ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 120, № 2
август, 1999

© **1999 г.** **И. З. Голубчик*, В. В. Соколов†**

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЙЗЕНБЕРГА НА $\mathbb{Z}$-ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Изучены интегрируемые системы типа уравнения Гайзенберга, соответствующие различным разложениям $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли в прямую сумму двух подалгебр. Найдены новые неабелевы обобщения некоторых известных интегрируемых моделей.

ВВЕДЕНИЕ

Стандартная модель Гайзенберга описывается точно интегрируемым уравнением

$$S_t = S \times S_{xx},$$

где S – трехмерный вектор, лежащий на единичной сфере. Для изучения локальных свойств этого уравнения часто бывает полезно разрешить связь $|S|^2 = 1$ и перейти к двухкомпонентной системе. Если это сделать с помощью стереографической проекции, то в результате получится система

$$U_t = U_{xx} - \frac{2U_x^2}{U+V}, \qquad V_t = -V_{xx} + \frac{2V_x^2}{U+V}. \tag{1}$$

Отметим, что (1) допускает полиномиальную запись

$$W_t = W_{xx} + 2(WV_xW)_x, \qquad V_t = -V_{xx} + 2V_xWV_x, \tag{2}$$

если перейти к переменным V и $W = (U+V)^{-1}$.

Известно, что уравнение Гайзенберга обладает интегрируемым матричным обобщением

$$S_t = [S, S_{xx}], \qquad S^2 = E. \tag{3}$$

Уравнение (3) рассматривалось и для простых алгебр Ли. Однако при этом в качестве связи выбиралось соотношение $\langle S, S\rangle = 1$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает форму Киллинга (см. [1]).

*Уфимский педагогический институт, Уфа, Россия
†ИТФ им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия

Это соотношение принципиально отличается от связи типа $S^2 = E$. В настоящей работе мы обобщаем связь $S^2 = E$ на случай алгебр Ли, накладывая на S условие

$$(\operatorname{ad} S)^3 = \operatorname{ad} S, \tag{4}$$

и в результате приходим к некоторому классу интегрируемых уравнений на 3-градуированных алгебрах Ли. Освобождение от связи (4) в этих уравнениях приводит к уравнению (2) на произвольных йордановых парах. Отметим, что в работе [2] на значительно менее общий случай тройных йордановых систем с обратимыми элементами было обобщено уравнение (1).

В разделе 1 приводится общая схема построения систем типа уравнения Гайзенберга для $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли, разложенных в прямую сумму двух подалгебр. Отметим, что в работе [3] мы рассматривали несколько другие разложения, соответствующие обобщенным системам типа нелинейного уравнения Шредингера, модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза, Буссинеска и Бюргерса. Обе наши работы демонстрируют справедливость замечания М. А. Семенова-Тян-Шанского о том, что подход, связанный с разложением $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли в сумму двух подалгебр, адекватно описывает все многообразие представлений Лакса для интегрируемых систем, в то время как R-матричный подход [4], имеющий дело только с кососимметрическими решениями уравнения Янга–Бакстера, приводит к потере интегрируемых случаев.

В разделах 2 и 3 содержатся новые примеры разложений $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли в сумму двух подалгебр и соответствующие интегрируемые системы типа уравнения Гайзенберга.

1. ОБЩАЯ СХЕМА

Пусть $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{G}_i$ – $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли. Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}$ алгебру Ли $\left\{\sum_{i=-k}^{\infty} g_i \;\middle|\; k \in \mathbb{Z},\ g_i \in \mathfrak{G}_i\right\}$. Будем называть элементы $\overline{\mathfrak{G}}$ рядами.

Напомним, как по разложению $\overline{\mathfrak{G}}$ в прямую сумму

$$\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}_+ \oplus \mathfrak{G}_-, \tag{5}$$

где

$$\mathfrak{G}_+ = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} g_i, \quad g_i \in \mathfrak{G}_i\right\}, \tag{6}$$

а $\mathfrak{G}_-$ – произвольная подалгебра, строится иерархия интегрируемых систем типа уравнения Гайзенберга.

