралах формул (14) и (12) с учетом условий леммы четыре и три раза соответственно и далее воспользоваться гёльдеровостью производных четвертого и третьего порядков ([24], с. 81). □

В ряде (32) число членов ряда с заданным N имеет порядок N. Тогда в силу леммы 4 ряд (32) оценивается сходящимся рядом

$$M_5 \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N^{1+h_1}} + \frac{1}{N^{1+h_2}} + \frac{1}{N^{1+h_3}} \right).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *или* 2 *и функции* $\psi(x,y)$, $F_1(x,y,t)$ *и* $F_2(x,y,t)$ *удовлетворяют условиям леммы* 4. *Тогда существует единственное решение задачи* (2)–(6) *и оно определяется рядом* (18).

4. Устойчивость решения задачи

Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)} = \left(\iint\limits_D u^2(x,y,t)\,dxdy \right)^{1/2},$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} = \max_{\overline{Q}} |u(x,y,t)|,$$

$$\|f(x,y)\|_{W_2^l(D)} = \left(\iint\limits_D \sum_{i+j=0}^{l} \left| \frac{\partial^{(i+j)} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \right)^{1/2},$$

$$\|f(x,y)\|_{C^l(\overline{D})} = \sum_{i+j=0}^{l} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^{(i+j)} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right|, \quad l \geq 1.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для решения* (18) *задачи* (2)–(6) *справедливы оценки*

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(D)} \leq M_6 \Big(\|\psi(x,y)\|_{W_2^1(D)} + \|F_1(x,y,t)\|_{L_2(D)} + \|F_2(x,y,t)\|_{L_2(D)} \Big),$$

$$\|u(x,y,t)\|_{C(\overline{Q})} \leq M_7 \Big(\|\psi(x,y)\|_{C^3(D)} + \|F_1(x,y,t)\|_{C^2(D)} + \|F_2(x,y,t)\|_{C^2(D)} \Big).$$

Доказательство. Поскольку система функций (8) ортонормирована в $L_2(D)$, то из формулы (18) на основании леммы 3 имеем

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u^2_{mn}(t) = \sum_{n \geq m} u^2_{mn}(t) + \sum_{m>n} u^2_{mn}(t) \leq$$

$$\leq 2M_1^2 \sum_{n \geq m} n^2 \psi^2_{mn} + 2M_1^2 \sum_{m>n} m^2 \psi^2_{mn} + 2M_1^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(|\Phi_{1mn}(t)|^2 + |\Phi_{2mn}(t)|^2 \Big). \tag{33}$$

На основании представлений

$$\psi_{mn} = \left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi^{(0,2)}_{mn} = \left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi^{(2,0)}_{mn},$$

где

$$\psi^{(0,1)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{p\,q}} \iint\limits_D \varphi_y(x,y) \sin\frac{m\pi x}{p} \cos\frac{n\pi y}{q}\, dxdy,$$

$$\psi^{(1,0)}_{mn} = \frac{2}{\sqrt{p\,q}} \iint\limits_D \varphi_x(x,y) \cos\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}\, dxdy,$$

из неравенства (33) получим

$$\|u(x,y,t)\|^2_{L_2(D)} \leq 2M_1^2 \Bigg[\left(\frac{q}{\pi}\right)^2 \sum_{n \geq m} \left|\psi^{(0,1)}_{mn}\right|^2 + \left(\frac{p}{\pi}\right)^2 \sum_{m>n} \left|\psi^{(1,0)}_{mn}\right|^2 +$$

$$+ \big\|F_1(x,y,t)\big\|^2_{L_2(D)} + \big\|F_2(x,y,t)\big\|^2_{L_2(D)} \Bigg] \leq$$

$$\leq M_6^2 \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\left|\psi^{(0,1)}_{mn}\right|^2 + |\psi^{(1,0)}_{mn}|^2 \right) + \big\|F_1(x,y,t)\big\|^2_{L_2(D)} + \big\|F_2(x,y,t)\big\|^2_{L_2(D)} \right] \leq$$

$$\leq M_6^2 \left(\big\|\psi(x,y)\big\|^2_{W_2^1(D)} + \big\|F_1(x,y,t)\big\|^2_{L_2(D)} + \big\|F_2(x,y,t)\big\|^2_{L_2(D)} \right).$$

Отсюда следует справедливость первой оценки теоремы.