Пусть постоянный элемент $\alpha \in \mathfrak{G}_{-1}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}\alpha) \oplus \operatorname{Im}(\operatorname{ad}\alpha) = \overline{\mathfrak{G}}. \tag{7}$$

Рассмотрим оператор

$$L = D_x + q_-. \tag{8}$$

Здесь $q = T\alpha T^{-1}$, где T – элемент группы Ли G алгебры Ли $\mathfrak{G}_0$, а знак "–" означает проецирование на $\mathfrak{G}_-$ параллельно $\mathfrak{G}_+$.

Воспользуемся следующим стандартным способом построения оператора Лакса A [5]. Известно, что существуют ряды U и V такие, что

$$\exp(\operatorname{ad} U)(L) = D_x + \alpha + V, \qquad U \in \mathfrak{G}_+, \quad V \in \mathfrak{G}_+ \cap \operatorname{Ker}(\operatorname{ad}\alpha).$$

Возьмем произвольный элемент β из центра $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}\alpha)$ и положим

$$A_\beta = \exp(-\operatorname{ad} U)(\beta).$$

Тогда операторное уравнение Лакса $L_t = [(A_\beta)_-, L]$ задает эволюцию элемента q_-. Из формулы $q_- = q - q_+$ следует, что $q_- \in \sum_{i=-1}^{\infty} \mathfrak{G}_i$, причем проекция q_- на $\mathfrak{G}_{-1}$ параллельно $\mathfrak{G}_+$ совпадает с q. Поэтому проецирование уравнения Лакса на компоненту $\mathfrak{G}_{-1}$ приводит к эволюционному уравнению вида

$$q_t = F(q, q_x, \ldots, q_k), \tag{9}$$

где

$$q = T\alpha T^{-1} \in \mathfrak{G}_{-1}. \tag{10}$$

Подчеркнем, что (9) – уравнение на орбите элемента α. Именно этот факт выражают формулы типа $S^2 = E$ в (3).

Потоки, соответствующие разным элементам β, коммутируют между собой. Поэтому система (9) обладает бесконечной серией высших симметрий. Кроме того, если на $\overline{\mathfrak{G}}$ имеется инвариантная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то (9) обладает бесконечной серией высших локальных законов сохранения вида $\langle\gamma, V\rangle$, где γ – произвольный постоянный элемент из центра $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}\alpha)$.

2. УРАВНЕНИЕ ГАЙЗЕНБЕРГА НА АЛГЕБРЕ ТОКОВ

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{G} = g[\lambda, \lambda^{-1}]$, где g – конечномерная алгебра Ли.

Для простоты будем считать, что g вложена в некоторую матричную алгебру. Градуировка в $\mathfrak{G}$ соответствует степеням λ. Положим

$$\mathfrak{G}_- = \left\{ \sum_{i=-n}^{-1} g_i,\ g_i \in \mathfrak{G}_i,\ n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{11}$$

Пусть $\alpha = a\lambda^{-1}$, где a – некоторый полупростой элемент. Тогда формула (8) дает $L = D_x + q/\lambda$, где $q = TaT^{-1}$.

Выберем $\beta = f(a)\lambda^{-2}$, где f – некоторый многочлен с постоянными коэффициентами. Соответствующий оператор A_β задается формулой

$$A_\beta = \frac{1}{\lambda^2} f(q) - \frac{1}{\lambda} (\operatorname{ad} q)^{-1} f(q)_x,$$

а уравнение (9) имеет вид

$$q_t = \big((\operatorname{ad} q)^{-1} f(q)_x\big)_x. \tag{12}$$

Поскольку a – полупростой элемент, то $(\operatorname{ad} q)^{-1}$ существует на образе $\operatorname{ad} q$. На ядре $\operatorname{ad} q$ мы доопределяем оператор $(\operatorname{ad} q)^{-1}$ нулем. Соотношение (12) самосогласованно, поскольку и левая, и правая части лежат в образе $\operatorname{ad} q$.

Общее матричное уравнение Гайзенберга получается в случае, когда $g = gl(n)$. Для некоторых специальных матриц a оператор $(\operatorname{ad} q)^{-1}$ может быть выражен как $\operatorname{ad} P(q)$, где P – некоторый многочлен.