Пусть (x,y,t) — произвольная точка $\overline{Q}$. Тогда из формулы (18) на основании леммы 3 имеем

$$|u(x,y,t)| \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} |u_{mn}(t)| + |\Phi_{1mn}(t)| + |\Phi_{2mn}(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{n \geq m} |u_{mn}(t)| + \sum_{m>n} |u_{mn}(t)| + \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(|\Phi_{1mn}(t)| + |\Phi_{2mn}(t)| \Big) \leq$$

$$\leq M_1 \sum_{n\geq m} n|\psi_{mn}| + M_1 \sum_{m>n} m\psi_{mn} + M_1 \sum_{m,n=1}^{\infty} \Big(|\Phi_{1mn}(t)| + |\Phi_{2mn}(t)|\Big), \tag{34}$$

Далее воспользуемся равенствами

$$\psi_{mn} = -\frac{q}{n\pi}\left(\frac{p}{m\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(2,1)} = -\frac{p}{m\pi}\left(\frac{q}{n\pi}\right)^2 \psi_{mn}^{(1,2)},$$

$$\Phi_{imn} = \frac{qp}{mn\pi^2}\Phi_{imn}^{(1,1)}, \quad i = 1, 2;$$

здесь

$$\psi_{mn}^{(2,1)} = \frac{2}{\sqrt{p\,q}} \iint\limits_D \varphi_{xxy}(x,y) \sin\frac{m\pi x}{p} \cos\frac{n\pi y}{q}\, dxdy,$$

$$\psi_{mn}^{(1,2)} = \frac{2}{\sqrt{p\,q}} \iint\limits_D \varphi_{xyy}(x,y) \cos\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}\, dxdy,$$

$$\Phi_{imn}^{(1,1)} = \frac{2}{\sqrt{p\,q}} \iint\limits_D F_{ixy}(x,y,t) \cos\frac{m\pi x}{p} \cos\frac{n\pi y}{q}\, dxdy.$$

Тогда, продолжая оценку (34), имеем

$$|u(x,y,t)| \leq M_1 \sum_{n\geq m} \frac{q^2 p}{\pi^3}\frac{1}{mn}\left|\psi_{mn}^{(1,2)}\right| + M_1 \sum_{m>n} \frac{p^2 q}{\pi^3}\frac{1}{mn}\left|\psi_{mn}^{(2,1)}\right| +$$

$$+M_1 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{qp}{\pi^2}\frac{1}{mn}\Big(\left|\Phi_{1mn}^{(1,1)}\right| + \left|\Phi_{2mn}^{(1,1)}\right|\Big).$$

Отсюда в силу неравенства Буняковского получим

$$|u(x,y,t)| \leq \widetilde{M}_1 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}\Big(\left|\psi_{mn}^{(1,2)}\right| + \left|\psi_{mn}^{(2,1)}\right|\Big) + \widetilde{M}_2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\Phi_{1mn}^{(1,1)}\right| + \widetilde{M}_2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn}\left|\Phi_{2mn}^{(1,1)}\right| \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_1 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(1,2)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}^{(2,1)}|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+\widetilde{M}_2 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\Phi_{1mn}^{(1,1)}|^2\right)^{1/2} + \widetilde{M}_2 \left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{mn}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\Phi_{2mn}^{(1,1)}|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \widetilde{M}_3 \Big(\|\psi(x,y)\|_{W_2^3(D)} + \|F_1(x,y,t)\|_{W_2^2(D)} + \|F_2(x,y,t)\|_{W_2^2(D)}\Big) \leq$$

$$\leq M_7 \left(\|\psi(x,y)\|_{C^3(D)} + \|F_1(x,y,t)\|_{C^2(D)} + \|F_2(x,y,t)\|_{C^2(D)}\right),$$

здесь и далее $\widetilde{M}_i$, $i = \overline{1,3}$, — положительные постоянные, зависящие от p, q, b и α. Из последнего неравенства имеем вторую оценку теоремы. □

Литература

[1] Ладыженская О.А., Ступялис Л. *Об уравнениях смешанного типа*, Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астр. **19** (4), 38–46 (1965).