Пример 1. Если $a^2 = E$, то

$$(\operatorname{ad} q)^{-1} = \frac{1}{4} \operatorname{ad} q$$

и при $b = a$ мы приходим (после растяжения t и замены q на S) к уравнению (3). Если $n = 2m$, то в симметрии уравнения (3), соответствующей $\beta = a\lambda^{-3}$, имеется редукция

$$q = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad T \in gl(m).$$

Соответствующее матричное уравнение

$$T_t = T_{xxx} - \frac{3}{2} T_x T^{-1} T_{xx} - \frac{3}{2} T_{xx} T^{-1} T_x + \frac{3}{2} T_x T^{-1} T_x T^{-1} T_x$$

возникало в работе [6].

Пример 2. В случае $a^3 = E$ имеем

$$(\operatorname{ad} q)^{-1} = \frac{1}{3} \operatorname{ad}(q^2).$$

При $b = a^2$ получается следующее любопытное уравнение:

$$q_t = [q^2, (q^2)_{xx}], \qquad q^3 = E.$$

В случае $g = gl(3m)$ редукция

$$q = \begin{pmatrix} 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & S \\ S^{-1}T^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $T, S \in gl(m)$, дает систему

$$T_t = TS(S^{-1})_{xx} - (TS)_{xx} S^{-1}, \qquad S_t = T^{-1}(TS)_{xx} - (T^{-1})_{xx} TS.$$

В скалярном случае это уравнение точечно-эквивалентно известной системе

$$u_t = u_{xx} + v_x^2, \qquad v_t = -v_{xx} - u_x^2.$$

Пример 3. Естественное обобщение примера 1 состоит в том, что q принадлежит произвольной алгебре Ли g, в которой существует элемент a такой, что

$$(\operatorname{ad} a)^3 = \operatorname{ad} a.$$

Ясно, что тогда и неизвестная функция $q = TaT^{-1}$ удовлетворяет условию

$$(\operatorname{ad} q)^3 = \operatorname{ad} q. \tag{13}$$

Как и в примере 1, имеем уравнение

$$q_t = [q, q_{xx}]. \tag{14}$$

Освободимся от связи (13) в этом уравнении. Элемент a задает на g структуру 3-градуированной алгебры Ли: $g = g_{-1} \oplus g_0 \oplus g_1$, где $g_i = \{p \mid [p, a] = ip\}$. Можно показать, что всякий элемент q, удовлетворяющий соотношению (13), единственным образом представим в виде

$$q = e^{\operatorname{ad} V} e^{\operatorname{ad} W}(a), \qquad W \in g_{-1}, \quad V \in g_1.$$

Легко проверить, что V и W удовлетворяют системе

$$W_t = W_{xx} - [W, [V_x, W]]_x, \qquad V_t = -V_{xx} - [V_x, [W, V_x]]. \tag{15}$$

Как известно [7], имеется взаимно однозначное соответствие между 3-градуированными алгебрами Ли и заданными на паре пространств g_1 и g_{-1} йордановыми парами. При этом тройные коммутаторы элементов этих пространств задают соответствующие тройные йордановы умножения. Поэтому уравнение (15) является йордановым аналогом уравнения (2). Наиболее интересные примеры возникают при рассмотрении матричной и двух различных векторных тройных йордановых пар (см. [6, 8]). В первом случае возникает матричное уравнение (2). Векторные примеры имеют вид

$$\begin{aligned}
W_t &= W_{xx} - 2(\langle W, V_x\rangle W)_x, \\
V_t &= -V_{xx} - 2\langle V_x, W\rangle V_x, \\
W_t &= W_{xx} - 2(\langle W, V_x\rangle W)_x + (\langle W, W\rangle V_x)_x, \\
V_t &= -V_{xx} - 2\langle V_x, W\rangle V_x + \langle V_x, V_x\rangle W.
\end{aligned}$$

Здесь W и V – векторы в N-мерном пространстве, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – стандартное скалярное произведение.

3. УРАВНЕНИЯ ГАЙЗЕНБЕРГА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НЕСТАНДАРТНЫМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ПОДАЛГЕБРАМ

В общей постановке задача классификации всех возможных разложений (5) до сих пор не решена. При некоторых ограничениях свойства дополнительных подалгебр $\mathfrak{G}_-$ изучались в работах [9, 10].

Построим некоторые примеры таких разложений, основываясь на операторном уравнении Янга–Бакстера

$$[R(a), R(b)] = R([R(a), b] - [R(b), a] + [a, b]), \tag{16}$$

где R – искомый линейный оператор из

$$\mathfrak{G}^{(-)} = \left\{ \sum_{-n}^{-1} g_i,\ g_i \in \mathfrak{G}_i,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

в $\mathfrak{G}_0$, a и b – произвольные элементы $\mathfrak{G}^{(-)}$. Хотя по форме соотношение (16) совпадает с модифицированным уравнением Янга–Бакстера для констант из работы [11], в отличие от этой работы в нашем рассмотрении оператор R действует из бесконечномерной в конечномерную алгебру Ли.

Если имеется некоторое решение R уравнения (16), то подалгебра $\mathfrak{G}_-$ из разложения (5) строится с помощью стандартной формулы

$$\mathfrak{G}_- = \left\{ a + R(a) \,|\, a \in \mathfrak{G}^{(-)} \right\}. \tag{17}$$

Оператор $L = D_x + q_-$, заданный формулой (8), имеет в этом случае вид

$$L = D_x + q + R(q), \tag{18}$$

поскольку $q = q + R(q) - R(q)$ и $R(q) = q_+$.

В случае алгебры токов (см. раздел 2) обобщение уравнения (12) выглядит следующим образом:

$$q_t = -\big((\operatorname{ad} q)^{-1}(C)\big)_x + \left[(\operatorname{ad} q)^{-1}(C), R\left(\frac{q}{\lambda}\right)\right] + [R(B), q],$$

где

$$C = (-f(q))_x + \left[f(q), R\left(\frac{q}{\lambda}\right)\right],$$
$$B = \frac{f(q)}{\lambda^2} + (\operatorname{ad} q)^{-1}\left(\frac{C}{\lambda}\right).$$

Оператор A задается формулой $A = B + R(B)$.

Нетрудно построить примеры решений уравнения (16) исходя из решений уравнения Янга–Бакстера на конечномерных алгебрах Ли. Однако существуют и другие примеры.

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная ассоциативная алгебра, $\mathfrak{A}^-$ – ее присоединенная алгебра Ли, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}^-[\lambda, \lambda^{-1}]$. Нетрудно проверить, что оператор R, задаваемый формулой $R(\lambda^{-i}a) = -r^i \cdot a$, где r – произвольный постоянный элемент $\mathfrak{A}$, удовлетворяет уравнению (16).

Пример 4. Приведем уравнение Гайзенберга, соответствующее такому оператору R. Формула (18) дает нам

$$L = D_x + \frac{q}{\lambda} - rq,$$

где $q = T\alpha T^{-1}$. Оператор A, соответствующий $\beta = \alpha\lambda^{-2}$, задается формулой

$$A = \frac{q}{\lambda^2} - \frac{p}{\lambda} - r^2 q + rp,$$

где $p = (\operatorname{ad} q)^{-1}(q_x + [q, rq])$. Соответствующее уравнение Гайзенберга имеет вид

$$q_t = p_x + [q, r^2 q - rp] + [p, rq].$$

Напомним, что q принадлежит произвольной ассоциативной алгебре, r – произвольный постоянный элемент этой алгебры. В случае, когда q удовлетворяет соотношению $q^2 = E$ или $q^3 = E$, оператор $\operatorname{ad} q$ может быть обращен с помощью локальных формул, как в примерах 1 и 2.

Следующий широкий класс решений уравнения (16) мы строим исходя из разложения некоторой конечномерной фактор-алгебры Ли в прямую сумму двух подалгебр. Пусть I – идеал в алгебре Ли $\mathfrak{G}^{(-)} \oplus \mathfrak{G}_0$ конечной коразмерности такой, что $I \cap \mathfrak{G}_0 = \{0\}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ фактор-алгебру $\mathfrak{G}^{(-)} \oplus \mathfrak{G}_0/I$. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_+ \oplus \mathfrak{A}_-$ – прямая сумма подпространств $\mathfrak{A}_+$ и $\mathfrak{A}_-$, являющихся подалгебрами Ли, причем $\mathfrak{A}_- \subset \mathfrak{G}_0$ (мы отождествляем $\mathfrak{G}_0$ с $\mathfrak{G}_0/I$).