[2] Ступялис Л. *Начально-краевые задачи для уравнений смешанного типа*, Тр. МИАН СССР **127**, 115–145 (1975).

[3] Капустин Н.Ю. *Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью.* I, Дифференц. уравнения **23** (1), 72–78 (1987).

[4] Капустин Н.Ю. *Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью.* II, Дифференц. уравнения **24** (8), 1379–1386 (1988).

[5] Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. *О спектральной задаче из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности*, Докл. РАН **352** (4), 451–454 (1997).

[6] Сабитов К.Б. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области*, Матем. заметки **86** (2), 273–279 (2009).

[7] Сабитов К.Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* (Наука, М., 2016).

[8] Сабитов К.Б. *Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения*, Матем. заметки **102** (3), 415–435 (2017).

[9] Сидоров С.Н. *Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения*, Докл. АМАН **14** (3), 34–44 (2012).

[10] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения*, Дифференц. уравнения **50** (3), 356–365 (2014).

[11] Сидоров С.Н. *Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением*, Изв. вузов. Матем. **12**, 55–64 (2015).

[12] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболико-гиперболического типа*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **137**, 26–60 (2017).

[13] Sabitov K.B., Sidorov S.N. *Initial-Boundary Problem for a Three-Dimensional Inhomogeneous Equation of Parabolic-Hyperbolic Typ*, Lobachevskii J. Math. **41** (11), 2257–2268 (2020).

[14] Алдашев С.А. *Задача Дирихле для одного класса вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений*, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информатика **17** (3), 244–254 (2017).

[15] Алдашев С.А. *Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **22** (2), 225–235 (2018).

[16] Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. *Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболо-параболических уравнений*, Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. **25** (4), 7–13 (2019).

[17] Алдашев С.А. *Корректность смешанной задачи для многомерного гиперболо-параболического уравнения*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **24** (3), 574–582 (2020).

[18] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа*, Матем. заметки **87** (6), 907–918 (2010).

[19] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием*, Изв. вузов. Матем. (1), 46–59 (2015).

[20] Сидоров С.Н. *Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью*, Сиб. электрон. матем. изв. **16**, 144–157 (2019).

[21] Сидоров С.Н. *Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени*, Уфимск. матем. журн. **11** (1), 72–86 (2019).

[22] Бухштаб А.А. *Теория чисел* (Лань, СПб., 2008).

[23] Хинчин А.Я. *Цепные дроби* (Наука, М., 1978).

[24] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т. 1 (Мир, М., 1965).

Станислав Николаевич Сидоров

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
ул. Космонавтов, д. 1, г. Уфа, 450064, Россия,

e-mail: stsid@mail.ru

S.N. Sidorov

Three-dimensional initial boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part

Abstract. An initial-boundary value problem is studied for an inhomogeneous equation of mixed parabolic-hyperbolic type in three variables in a rectangular parallelepiped. A criterion for the uniqueness of a solution is established. The solution is constructed as the sum of an orthogonal series. When justifying the convergence of the series, the problem of small denominators of two natural arguments arose. Estimates on the separation of small denominators from zero with the corresponding asymptotics are established. These estimates made it possible to substantiate the convergence of the constructed series in the class of regular solutions of this equation. The stability of the solution with respect to the boundary function is established.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, initial-boundary value problem, uniqueness, series, small denominators, existence, stability.

Stanislav Nikolaevich Sidorov

Ufa State Petroleum Technological University,
1 Kosmonavtov str., Ufa, 450064 Russia,

e-mail: stsid@mail.ru