Тогда легко проверить, что оператор $R\colon \mathfrak{G}^{(-)} \to \mathfrak{G}_0$, определяемый формулой

$$R(a) = -\Pi(a + I), \tag{19}$$

где $\Pi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ – оператор проецирования на $\mathfrak{A}_-$ параллельно $\mathfrak{A}_+$, удовлетворяет уравнению (16). Подалгебра $\mathfrak{G}_-$ в разложении (5) определяется формулой (17). В частности, если $\mathfrak{A}_- = \mathfrak{G}_0$, то $\mathfrak{G}_-$ совпадает с полным прообразом $\mathfrak{A}_+$ при каноническом гомоморфизме в фактор-алгебру $\mathfrak{A}$.

В следующих трех примерах, связанных с алгеброй токов, мы приводим только явный вид оператора L. Соответствующие операторы A и уравнения для q нетрудно построить, используя общую схему из раздела 1.

Отметим, что в случае алгебры токов соответствующие идеалы получаются из $g[\lambda^{-1}]$ умножением на λ^{-2}, $\lambda^{-2} - \lambda^{-1}$ и $\lambda^{-2} - 1$.

Пример 5. Пусть r удовлетворяет стандартному уравнению Янга–Бакстера [11, 12]

$$[r(a), r(b)] = r([r(a), b] - [r(b), a])$$

на конечномерной алгебре Ли g. Положим $I = \lambda^{-2} g[\lambda^{-1}]$. Соответствующее решение R уравнения (16) задается формулами $R(q\lambda^{-1}) = r(q)$ и $R(q\lambda^{-i}) = 0$ при $i > 1$. Оператор L имеет вид

$$L = D_x + \frac{q}{\lambda} + r(q). \tag{20}$$

В случае кососимметрических решений r такой оператор хорошо известен. Отметим, что пример 5 легко обобщается на произвольную $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру Ли.

Пример 6. Пусть r удовлетворяет первому модифицированному уравнению Янга–Бакстера [12]

$$[r(a), r(b)] = r([r(a), b] - [r(b), a]) - [a, b]$$

на конечномерной алгебре Ли g. Положим $I = (\lambda^{-2} - 1)g[\lambda^{-1}]$. Соответствующее решение R уравнения (16) задается формулами $R(q\lambda^{-2i}) = -q$ и $R(q\lambda^{-2i+1}) = r(q)$ при $i > 0$. Оператор L имеет вид (20). Возможно, этот пример является новым. Отметим, что он очевидным образом обобщается с алгебры токов на любую алгебру Каца–Муди с автоморфизмом второго порядка.

Пример 7. Пусть r удовлетворяет второму модифицированному уравнению Янга–Бакстера [11]

$$[r(a), r(b)] = r([r(a), b] - [r(b), a] + [a, b])$$

на конечномерной алгебре Ли g. Положим $I = (\lambda^{-2} - \lambda^{-1})g[\lambda^{-1}]$. Соответствующее решение R уравнения (16) задается формулами $R(q\lambda^{-i}) = r(q)$ при $i > 0$. Оператор L имеет вид (20). Возможно, этот пример является новым.

Благодарности. Авторы благодарны В. Г. Дринфельду за полезные обсуждения.

Исследования были выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00294).

Список литературы

[1] *О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов.* Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. С. 60–63.
[2] *С. И. Свинолупов, В. В. Соколов.* ТМФ. 1996. Т. 108. № 3. С. 388–392.
[3] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 375–383.
[4] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
[5] *В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов.* Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1984. Т. 24. С. 81–180.
[6] *С. И. Свинолупов, В. В. Соколов.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 214–218.
[7] *О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Л. А. Скорняков, И. П. Шестаков.* Общая алгебра. Т. 1. М.: Наука, 1990.
[8] *I. T. Habibullin, V. V. Sokolov, R. I. Yamilov.* Multi-component integrable systems and nonassociative structures. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. Eds. E. Alfinito et al. Singapore: World Scientific Publisher, 1996. P. 139–168.
[9] *V. Ostapenko.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1992. V. 315 (Ser.I). P. 669–673.
[10] *A. Stolin.* Math. Scand. 1991. V. 69. P. 57–80.
[11] *А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16 (3). С. 1–29.
[12] *М. А. Семенов-Тян-Шанский.* Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17 (4). С. 17–33.

Поступила в редакцию 25.II.1999 г.